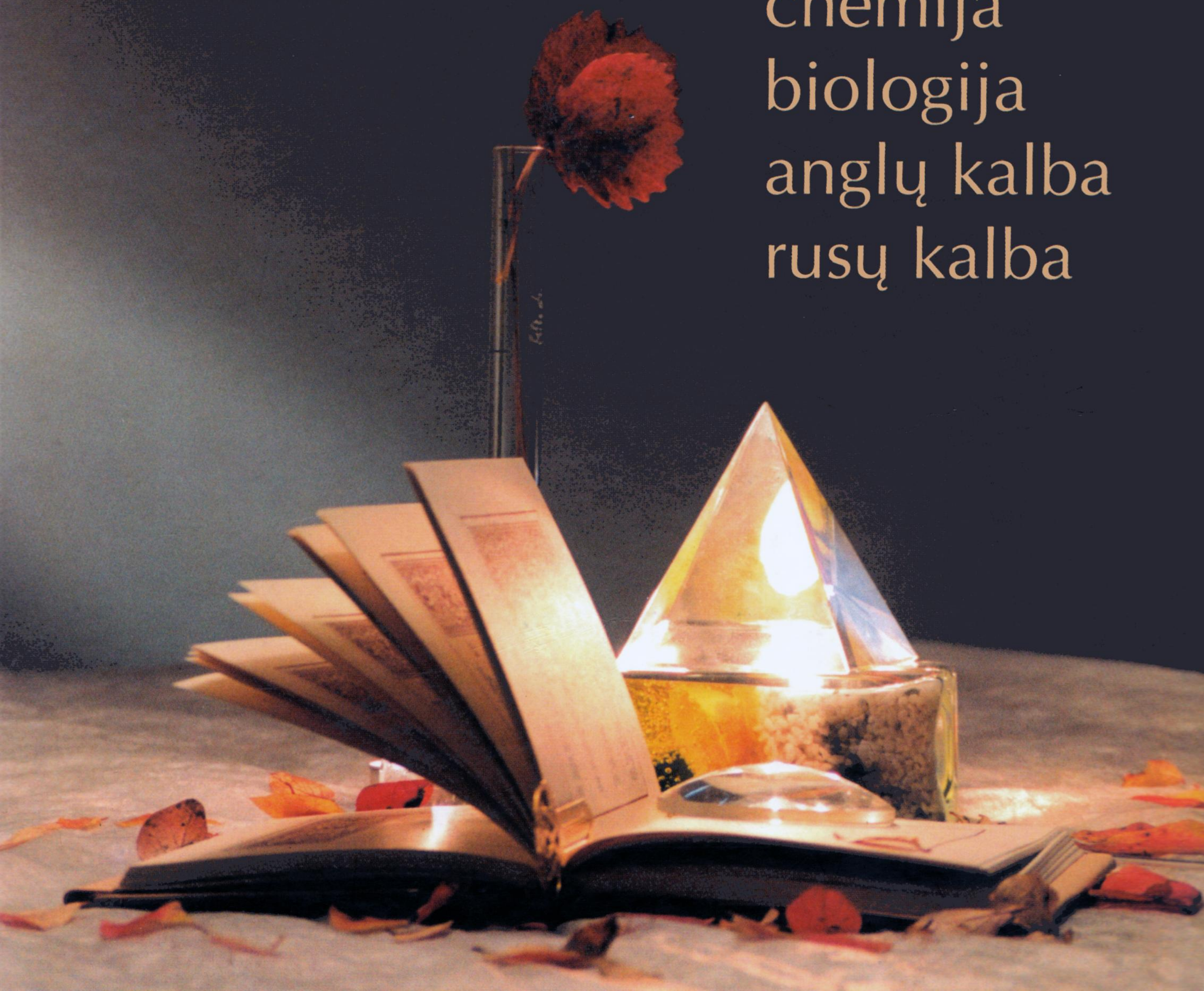
Mokinio ŽINYNAS

matematika
fizika
chemija
biologija
anglų kalba
rusų kalba



Mokinio

ŽINYNAS

matematika
fizika
chemija
biologija
anglų kalba
rusų kalba

Alma littera

UDK 030
Mo-55

Versta iš: **Школьная программа в таблицах и формулах**
Издательский дом «Дрофа», Москва, 1999

Iš rusų kalbos vertė:
Vaclovas Čiočys (*Algebra, Geometrija, Matematika*)
Donatas Grabauskas (*Fizika*)
Vytautas Naruševičius (*Biologija*)
Juozas Stonys (*Anglų kalba*)
Zita Stumbrevičiūtė (*Chemija*)

Redagavo Regina Mudėnienė, Danutė Rimšienė, Audronė Puidokienė
Viršelio dailininkė Rūta Ivanauskaitė
Viršelio nuotrauka Vidūnas Balkus
Korektorė Rita Gribulytė
Maketavo Valdas Bautrėnas

ISBN 9955-08-200-3

Tiražas 4000 egz.
Išleido leidykla „Alma littera“, A. Juozapavičiaus g. 6/2, 09310 Vilnius
Interneto svetainė: http://www.almalittera.lt
Spaudė AB spaustuvė „Spindulys“, Gedimino g. 10, 44318 Kaunas
Interneto svetainė: http://www.spindulys.lt

Turinys

Algebra

1. Realieji skaičiai

<table>
<tr><th colspan="3">Natūraliųjų skaičių aibė</th></tr>
<tr><td colspan="2">N</td><td>Natūralieji skaičiai 1; 2; 3...</td></tr>
<tr><th colspan="3">Sveikųjų skaičių aibė</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Z</td><td>N</td><td rowspan="3">Sveikieji skaičiai – tai natūralieji, skaičiai, nulis ir natūraliesiems skaičiams priešingi skaičiai
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{N}_-$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Racionaliųjų skaičių aibė</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Racionalieji skaičiai išreiškiami santykiu $\frac{p}{q}$, čia p – sveikasis skaičius, q – natūralusis
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$</td></tr>
<tr><td>Trup-menos</td></tr>
<tr><th colspan="3">Realiųjų skaičių aibė</th></tr>
<tr><td rowspan="2">R</td><td>Q</td><td>Realieji skaičiai – tai begalinės dešimtainės trupmenos
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
Racionalieji skaičiai – begalinės periodinės trupmenos. Periodo negali sudaryti vien devintukai. Jeigu periodą sudaro tik nuliai, trupmena yra baigtinė dešimtainė</td></tr>
<tr><td>$\bar{\mathbf{Q}}$</td><td>Iracionaliųjų skaičių aibė
Iracionalieji skaičiai – tai begalinės dešimtainės neperiodinės trupmenos
$\mathbf{Q} \cup \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$3 \in \mathbf{N}$, $3 \in \mathbf{Z}$, $-6 \notin \mathbf{N}$, $-6 \in \mathbf{Z}$, $0{,}25 \notin \mathbf{N}$, $0{,}25 \notin \mathbf{Z}$, $0{,}25 \in \mathbf{Q}$, $0{,}25 \in \mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Neneigiamų sveikųjų skaičių dalumas
Skaičius a dalijasi iš skaičiaus b, jei yra toks skaičius c, kad $a = bc$.
$a \vdots b$; b – daliklis; a – b kartotinis</td></tr>
<tr><th colspan="3">Dalumo savybės</th></tr>
<tr><td colspan="3">Nulis dalijasi iš bet kurio natūraliojo skaičiaus
Bet kuris skaičius dalijasi iš vieneto
Bet kuris skaičius dalijasi pats iš savęs</td></tr>
</table>

Dalumo savybės (tęsinys)	
Jei $a > 0$ ir $a \vdots b$, tai $a \geq b$	Jei $a \vdots b$ ir $b \vdots a$, tai $a = b$
Jei $a \vdots b$ ir $b \vdots c$, tai $a \vdots c$	Jei $a \vdots b$ ir $k \neq 0$, tai $ak \vdots bk$
Jei $a \vdots c$ ir $b \vdots c$, tai $(a + b) \vdots c$	Jei $a \vdots c$ ir $b \vdots c$, tai $(am + bn) \vdots c$
Jei $a \vdots (bc)$, tai $a \vdots b$, $a \vdots c$ ir $(a : b) \vdots c$	Jei $a \vdots c$ ir $(a + b) \vdots c$, tai $b \vdots c$

Dalyba su liekana

Bet kuriai natūraliųjų skaičių porai a ir b galima rasti tokius sveikuosius neneigiamus skaičius q ir r, kad $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$.

Jeigu $r = 0$, tai $a \vdots b$. Skaičius r vadinamas skaičiaus a dalybos iš b *liekana*

Dalumo požymiai	
Skaičius dalijasi iš 2, jei jo paskutinis skaitmuo dalijasi iš 2	**iš 2**
Skaičius dalijasi iš 5, jei jo paskutinis skaitmuo dalijasi iš 5	**iš 5**
Skaičius dalijasi iš 4, jei skaičius, sudarytas iš dviejų paskutiniųjų skaičiaus skaitmenų, dalijasi iš 4 arba kai du paskutiniai jo skaitmenys yra nuliai	**iš 4**
Skaičius dalijasi iš 25, jei skaičius, sudarytas iš dviejų paskutiniųjų skaičiaus skaitmenų, dalijasi iš 25 arba kai du paskutiniai jo skaitmenys yra nuliai	**iš 25**
Skaičius dalijasi iš 3, jei jo skaitmenų suma dalijasi iš 3	**iš 3**
Skaičius dalijasi iš 9, jei jo skaitmenų suma dalijasi iš 9	**iš 9**
Skaičius dalijasi iš 11, jei jo skaitmenų algebrinė suma $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^{n-1}a_{n-1}$ dalijasi iš 11	**iš 11**

n-ženklių natūraliųjų skaičių užrašymas dešimtainėje skaičiavimo sistemoje:

$$\overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_2 \cdot 10^2 +$$
$$+ a_1 \cdot 10^1 + a_0;$$

a_i skaičiaus skaitmenys, $a_{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$

MBK $(a; b)$	Skaičių a ir b *mažiausiuoju bendruoju kartotiniu* vadinamas mažiausias teigiamas iš visų bendrųjų kartotinių. MBK (15; 10) = 30
DBD $(a; b)$	Skaičių a ir b *didžiausiuoju bendruoju dalikliu* vadinamas didžiausias bendras tų skaičių daliklis. DBD (15; 10) = 5

MBK $(a; b) \cdot$ DBD $(a; b) = a \cdot b$

Skaičiai a ir b vadinami tarpusavy pirminiais, jei DBD $(a; b) = 1$	Natūralusis skaičius p vadinamas *pirminiu*, jei jis turi tik du skirtingus daliklius (vienetą ir patį save). 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23... – pirminiai skaičiai

1. Realieji skaičiai

Pirminių skaičių savybės	
Kiekvienas natūralusis skaičius arba dalijasi iš pirminio, arba pats yra pirminis Natūraliųjų skaičių sandauga dalijasi iš pirminio skaičiaus tada ir tik tada, kai nors vienas iš jų dalijasi iš to pirminio skaičiaus	Pirminių skaičių yra be galo daug (nėra paties didžiausio pirminio skaičiaus) Jeigu natūralusis skaičius nesidalija nė iš vieno pirminio skaičiaus, kurio kvadratas yra ne didesnis už tą natūralųjį skaičių, tai jis yra pirminis Kiekvieną pirminį skaičių p (p > 3) galima užrašyti šitaip: $p = 6k \pm 1,\ k \in \mathbf{N}$
Natūraliojo skaičiaus n (n > 1) kanoninis skaidinys: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, čia p_i – pirminis skaičius, $p_i < p_{i+1}$ ir $0 < \alpha_i \in \mathbf{N}$ $\quad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	

2. Modulis

$$|a| = \left[\begin{array}{ll} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{array}\right.$$

Pagrindinės modulio savybės	Geometrinė modulio interpretacija
$\lvert a\rvert \geq 0$ $\quad \lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$ $\quad \lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \leq \lvert a \pm b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	Jeigu skaičių ašyje skaičiaus A koordinatė yra a, tai atstumas nuo A iki 0 yra lygus $\lvert a\rvert$

Atstumas tarp tiesės taškų A (a) ir B (b) yra lygus $|a - b|$

Lygtys su moduliu

$\lvert x\rvert = a$	$\lvert x-b\rvert = a$	$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	$\lvert f(x)\rvert = g(x)$
$a < 0$ sprendinių nėra	$a < 0$ sprendinių nėra	ekvivalenti lygčių visumai $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$	ekvivalenti lygčių sistemai $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right.$
$a = 0 \quad x = 0$	$a = 0 \quad x = b$		
$a > 0 \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$	$a > 0 \left[\begin{array}{l} x = b - a \\ x = b + a \end{array}\right.$		

Nelygybės su moduliu

$\lvert x-b\rvert < a$	$\lvert x-b\rvert \geq a$	$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$\lvert f(x)\rvert > g(x)$
$a \leq 0$, sprendinių nėra	$a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$	ekvivalenti sistemai: $\left\{\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array}\right.$	ekvivalenti visumai: $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$a > 0$ $b - a < x < b + a$	$a > 0$ $x \leq b - a$ arba $x \geq b + a$		

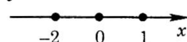
Nelygybė $|f(x)| > |g(x)|$ ekvivalenti nelygybei $f^2(x) > g^2(x)$ arba nelygybei $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$

2. Modulis

Pavyzdžiai

Sprendimas intervalų metodu

$y = |x+2| + 3\,|x| - 2\,|x-1|$



$x \le -2$,

$y = -(x+2) - 3x + 2\,(x-1) = -2x - 4.$

$-2 < x \le 0$,

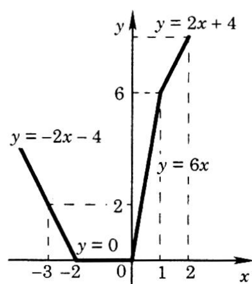
$y = x + 2 - 3x + 2\,(x-1) = 0.$

$0 < x \le 1$,

$y = x + 2 + 3x + 2\,(x-1) = 6x.$

$x > 1$,

$y = x + 2 + 3x - 2\,(x-1) = 2x + 4.$



Išspręskite lygtį

$3x^2 - 5\,|x| - 8 = 0.$

Pastebėsime, kad $|x|^2 = x^2$;

pažymėsime $|x| = t$.

$3t^2 - 5t - 8 = 0.$

$t_1 = -1;\ t_2 = \frac{8}{3}.$

$|x| = -1$, sprendinių nėra.

$|x| = \frac{8}{3};\ x_1 = -\frac{8}{3},\ x_2 = \frac{8}{3}.$

Atsakymas: $x_1 = -\frac{8}{3};\ x_2 = \frac{8}{3}.$

Nubraižykite funkcijos $y = \tan x \cdot |\cos x|$ grafiką.

Duotoji funkcija yra periodinė, jos periodas $T = 2\pi$.

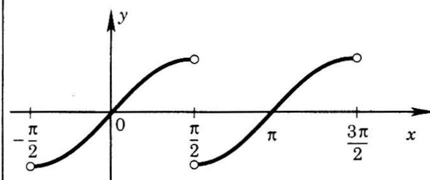
Nubraižysime grafiką kiekviename intervale, kuriame kosinuso ženklas pastovus.

Kai $\cos x > 0$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$y = \sin x$;

kai $\cos x < 0$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$,

$y = -\sin x$.



3. Veiksmai su daugianariais

Daugianarių sudėtis: $(a^2 + ab - b) + (3a^2 - 2ab + b) = 4a^2 - ab$

Daugianarių atimtis: $(2a - b) - (3a + b) = (2a - b) + (-3a - b) = -a - 2b$

Daugianarių daugyba: $(a + 3b)(a - b) = a^2 - ab + 3ab - 3b^2 = a^2 + 2ab - 3b^2$

Sutrumpintosios daugybos formulės

Sumos kvadratas $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Kvadratų skirtumas $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$
Skirtumo kvadratas $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Kubų skirtumas $a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)$
Sumos kubas $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Kubų suma $a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)$
Skirtumo kubas $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	

3. Veiksmai su daugianariais

Niutono binomas: $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$ $C_n^1 = n;\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};$ $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\ k!};\ C_n^k = C_n^{n-k};$ $n \in N, n > 1\ (0! = 1; 1! = 1; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n).$	*Paskalio trikampis* 1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 1 6 15 20 15 6 1 1 7 21 35 35 21 7 1

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

Daugianario skaidymas dauginamaisiais

Bendrojo dauginamojo kėlimas už skliaustų	$2ab + 14a^2 + 2a = 2a\,(b + 7a + 1);$ $3a^2b^3 - 15a^3b = 3a^2b\,(b^2 - 5a).$
Grupavimo būdas	$ab + ac - b - c = a\,(b+c) - (b+c) = (b+c)\,(a-1).$
Trumposios daugybos formulių naudojimas	$a^2 + 4ab + 4b^2 = (a+2b)^2;$ $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - (2a)^2 =$ $= (a^2 - 2a + 2)\,(a^2 + 2a + 2).$
Papildomos formulės	$(a^n - 1) = (a-1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1);$ $(a^{2m+1} + 1) = (a+1)\,(a^{2m} - a^{2m-1} + \ldots - a + 1).$

Vieno kintamojo daugianariai

Bendras pavidalas: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0,$ n – daugianario laipsnis, a_i – koeficientai, a_n – vyriausiojo nario koeficientas, $a_n \neq 0$. Jei $a_n = 1$, tai daugianaris vadinamas *redukuotuoju*. $3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$ – 4-jo laipsnio daugianaris, jo koeficientai: $a_4 = 3;\ a_3 = -1;\ a_2 = 2;\ a_1 = 0;\ a_0 = -5.$	*Kvadratinis trinaris* – antrojo laipsnio daugianaris $ax^2 + bx + c\ (a \neq 0),$ a – pirmasis koeficientas, b – antrasis koeficientas, c – laisvasis narys.

Daugianarių dalyba

Dalybos su liekana teorema $P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x)$, čia $P(x)$ – dalinys, $M(x)$ – daliklis, $Q(x)$ – dalmuo, $R(x)$ – liekana. Jei liekana nelygi nuliui, tai jos laipsnis mažesnis už daliklio laipsnį. $3x^3 - x^2 - 3x - 2 =$ $P(x) = \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{M(x)}\ \underbrace{(3x-4)}_{Q(x)} + \underbrace{(4x-6)}_{R(x)}$	*Dalyba „kampu“.* $\begin{array}{r\|l} 3x^3 - x^2 - 3x - 2 & x^2 + x - 1 \\ -\ 3x^3 + 3x^2 - 3x & 3x - 4 \\ \hline -4x^2 \quad\quad - 2 & \\ -\ -4x^2 - 4x + 4 & \\ \hline 4x - 6 & \end{array}$ $P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x - 2$ $M(x) = x^2 + x - 1$ $Q(x) = 3x - 4$ $R(x) = 4x - 6$

3. Veiksmai su daugianariais

Daugianario $f(x)$ dalyba iš dvinario $x - a$	
Bezu (Bezout) teorema Liekana, kuri gaunama daugianarį padalijus iš $x - a$, yra lygi daugianario reikšmei, kai $x = a$, t. y. $R = f(a)$. $f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + f(a)$	*Hornerio (Horner) schema* Daugianarį $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$ padalysime iš $(x - 5)$. $a = 5$, $b_2 = a_3$, $b_1 = b_2 \cdot 5 + a_2$, $b_0 = b_1 \cdot 5 + a_1$, $R = b_0 \cdot 5 + a_0$, $R = f(5) = 247$. $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 10 & 50 & 247 \\ \hline & b_2 & b_1 & b_0 & R \end{array}$
Skaičius x_0 vadinamas *daugianario šaknimi*, jeigu jo reikšmė, kai $x = x_0$, lygi nuliui $(f(x_0) = 0)$ Daugianario su sveikaisiais koeficientais sveikosios šaknys yra jo laisvojo nario dalikliai	*Pavyzdys:* $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$. Sveikųjų šaknų galima ieškoti tik tarp skaičių -1; 1; 2; -2; 4; -4; 8; -8. *Atsakymas:* $x = 1$; $x = -2$; $x = -4$ – šaknys.

4. Kvadratinės šaknys

Aritmetinės šaknies apibrėžimas $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a \end{cases}$	$\sqrt{16} = 4$, nes $4 > 0$, $4^2 = 16$; $\sqrt{25} \neq 7$, nes $7^2 \neq 25$; $\sqrt{25} \neq -5$, nes $-5 < 0$; $\sqrt{-8}$ – neapibrėžta.	$\sqrt{0,36} = 0{,}6$; $\sqrt{4900} = 70$; $\sqrt{0,0001} = 0{,}01$; $2 < \sqrt{8} < 3$; $0{,}8 < \sqrt{0,8} < 0{,}9$.

Tapatybės	**Pagrindinės savybės**	
$(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert,\ a \in \mathbf{R}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}$	$\sqrt{ab} = \sqrt{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt{\lvert b \rvert}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\lvert a \rvert}}{\sqrt{\lvert b \rvert}}$ $\sqrt{a^p} = (\sqrt{\lvert a \rvert})^p$

Kvadratinių šaknų palyginimas	
Jei $a > b \geq 0$, tai $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$
Jei $a > 1$, tai $a > \sqrt{a}$ ir $\sqrt{a} > 1$	Jei $0 < a < 1$, tai $a < \sqrt{a}$ ir $0 < \sqrt{a} < 1$

4. Kvadratinės šaknys

Dauginamojo iškėlimas prieš šaknies ženklą	Dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu
$\sqrt{a^2 \cdot b} = \lvert a \rvert \cdot \sqrt{b},\ b \geq 0$	$a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2 b}, \text{ kai } a < 0, \\ \sqrt{a^2 b}, \text{ kai } a \geq 0 \end{cases}$, $b \geq 0$
$\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7};$ $\sqrt{7a^2} = \lvert a \rvert \cdot \sqrt{7};$ $\sqrt{5b^2} + \sqrt{b} = b\sqrt{5} + \sqrt{b};$ $\sqrt{3c^2} + \sqrt{-c} = -c\sqrt{3} + \sqrt{-c}.$	$5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{75};$ $-2\sqrt{7} = -\sqrt{28};$ $(\sqrt{5} - 2) \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2 \cdot (9 + 4\sqrt{5})} = 1;$ $(\sqrt{3} - 2) \cdot \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = -\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2 \cdot (7 + 4\sqrt{3})} = -1.$

Iracionalumas trupmenos vardiklyje

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \qquad \frac{5}{\sqrt{3} - 1} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{2}.$$

Dviejų skaičių geometrinio ir aritmetinio vidurkių palyginimas

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},\ a \geq 0;\ b \geq 0$$

$\sqrt{n}$ ($n \in$ N) atvaizdis skaičių tiesėje

$$(\sqrt{n + 1})^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$$

Pavyzdžiai

Rasti x^2 ir suprastinti reiškinį
$x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.
Pastebėsime, kad $x < 0$, nes
$3 - 2\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2}$.
$x^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{9 - 8} + 3 + 2\sqrt{2} = 6 - 2 = 4.$
Vadinasi, $x = -2$.
Atsakymas: $x^2 = 4;\ \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = -2.$

Palyginti skaičius $\sqrt{2} + 1$ ir $\frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.

Užrašome:

$\sqrt{2} + 1 \quad ? \quad \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$

$2\sqrt{2} + 2 \quad ? \quad \sqrt{33} - 1$

$\sqrt{8} + 3 \quad ? \quad \sqrt{33}$

Kadangi lyginami skaičiai yra teigiami, tai galima palyginti jų kvadratus:

$17 + 6\sqrt{8} \quad ? \quad 33$

$6\sqrt{8} \quad ? \quad 16$

$\sqrt{288} \quad > \quad \sqrt{256}$

Taigi $\sqrt{2} + 1 > \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.

5. Natūraliojo laipsnio šaknys

Aritmetinės natūraliojo laipsnio šaknies iš neneigiamo skaičiaus a apibrėžimas $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a}=b\\ n\in\mathbf{N}, a\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}b\geq 0\\ b^n=a\end{matrix}$	$\sqrt[3]{27}=3$; $\sqrt[7]{0,0000001}=0{,}1$; $\sqrt[5]{1024}=4$; $2<\sqrt[3]{9}<3$; $\sqrt[1]{3}=3$; $0{,}2<\sqrt[5]{0,00036}<0{,}3$. $\sqrt[3]{0,008}=0{,}2$;
Nelyginio laipsnio šaknies traukimas iš neigiamo skaičiaus	Jei $a<0$, tai $\sqrt[2n-1]{a}=-\sqrt[2n-1]{-a}$ $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$; $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$; $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}=-\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}=-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2$.
Lyginio laipsnio šaknis iš neigiamo skaičiaus neapibrėžta	
Tapatybės	**Pagrindinės savybės**
Jei $\sqrt[n]{a}$ egzistuoja, tai $(\sqrt[n]{a})^n=a$. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert$, $a\in\mathbf{R}$ $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}=a$, $a\in\mathbf{R}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ $\boxed{\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}}$
Šaknų palyginimas	Jei $a>b\geq 0$, tai $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\geq\sqrt[n]{a+b}$ Jei $a>1$, tai $\sqrt[n]{a}>1$ ir $\sqrt[n]{a}<a$ Jei $0<a<1$, tai $0<\sqrt[n]{a}<1$ ir $\sqrt[n]{a}>a$
Dauginamojo iškėlimas prieš šaknies ženklą	$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 8}=2\cdot\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4\cdot 5}=(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3\cdot 6}=(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt[3]{6}$.
Dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu	$3\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2}=\sqrt[4]{162}$; $-2\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{2^6\cdot 3}=-\sqrt[6]{192}$; $(1-\sqrt{3})\cdot\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4\cdot 2}$; $(1-\sqrt{5})\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3\cdot 2}$.

5. Natūraliojo laipsnio šaknys

Tapatybės (tęsinys)	**Pagrindinės savybės** (tęsinys)
Iracionalumas vardiklyje	$\frac{3}{\sqrt[4]{2}} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{2^3}}{2} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{8}}{2}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)}{3-1} = \sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1.$
Veiksmai su skirtingų rodiklių šaknimis	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}}\cdot\sqrt[12]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{3}{16}}$; $\sqrt[3]{18} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\frac{3^4\cdot 2^2}{2^3\cdot 3^3}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 2^2\cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$
	Palyginti $\sqrt[4]{5}$ ir $\sqrt[3]{3}$. $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$. Kadangi $125 > 81$, tai $\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{81}$ ir $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3}$.
Neneigiamų skaičių geometrinis ir aritmetinis vidurkiai	$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ Lygybė, kai $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

6. Laipsniai. Laipsninė funkcija. Funkcija $y = \sqrt[n]{x}$

Laipsnis su natūraliuoju rodikliu	$a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ kartų}}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$	
Neneigiamo skaičiaus a laipsnis su racionaliuoju rodikliu	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ Jei $m < 0$, tai $a > 0$. Jei $m > 0$, tai $a \ge 0$.	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$; $0^{\frac{3}{5}} = 0$; $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$; $(0{,}04)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$ neapibrėžtas.

6. Laipsniai. Laipsninė funkcija. Funkcija $y = \sqrt[n]{x}$

Laipsnis su sveikuoju rodikliu	$a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$; $(-1{,}2)^0 = 1$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{125}{8}$.
Laipsnis su iracionaliuoju rodikliu	$3^3 < 3^\pi < 3^4$ $(0{,}3)^2 < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^1$ $3^{3,1} < 3^\pi < 3^{3,2}$ $(0{,}3)^{1,5} < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^{1,4}$ $3^{3,14} < 3^\pi < 3^{3,15}$ $(0{,}3)^{1,42} < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^{1,41}$ .... ($\pi = 3{,}1415...$) ($\sqrt{2} = 1{,}4142...$)
Laipsnis su realiuoju rodikliu	a^r, $r \in \mathbf{R}$ $\begin{cases} r < 0, \\ a > 0 \end{cases}$ ir $\begin{cases} r > 0, \\ a \geq 0 \end{cases}$
Laipsnių savybės	$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ $(a^p)^r = a^{pr}$ $a^p : a^r = a^{p-r}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^r$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $a^r : b^r = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$
Laipsnių savybės, susiję su nelygybėmis	$\left.\begin{matrix} a > b \geq 0 \\ r > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^r > b^r$ $\left.\begin{matrix} p > r \\ a > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^p > a^r$ $\left.\begin{matrix} a > b > 0 \\ r < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^r < b^r$ $\left.\begin{matrix} p > r \\ 0 < a < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^p < a^r$
Laipsninės funkcijos grafikai $y = x^r$, $r \in \mathbf{R}$	$0 < p < r < 1$; $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; didėja intervale $[0; +\infty)$. $1 < p < r$; $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; didėja intervale $[0; +\infty)$. $p < r < 0$; $D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = (0; +\infty)$; mažėja intervale $(0; +\infty)$
$y = \sqrt{x}$; $y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = \sqrt[3]{x}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$ $y = \sqrt[2n]{x}$; $y = \sqrt[2n+1]{x}$; $n \in \mathbf{N}$

7. Elementariosios funkcijos

Tiesinė funkcija $y = ax + b$	*Grafikas* – tiesė
$D(y) = \mathbf{R}$	
Kai $a = 0$, $E(y) = \{b\}$ (konstanta), visi taškai – ekstremumo taškai. Kai $a \neq 0$, $E(y) = \mathbf{R}$	
Kai $a > 0$, funkcija didėjanti visoje aibėje **R**. Kai $a < 0$ funkcija mažėjanti aibėje **R**. Ekstremumo nėra	
Funkcija $y = kx$ – *tiesioginis proporcingumas* ($k > 0$). Nelyginė funkcija	$k_1 = \tan \alpha \quad k_2 = \tan \beta$

Kvadratinė funkcija $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)	
$D(y) = \mathbf{R}$	*Grafikas* – parabolė Parabolės viršūnės koordinatės: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0)$. Simetrijos ašis $x = x_0$. Kai $a < 0$, y_0, – mažiausia funkcijos reikšmė. Kai $a > 0$, y_0, – didžiausia funkcijos reikšmė.
Kai $a > 0$, funkcija mažėja intervale $(-\infty; x_0]$ ir didėja intervale $[x_0; +\infty)$; $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – minimumo taškas, $y_0 = y(x_0)$ minimumas. $E(y) = [y_0; +\infty)$	
Kai $a < 0$, funkcija didėja intervale $(-\infty; x_0]$ ir mažėja intervale $[x_0; +\infty)$; $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – maksimumo taškas, $y_0 = y(x_0)$ – maksimumas. $E(y) = (-\infty; y_0]$	$y = ax^2$ Lyginė funkcija

	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
	Dvi šaknys x_1 ir x_2; grafikas kerta ašį $0x$ dviejuose taškuose	Viena šaknis x_0; grafikas liečia ašį $0x$	Šaknų nėra, grafikas yra vienoje $0x$ ašies pusėje
$a > 0$			
$a < 0$			

7. Elementariosios funkcijos

Tiesiškai trupmeninė funkcija $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$	*Grafikas* – hiperbolė $y = \dfrac{k}{x}$, čia $k = (bc - ad)/c^2$
Funkcija $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Yra du funkcijos monotoniškumo intervalai: $(-\infty;\ 0)$ ir $(0;\ +\infty)$; kai $k < 0$, funkcija juose didėja, kai $k > 0$, mažėja. Ekstremumo nėra. Nelyginė funkcija	Vertikalioji asimptotė $x = 0$, horizontalioji $y = 0$ $k < 0$ $k > 0$ atvirkštinis proporcingumas

Tiesiškai trupmeninės funkcijos pavyzdžiai

$y = \dfrac{3x-2}{x-1} = 3 + \dfrac{1}{x-1}$ $x \neq 1;\ y \neq 3;\ y = \dfrac{1}{x}$	$y = \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 - \dfrac{3}{x+1}$ $x \neq -1;\ y \neq 2;\ y = -\dfrac{3}{x}$	$y = \dfrac{6-2x}{2x-3} = -1 + \dfrac{3}{2x-3}$ $x \neq 3/2;\ y \neq -1;\ y = \dfrac{3/2}{x}$

Funkcija $y = \sqrt{x}$	Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$
$D(y) = [0;\ +\infty) = E(y)$. Didėja apibrėžimo srityje $D(y)$. Ekstremumų nėra. Funkcija nei lyginė, nei nelyginė $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$D(y) = (-\infty;\ +\infty) = E(y)$. Didėja apibrėžimo srityje $D(y)$. Ekstremumų nėra. Nelyginė funkcija $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

7. Elementariosios funkcijos

Laipsninė funkcija $y = x^n$		$y' = nx^{n-1}$	
$\boldsymbol{n = 0}$; $y = 1$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(y) = \{1\}$			
$n > 0$, natūralusis		**$n < 0$, sveikasis**	
n – lyginis	*n – nelyginis*	*n – lyginis*	*n – nelyginis*
$D(y) = \mathbf{R}$ $E(y) = [0; +\infty)$	$D(y) = \mathbf{R}$ $E(y) = \mathbf{R}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Lyginė funkcija	Nelyginė funkcija	Lyginė funkcija	Nelyginė funkcija

n – nėra sveikasis skaičius		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0; +\infty) = E(y)$		$D(y) = (0; +\infty) = E(y)$

Laipsninių funkcijų grafikų palyginimas

$w < 0 < v < u < 1 < t < s$

7. Elementariosios funkcijos

Rodiklinė funkcija $y = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ $y' = a^x \cdot \ln a$	**Logaritminė funkcija** $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$D(y) = \mathbf{R}$; $E(y) = (0; +\infty)$; vienas monotoniškumo intervalas; ekstremumų nėra	$D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = \mathbf{R}$; vienas monotoniškumo intervalas; ekstremumų nėra
$a > 1$ didėja aibėje **R**	$a > 1$ didėja apibrėžimo srityje $D(y)$
$0 < a < 1$ mažėja aibėje **R**	$0 < a < 1$ mažėja apibrėžimo srityje $D(y)$
$e = 2{,}7182818284590 45... \approx 2{,}7$ – natūraliojo logaritmo pagrindas ($\log_e x = \ln x$)	
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$d < c < 1 < a < b$	$a < b < 1 < c < d$

Trigonometrinės funkcijos

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
$D(y)$	**R**	**R**	$(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$ $k \in \mathbf{Z}$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	**R**

7. Elementariosios funkcijos

Trigonometrinės funkcijos (tęsinys)			
Monotoniškumo intervalų be galo daug	Mažėja intervaluose $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$; didėja intervaluose $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$	Mažėja intervaluose $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$; didėja intervaluose $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$	Didėja kiekviename intervale, kuriame funkcija yra tolydi $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$
Minimumo taškai	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$	nėra
Maksimumo taškai	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi k$	nėra
Minimumai	-1	-1	nėra
Maksimumai	1	1	nėra
Nuliai	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \pi k$
Pastovaus ženklo intervalai ($y > 0$)	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$	$(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$
Pastovaus ženklo intervalai ($y < 0$)	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$	$(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$
Periodas	2π	2π	π
Lyginumas	Nelyginė $\sin(-x) = -\sin x$	Lyginė $\cos(-x) = \cos x$	Nelyginė $\tan(-x) = -\tan x$
Asimptotės	nėra	nėra	Vertikaliosios $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
Išvestinės	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Grafikai			

7. Elementariosios funkcijos

Atvirkštinės trigonometrinės funkcijos			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctan x$
$D(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	**R**
$E(y)$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
Monotoniškumas	Didėja apibrėžimo srityje $D(y)$	Mažėja apibrėžimo srityje $D(y)$	Didėja apibrėžimo srityje $D(y)$
Lyginumas	Nelyginė	–	Nelyginė
Išvestinės	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$	$\frac{1}{1+x^2}$
Grafikai			

8. Funkcijų grafikų braižymas taikant transformacijas

$f(x + a)$	Grafiko $y = f(x)$ postūmis vektoriumi $\bar{p}$ $(-a; 0)$	$\bar{p}$ $(-2; 0)$
$f(x) + b$	Grafiko $y = f(x)$ postūmis vektoriumi $\bar{p}$ $(0; b)$	$\bar{p}$ $(0; -1)$
$-f(x)$	Simetrija abscisių ašies atžvilgiu	

8. Funkcijų grafikų braižymas taikant transformacijas

$f(-x)$	Simetriškumas ordinačių ašies atžvilgiu	
$\|f(x)\|$	Grafiko dalis, esanti viršutinėje pusplokštumėje ir abscisių ašyje, lieka nepakeista, o grafiko dalis, esanti apatinėje pusplokštumėje, simetriškai atvaizduojama ašies $0x$ atžvilgiu	
$f(\|x\|)$	Grafiko dalis, esanti dešinėje pusplokštumėje ir ordinačių ašyje, lieka nepakeista, o vietoj grafiko dalies, esančios kairėje pusplokštumėje – simetriškas dešiniosios atvaizdis ašies $0y$ atžvilgiu	
$f(kx)$ $(k>0)$	Kai $k>1$, grafiką spaudžiame iki taško $(0;\ 0)$ išilgai abscisių ašies k kartų; kai $0<k<1$, tempiame nuo taško $(0;\ 0)$ išilgai abscisių ašies $1/k$ kartų	
$kf(x)$ $(k>0)$	Kai $k>1$, grafiką tempiame nuo taško $(0;\ 0)$ išilgai ordinačių ašies k kartų; kai $0<k<1$, spaudžiame iki taško $(0;\ 0)$ išilgai ordinačių ašies $1/k$ kartų	

9. Dviejų kintamųjų lygties grafikas

$ax + by = c$	Tiesė	
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Apskritimas, kurio centras $(a; b)$, spindulys R	
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$	Pusapskritimis, kurio centras (0; 0), spindulys a	
$y = ax^2 + bx + c$	Parabolė $y = ax^2$; kai $a > 0$, parabolės šakos nukreiptos į viršų, kai $a < 0$, – į apačią; viršūnė $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$	
$x = ay^2 + by + c$	Parabolė $x = ay^2$; kai $a > 0$ parabolės šakos nukreiptos į dešinę, kai $a < 0$, – į kairę; viršūnė $y_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = x(y_0)$	
$(x-a)(y-b) = k$ $k \neq 0$	Hiperbolė $y = \frac{k}{x}$; asimptotės $x = a$; $y = b$	

9. Dviejų kintamųjų lygties grafikas

$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert = 1$	Kvadratas	y 1 −1 0 1 x −1
$\dfrac{\lvert x-a \rvert}{m} + \dfrac{\lvert y-b \rvert}{n} = 1$ $m > 0,\ n > 0$	Rombas	y m b n a 0 x
$\lvert x \rvert - \lvert y \rvert = 1$	Sankirta	y −1 0 1 x
Jeigu duotas lygties $F(x; y) = 0$ grafikas, tai lygties $F(x - a; y - b) = 0$ grafiką gauname pastumdami duotojo grafiko visus taškus per vektorių $\bar{p}\,(a; b)$; $F(\lvert x \rvert; y) = 0$ grafiką gauname palikdami nepakeistą grafiko dalį dešinėje pusplokštumėje ir ordinačių ašyje, o kairėje pusplokštumėje brėžiame grafiką, simetrišką dešiniajam ašies $0y$ atžvilgiu; $F(x; \lvert y \rvert) = 0$ grafiką galima gauti paliekant nepakeistą grafiko dalį viršutinėje pusplokštumėje ir abscisių ašyje, o apatinėje pusplokštumėje brėžiame grafiką, simetrišką viršutinei daliai ašies $0x$ atžvilgiu		

10. Kvadratinis trinaris

Kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ – tai antrojo laipsnio daugianaris; $a \neq 0$ – pirmasis koeficientas; b – antrasis koeficientas; c – laisvasis narys	Funkcijos $F(x) = ax^2 + bx + c$ grafikas – parabolė; viršūnės koordinatės $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = F(x_0) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{D}{4a}$
Pilnojo kvadrato išskyrimas: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$	$D = b^2 - 4ac$ – kvadratinio trinario *diskriminantas*

10. Kvadratinis trinaris

Kvadratinio trinario šaknys

$D < 0$	Kvadratinis trinaris *neturi šaknų* ir su visomis x reikšmėmis yra to paties ženklo, kaip ir pirmasis koeficientas: $a \cdot F(x) > 0$
$D = 0$	Kvadratinis trinaris *turi vieną šaknį* (dvi lygias šaknis) $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Yra du intervalai, kuriuose funkcija *F(x)* yra to paties ženklo, kaip ir pirmasis koeficientas: $aF(x) > 0$ $(x \neq x_0)$. Parabolė liečia abscisių ašį viršūnės taške
$D > 0$	Kvadratinis trinaris *turi dvi šaknis:* $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Yra trys intervalai, kuriuose funkcijos *F(x)* ženklas nesikeičia

Vieto (Viète) teorema

Jeigu kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ (kvadratinė lygtis $ax^2 + bx + c = 0$) turi šaknis x_1 ir x_2 (t.y. $D \geq 0$), tai

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Redukuotosios ($a = 1$) kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Atvirkštinė teorema: jei $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$ ir $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{c}{a}$, tai t_1 ir t_2 yra kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ (kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$) šaknys

Pavyzdys. Kvadratinės lygties $x^2 - (5 + \sqrt{7})x + 5\sqrt{7} = 0$ šaknys yra $x = 5$; $x = \sqrt{7}$

Kvadratinio trinario skaidymas dauginamaisiais

$D < 0$	Kvadratinio trinario išskaidyti dauginamaisiais negalima
$D > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$D = 0$	$ax^2 + bx + c = a\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2$

10. Kvadratinis trinaris

Kvadratinių trinarių, kurių šaknys t_1 ir t_2, sudarymas	
Egzistuoja be galo daug kvadratinių trinarių $a(x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 \cdot t_2)$, kurių šaknys yra t_1 ir t_2, tarp jų vienintelis redukuotasis: $x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 \cdot t_2$	*Pavyzdys.* Redukuotasis kvadratinis trinaris $x^2 - 10x + 16$, kurio šaknys 2 ir 8, nes $2 + 8 = 10$, $2 \cdot 8 = 16$

Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknys			
teigiamos, kai	neigiamos, kai	to paties ženklo, kai	skirtingų ženklų, kai
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$

11. Progresijos

Seka – tai funkcija, kurios argumentas yra natūralusis skaičius	
Seka gali būti išreikšta *bendrojo nario formule*	$a_n = f(n),\ n \in \mathbf{N}$ $a_n = n^2 + n + 41$ $a_1 = 43;\quad a_2 = 47;\quad a_3 = 53;\ \ldots$
Seka gali būti išreikšta *rekurentiniu būdu*	Duota: $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{n-1}$ $a_n = f(a_{n-1};\ a_{n-2};\ \ldots;\ a_1)$
Fibonačio (*Fibonacci*) *skaičiai*: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ... . $(a_1 = a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1})$ Bendrojo nario formulė: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ Savybės: $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} = a_{2n+2}$; $\quad a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$	
Aritmetine progresija vadinama seka, apibrėžta rekurentine formule: $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in \mathbf{N}$ (a_1 – pirmasis progresijos narys, d – progresijos skirtumas)	*Geometrine progresija* vadinama seka, apibrėžta rekurentine formule: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($b_1 \neq 0$ – pirmasis progresijos narys; $q \neq 0$ – progresijos vardiklis)

11. Progresija

	Aritmetinė (÷)	**Geometrinė** (∺)
Galimos reikšmės	a_1 ir d – bet kokia	b_1 ir q nelygūs nuliui
Bendrojo nario formulė	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Charakteristinė savybė	$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = a_n$	$b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2$ $b_n \neq 0$
Pirmųjų n narių sumos formulė	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	$q \neq 1,\ S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $q = 1,\ S_n = n \cdot b_1$
Kitos formulės	$\frac{a_n - a_m}{n-m} = d,\ (n \neq m)$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}$	$b_n : b_m = q^{n-m}$ $b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$

Nykstamoji geometrinė progresija $(0 < |q| < 1)$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0, \quad S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$$

Sumos formulė: $\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$

Pavyzdžiai

$0,(37) = 0,37 + 0,0037 + \ldots = \frac{0,37}{1-0,01} = \frac{37}{99}$

$(b_1 = 0,37;\ q = 0,01)$

$0,5(2) = 0,5 + 0,02 + 0,002 + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{0,02}{1-0,1} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{90} = \frac{47}{90}$ $(b_1 = 0,02;\ q = 0,1)$

Sumavimas

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Pavyzdžiai

Jeigu a_n aritmetinė progresija, tai

$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} =$

$= \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}$

Natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 7 su liekana 5, sudaro aritmetinę progresiją $a_n = 7(n-1) + 5 = 7n - 2,\ n \in \mathbf{N}$

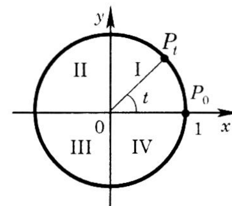
12. Trigonometrinis apskritimas

Apskritimas, kurio centras yra koordinačių pradžios taške, o spindulys lygus 1, vadinamas trigonometriniu (vienetiniu) apskritimu. Vienetinio apskritimo taškus atitinka realieji skaičiai. Skaičių 0 atitinka taškas $P_0(1;\,0)$, o kiekvieną skaičių t atitinka taškas (P_t), gautas transformuojant tašką $P_0(1;\,0)$ posūkiu apie koordinačių pradžios tašką kampu t (jei $t > 0$, tai sukama prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį, jei $t < 0$ – laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi).
Tokiu būdu *kiekvieną realųjį skaičių t atitinka vienintelis vienetinio apskritimo taškas* (P_t) ir kiekvieną tašką (P_t) – begalinė seka realiųjų skaičių $t + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Lanko ilgis $\overset{\frown}{P_0P_t} = t\ (0 < t \leq 2\pi)$

I ketvirtis: $0 + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

II ketvirtis: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k$



III ketvirtis: $\pi + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

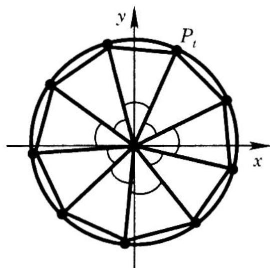
IV ketvirtis: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < t < 2\pi + 2\pi k$

Priklausa tarp to paties kampo laipsnių ir radianų: $\alpha^\circ = \pi \cdot \left(\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\right)$ (radianų); x (radianų) $= \left(\frac{x}{\pi} \cdot 180\right)^\circ$

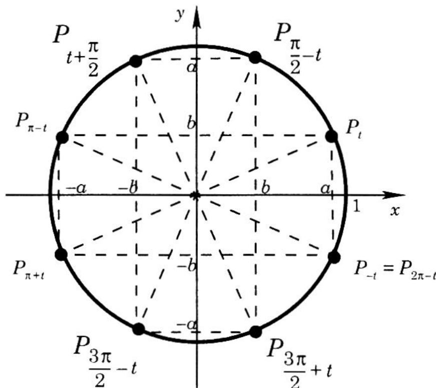
Du taškai, simetriški atžvilgiu:

abscisių ašies	ordinačių ašies	koordinačių pradžios taško
P_t, P_{-t}	$P_{\pi-t}$, P_t	P_t, $P_{t+\pi}$
$\alpha = \pm t + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$	$\alpha = (-1)^n t + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\alpha = t + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į vienetinį apskritimą, viršūnės (viena iš viršūnių P_t).



$\alpha = t + \frac{2\pi}{n} \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$

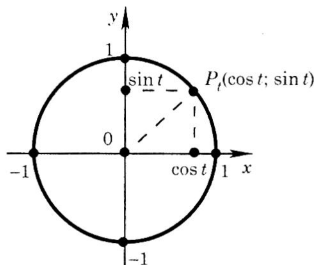


$P_t\,(a;\,b)$ $P_{t+\frac{\pi}{2}}\,(-b;\,a)$ $P_{\pi+t}\,(-a;\,-b)$ $P_{\frac{3\pi}{2}+t}\,(b;\,-a)$

$P_{\frac{\pi}{2}-t}\,(b;\,a)$ $P_{\pi-t}\,(-a;\,b)$ $P_{\frac{3\pi}{2}-t}\,(-b;\,-a)$ $P_{-t}\,(a;\,-b)$

13. Trigonometrinės funkcijos

Skaičiaus t *kosinusu* vadinama vienetinio apskritimo taško (P_t) abscisė, o *sinusu* – šio taško ordinatė



Skaičiaus t *tangentu* vadinamas sin t ir cos t santykis (cos $t \neq 0$):

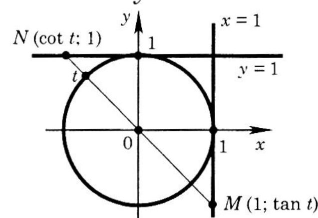
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Tangentų ašis – tiesė x = 1.

Skaičiaus t *kotangentu* vadinamas cos t ir sin t santykis:

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \qquad (\sin t \neq 0)$$

Kotangentų ašis – tiesė $y = 1$.



Pagrindinės formulės

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1,\ t \in \mathbf{R}$

$\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t},\ t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t},\ t \neq \pi l,\ l \in \mathbf{Z}$

Papildomos formulės

$1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t},\ t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$

$1 + \cot^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t},\ t \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$\tan t \cdot \cot t = 1,\ t \neq \dfrac{\pi l}{2},\ l \in \mathbf{Z}$

Taikant **redukcijos formules** skaičių $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ trigonometrines funkcijas pakeičiame skaičiaus $\alpha \in \mathbf{R}$ trigonometrinėmis funkcijomis (patogumo dėlei α – pirmojo ketvirčio kampas)

t	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
cos t	−cos α	−cos α	sin α	−sin α	−sin α	sin α
sin t	sin α	−sin α	cos α	cos α	−cos α	−cos α
tan t	−tan α	tan α	cot α	−cot α	cot α	−cot α

Periodiškumas		Lyginumas
$\cos(t + 2\pi) = \cos t$ $T_{\cos} = 2\pi$	$\tan(t + \pi) = \tan t$ $T_{\tan} = \pi$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(t + 2\pi) = \sin t$ $T_{\sin} = 2\pi$	$\cot(t + \pi) = \cot t$ $T_{\cot} = \pi$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

13. Trigonometrinės funkcijos

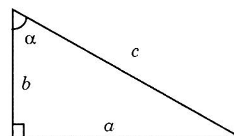
Kai kurių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmės

α, radianais	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	neegz.	0	neegz.
$\cot\alpha$	neegz.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	neegz.	0

Stačiojo trikampio trigonometrinės funkcijos

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a}$

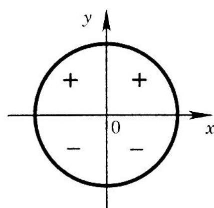
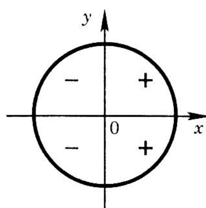
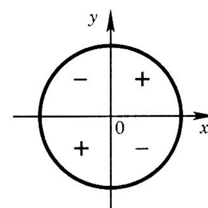


Kai kurių kampų trigonometrinių funkcijų apytikslės reikšmės

α°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	
$\sin\alpha \approx$	0,09	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1,00	$\approx \cos\alpha$
$\tan\alpha \approx$	0,09	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	11,43	$\approx \cot\alpha$
	85°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	5°	α°

Mažų teigiamų skaičių $\sin\alpha \approx \alpha$ ir $\tan\alpha \approx \alpha$

Trigonometrinių funkcijų ženklai ketvirčiuose

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$ ir $\cot\alpha$
		

13. Trigonometrinės funkcijos

Skaičiaus (kampo) α trigonometrinių funkcijų reikšmių apskaičiavimo būdai	
Naudojant formules	*Naudojant trikampį*
$\cos\alpha = -0{,}6$; II ketvirtis	$\tan\alpha = 3$; III ketvirtis
$\lvert\sin\alpha\rvert = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$ $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0{,}8$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{4}{3}$ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{3}{4}$	$\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\cot\alpha > 0 \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{3}$
$\cot\alpha = -\dfrac{5}{12}$; IV ketvirtis	$\sin\alpha = 0{,}1$; I ketvirtis
$\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{169}{144}$ $\lvert\sin\alpha\rvert = \dfrac{12}{13}$ $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ $\lvert\cos\alpha\rvert = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{144}{169}} = \dfrac{5}{13}$ $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = -\dfrac{12}{5}$	$\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{99}}{10}$ $\tan\alpha > 0 \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{99}}$ $\cot\alpha > 0 \Rightarrow \cot\alpha = \sqrt{99}$

Sudėties formulės	**Dvigubo kampo formulės**
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n;$ $y \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ x+y \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y},\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n;$ $y \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ x-y \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x};$ $x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

13. Trigonometrinės funkcijos

Laipsnio žeminimo formulės	Papildomos formulės
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$	$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
Pusės kampo formulės	**Bendrasis keitinys**
$\lvert \cos \frac{x}{2} \rvert = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ $\lvert \sin \frac{x}{2} \rvert = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$; $x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	$\cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Keitimo formulės

Sumos keitimas sandauga	*Sandaugos keitimas suma*
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$ $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$ $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$ $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ $\cot x + \cot y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \cdot \sin y}$ $\cot x - \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$	$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

Pagalbinio kampo formulės

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(x - \alpha)$, čia $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2 + b^2 \neq 0$

14. Logaritmai

Teigiamojo skaičiaus a *logaritmu* teigiamu ir nelygiu vienetui pagrindu b vadinamas laipsnio rodiklis, kuriuo reikia pakelti pagrindą b norint gauti skaičių a

$\log_b a = c$ ($a > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$) tada ir tik tada, kai $b^c = a$

Pagrindinė logaritmų tapatybė:

$b^{\log_b a} = a$

Pavyzdžiai

$5^{\log_5 7} = 7$

$2^{\log_2 0,7} = 0,7$

$8^{\log_2 3} = (2^3)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^3 = 3^3 = 27$

$\log_2 8 = 3$, nes $2^3 = 8$

$\log_9 27 = 1,5$, nes $9^{\frac{3}{2}} = 27$

$\log_{0,25} 16 = -2$, nes $0,25^{-2} = 16$

$\log_{25} \sqrt{5} = 0,25$, nes $25^{0,25} = \sqrt{5}$

$\log_9 (-7)$ neapibrėžtas, nes $-7 < 0$;

$\log_{(-2)} (-8)$ neapibrėžtas, nes $-2 < 0$, $-8 < 0$;

$\log_1 27$ neapibrėžtas, nes netenkinama sąlyga $b \neq 1$.

Logaritmas, kurio pagrindas 10, vadinamas *dešimtainiu logaritmu:* $\log_{10} a = \lg a$

Pavyzdžiai:

$\lg 100 = 2$; $\lg 0,0001 = -4$; $\lg 100000000 = 8$;

$3 < \lg 2156 < 4$; $-1 < \lg 0,56 < 0$.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg a \approx$	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95

Logaritmas, kurio pagrindas e, vadinamas *natūraliuoju logaritmu*: $\log_e a = \ln a$

$e = 2,718281828459045...$ iracionalusis skaičius; $e \approx 2,7$

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
$\ln a \approx$	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30	4,61	6,91

Logaritmų savybės

$\log_a 1 = 0$

$\log_a \frac{1}{a} = -1$

$\log_a a = 1$

$\log_{a^m} a = \frac{1}{m}$

$\log_a a^m = m$

$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$

Pagrindinės sąsajos

Sandaugos logaritmas:

$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$

Dalmens logaritmas:

$\log_c (a/b) = \log_c a - \log_c b$

Laipsnio logaritmas:

$\log_c a^k = k \log_c a$

Pagrindo keitimo formulė:

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Papildomos sąsajos

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$

$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$

$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$

14. Logaritmai

Pavyzdžiai

$5^{\frac{1}{\log_6 5}} = 5^{\log_5 6} = 6.$ $\sqrt{\log_5 49 \cdot \log_7 25} = \sqrt{\log_7 49 \cdot \log_5 25} =$ $= \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$	Palyginti $4^{\log_3 7}$ ir $6^{\log_3 4}$. Kadangi $6^{\log_3 4} = 4^{\log_3 6}$ ir $\log_3 7 > \log_3 6$, tai $4^{\log_3 7} > 6^{\log_3 4}$.

Logaritmų palyginimas

Jeigu $0 < a < 1$ ir $0 < x_1 < x_2$, tai $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (nelygybės ženklas keičiasi) Jeigu $a > 1$ ir $0 < x_1 < x_2$, tai $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (nelygybės ženklas nesikeičia)	Jeigu $1 < a < b$ ir $x > 1$, tai $\log_a x > \log_b x$ Jeigu $0 < a < b < 1$ir $x > 1$, tai $\log_a x > \log_b x$ Jeigu $1 < a < b$ ir $0 < x < 1$, tai $\log_a x < \log_b x$ Jeigu $0 < a < b < 1$ir $0 < x < 1$, tai $\log_a x < \log_b x$
$\log_b a > 0$ tada ir tik tada, kai teigiami skaičiai a ir b yra toje pačioje pusėje nuo vieneto; $a > 0$; $b > 0$ ir $(a-1)(b-1) > 0$	$\log_b a < 0$ tada ir tik tada, kai teigiami skaičiai a ir b yra skirtingose vieneto pusėse; $a > 0$; $b > 0$ ir $(a-1)(b-1) < 0$

Pavyzdžiai

$\log_{0,7} 0,2 < \log_{0,7} 0,11$	$\log_6 2 < \log_6 11$	$\log_5 7 > \log_8 7$
$\log_{0,2} 7 > \log_{0,8} 7$	$\log_4 5 < \log_3 5 < \log_3 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_4 5 < \log_3 6$	

Palyginti $\log_4 15$ ir $\sqrt{17}$.

Kadangi $\log_4 15 < 4$, o $\sqrt{17} > 4$, tai $\log_4 15 < \sqrt{17}$.

Palyginti $\log_3 4$ ir $\log_4 5$.

I būdas.
$\log_3 4 \quad ? \quad \log_4 5$
$\log_3 4 - 1 \quad ? \quad \log_4 5 - 1$
$\log_3 \frac{4}{3} \quad ? \quad \log_4 \frac{5}{4}$

Kadangi $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$, tai $\log_3 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{5}{4} > \log_4 \frac{5}{4}$,
t. y. $\log_3 4 > \log_4 5$.

II būdas. Išnagrinėsime funkciją

$f(x) = \log_x (x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, kai $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{x \cdot \ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2} < 0,$$

kai $x > 1$.

Vadinasi, $\log_3 4 > \log_4 5$, nes funkcija $f(x)$ mažėjanti.

15. Lygtys

Kintamojo reikšmė, su kuria yra teisinga lygybė, vadinama *lygties šaknimi*	Lygtys vadinamos *ekvivalenčiosiomis*, jeigu jų šaknų aibės sutampa
Pavyzdžiai $x^3 + x = 0$ – viena šaknis: $x = 0$. $(x^2 + x - 12) \cdot \sqrt{x+3} = 0$ – dvi šaknys: $x = -3$, $x = 3$. $\sin(\pi x) = 0$ – be galo daug šaknų $x \in \mathbf{Z}$. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ – teisinga visiems $x \in \mathbf{R}$. $x^2 = x^2 + 1$ – šaknų nėra (šaknų aibė tuščia $\varnothing$).	*Pavyzdžiai* $x^2 = x + 2$ ir $x^2 - x - 2 = 0$ ekvivalenčios. $x^4 + 2 = -16$ ir $\sin 3x = 2$ ekvivalenčios. $\sqrt{x} = 2x - 6$ ir $x = (2x - 6)^2$ neekvivalenčios.

Atlikę neekvivalenčiuosius keitinius galime:

prarasti šaknis		*gauti „pašalines“ šaknis*	
$x(x + 5) = 2x$, $x + 5 = 2$, $x = -3$. Prarandama šaknis $x = 0$.	teisingas sprendimas: $x^2 + 5x - 2x = 0$, $x^2 + 3x = 0$, $x(x + 3) = 0$, $x = 0$; $x = -3$.	$\frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$, $x^2 + x - 1 = 4x - 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = 1$ ir $x = 2$. „Pašalinė“ šaknis $x = 1$.	teisingas sprendimas: $\begin{cases} x^2+x-1 = 4x-3 \\ x \neq 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-3x+2 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$, *Atsakymas*: $x = 2$.

Lygčių sprendimo būdai

Skaidymas dauginamaisiais

Keleto dauginamųjų sandauga lygi nuliui, jeigu bent vienas jų yra nulis, o likusieji egzistuoja.

$$(x-1)(x^2-4)\cdot\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \\ x = 0 \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Atsakymas: 0; 1; 2.

Kintamojo pakeitimas

$$(x+1)^4 + x^2 = 1 - 2x \Leftrightarrow (x+1)^4 + (x^2 + 2x + 1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = (x+1)^2 \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Abiejų pusių palyginimas

$$\sin^7 x - \cos^{22} x = 1 \Leftrightarrow \sin^7 x = 1 + \cos^{22} x,$$

$$\left(\begin{array}{l} \sin^7 x \leq 1 \\ 1 + \cos^{22} x \geq 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin^7 x = 1 \\ \cos^{22} x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

15. Lygtys

Monotoniškumo panaudojimas

$2^x + 5^x = 29$. Funkcija $f(x) = 2^x + 5^x$ didėja; $f(2) = 29 \Rightarrow x = 2$ – vienintelė šaknis.

Homogeniškumo panaudojimas

$3(x+8)^2 - 4(x+8)(x^2+2x+2) + (x^2+2x+2)^2 = 0$. Tarkime, kad $x + 8 = a$; $x^2 + 2x + 2 = b$.

Tuomet $3a^2 - 4ab + b^2 = 0$, $a_{1,2} = \frac{2b \pm b}{3}$; $a = b$ arba $a = \frac{b}{3}$.

$x + 8 = x^2 + 2x + 2$, $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.	$3x + 24 = x^2 + 2x + 2$, $x^2 - x - 22 = 0$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{89}}{2}$.	*Atsakymas*: -3; 2; $\frac{1-\sqrt{89}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{89}}{2}$.

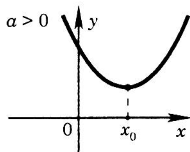
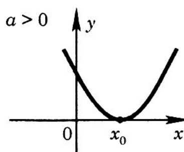
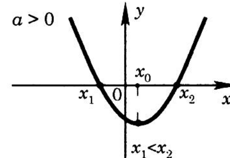
Tiesinė lygtis (suvedama į pavidalą $ax = b$)

$a \neq 0$	$a = b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
viena šaknis $x = \frac{b}{a}$	be galo daug šaknų $x \in \mathbf{R}$	šaknų nėra

Kvadratinė lygtis (suvedama į pavidalą $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$)

Atlikus ekvivalenčiuosius keitinius, lygtis užrašoma šitokiu pavidalu: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Ar lygtis turi šaknų, priklauso nuo reiškinio (kvadratinės lygties *diskriminanto*) $D = b^2 - 4ac$ ženklo

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$ dvi šaknys
šaknų nėra	viena šaknis $x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$; $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
		

Kvadratinės lygties šaknų formulės

Redukuotoji kvadratinė lygtis $x^2 + px + q = 0$ $(a = 1)$	Kvadratinė lygtis, *kurios antrasis koeficientas yra lyginis skaičius* $ax^2 + 2kx + c = 0$ $(b = 2k)$
Jeigu $D > 0$, $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$; jeigu $D = 0$, $x = -\frac{p}{2}$	$D^* = k^2 - ac$ $(D^* = \frac{1}{4}D)$ Jeigu $D^* > 0$, $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D^*}}{a}$; jeigu $D^* = 0$, $x = -\frac{k}{a}$

15. Lygtys

Nepilna kvadratinė lygtis

$ax^2 + c = 0 \quad (b = 0)$	$ax^2 + bx = 0 \quad (c = 0)$	$ax^2 = 0$
Jeigu $ac > 0$, sprendinių nėra; jeigu $ac < 0$, $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x(ax + b) = 0$ dvi šaknys: $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$	viena šaknis $x = 0$

Aukštesniojo laipsnio algebrinės lygtys

(suvedamos į pavidalą $f(x) = 0$, čia $f(x)$ – daugianaris, kurio laipsnis aukštesnis už 2)

Skaidymas dauginamaisiais

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$,

$x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$,

$(x - 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = \pm 1$.

Keitinys (bikvadratinė lygtis)

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0;\ x^2 = t$.

$t^2 - 3t + 2 = 0$,

$t = 1;\ t = 2 \Rightarrow x = \pm 1;\ x = \pm\sqrt{2}$.

Hornerio schemos taikymas

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

	1	–4	1	6	
–1	1	–5	6	0	$\Rightarrow x = -1$
2	1	–3	0		$\Rightarrow x = 2$
3	1	0			$\Rightarrow x = 3$

Monotoniškumo panaudojimas

$x^3 + x - 6\sqrt{5} = 0$,

$x^3 + x = 6\sqrt{5}$.

Funkcija $F(x) = x^3 + x$ didėja intervale **R**;

$F(\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} \Rightarrow$

$x = \sqrt{5}$ – vienintelė šaknis.

Sangrąžinė lygtis

$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

Kadangi $x = 0$ nėra šaknis, galima dalyti iš x^2.

$2x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$,

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$.

Pritaikius keitinį: $y = x + \frac{1}{x}$; $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

$2(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0$,

$2y^2 - 5y + 2 = 0$.

Homogeniškumo panaudojimas

$3x^2 + 4x(x^2 + 3x + 4) + (x^2 + 3x + 4)^2 = 0$

Tarkime, kad $y = x^2 + 3x + 4$.

Tuomet $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$.

Sprendžiame x atžvilgiu: $x = -y;\ x = -\frac{1}{3}y$.

Taigi $\left[\begin{array}{l} x = -x^2 - 3x - 4 \\ 3x = -x^2 - 3x - 4 \end{array}\right.$.

Atsakymas: $-2;\ -3 \pm \sqrt{5}$.

Lygtis $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

Lygtis $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

Nelygybes sistemose paprastai tikriname, o ne sprendžiame.

15. Lygtys

Iracionaliosios lygtys

Paprasčiausios	$\sqrt{3x+1} = 2$, $3x + 1 = 4$, $x = 1$.	$\sqrt{1-2x} = -5$, šaknų nėra

Abiejų lygties pusių kėlimas laipsniu

$$\sqrt{5x+6} + \sqrt{3x+4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \ge 0;\ 3x+4 \ge 0 \\ 5x+6+3x+4+ \\ +2\sqrt{(5x+6)(3x+4)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \ge 0 \\ \sqrt{(5x+6)(3x+4)} = -4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \ge 0;\ -4x-3 \ge 0 \\ (5x+6)(3x+4) = (-4x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Kintamojo pakeitimas

$\sqrt{2-x} = 3x + 8$

Tarkime, kad $y = \sqrt{2-x} \ge 0$.

Tuomet $x = 2 - y^2$ ir $y = 3(2 - y^2) + 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ 3y^2 + y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2 \Leftrightarrow x = -2.$

Lygtys su laipsnine funkcija

$$\begin{cases} 5x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$y = x^{1/3} \ge 0$,

$5y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 1;\ y = -\frac{6}{5} < 0$,

$x^{1/3} = 1 \Rightarrow x = 1$.

$5\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$,

$y = \sqrt[3]{x} \in \mathbf{R}$,

$5y^2 + y - 6 = 0$,

$y = \sqrt[3]{x} = 1,\ y = \sqrt[3]{x} = -\frac{6}{5}$,

$x = -\left(\frac{6}{5}\right)^3 = -\frac{216}{125}$.

Atsakymas: $x = 1;\ x = -\frac{216}{125}$.

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = 4$,

$x^2 = 4$,

$x = \pm 2$.

Atsakymas: $x = 2$.

Rodiklinės lygtys

Paprasčiausių rodiklinių lygčių sprendimas pagrįstas rodiklinės funkcijos $y = a^x$ ($a > 0$, $a \ne 1$, $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = (0; +\infty)$) monotoniškumu

Paprasčiausia rodiklinė lygtis $a^x = b$, kai $b > 0$, turi vienintelį sprendinį $x = \log_a b$.
Kai $b \le 0$, sprendinių nėra

$6^x = 36$, $x = \log_6 36$, $x = 2$.	$2^x = \frac{1}{8}$, $x = \log_2 (1/8)$, $x = -3$.	$100^x = 10$, $x = \log_{100} 10$, $x = 0{,}5$.	$10^x = 3$, $x = \lg 3$.	$e^x = 2$, $x = \ln 2$.	$625^x = -25$, sprendinių nėra

Lygtys $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ekvivalenčios lygčiai $f(x) = g(x)$

15. Lygtys

Rodiklinių lygčių sprendimo būdai

Suvienodinant pagrindus

$5^x \cdot 0{,}2 = 125^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{5}$,

$5^x \cdot 5^{-1} = 5^{\frac{3x}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$,

$5^{x-1} = 5^{\frac{3x+1}{2}}$,

$x - 1 = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow x = -3$.

Logaritmuojant abi lygties puses

$6^{1/x} \cdot 2^x = 12$.

Logaritmuojame pagrindu 2:

$\frac{1}{x}\log_2 6 + x = \log_2 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \log_2 3 + x^2 = (2 + \log_2 3)x$

$x^2 - (2 + \log_2 3)x + (1 + \log_2 3) = 0$.

Atsakymas: $x = 1$; $x = 1 + \log_2 3$.

Iškeliant už skliaustų bendrą daugiklį

$7^x + 7^{x+2} = 350$,

$7^x(1 + 7^2) = 350$,

$7^x = \frac{350}{1+7^2} = 7$,

$x = 1$.

Sudarant santykį

$4^x + 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^{x+2}$,

$4^x - 4^{x-1} = 3^{x+2} - 3^{x-1}$,

$4^{x-1}(4 - 1) = 3^{x-1}(3^3 - 1)$,

$4^{x-1} \cdot 3 = 3^{x-1} \cdot 26$,

$\frac{4^{x-1}}{3^{x-1}} = \frac{26}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{26}{3}$ $\quad x = \log_{\frac{4}{3}}\frac{26}{3} + 1$.

Pakeičiant kintamąjį

$25^x + 5^{x+1} - 6 = 0$,

$5^x = y > 0$,

$y^2 + 5y - 6 = 0$,

$y = 1$; $y = -6 < 0$,

$5^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

„Paslėptas" atvirkštinis skaičius

$(\sqrt{5} - 2)^x + (\sqrt{5} + 2)^x = 18$,

$(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$.

Tarkime, kad $(\sqrt{5} - 2)^x = y > 0$,

$y + \frac{1}{y} = 18 \Rightarrow y = 9 \pm 4\sqrt{5}$,

$(\sqrt{5} - 2)^x = 9 - 4\sqrt{5} =$

$= (\sqrt{5} - 2)^2 \Rightarrow x = 2$

$(\sqrt{5} - 2)^x = 9 + 4\sqrt{5} =$

$= (\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5} - 2)^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Atsakymas: 2; –2.

Homogeniškumo panaudojimas

$3 \cdot 16^x - 12^x = 4 \cdot 9^x$.

Dalijame iš $9^x > 0$:

$3 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^x - \left(\frac{12}{9}\right)^x = 4$

$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 4 = 0$

Tarkime, kad $\left(\frac{4}{3}\right)^x = y > 0 \Rightarrow$

$3y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{4}{3}$; $y = -1 < 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 1$.

Monotoniškumo panaudojimas

$2^x + 5^x = 29$.

$f(x) = 2^x + 5^x$ didėja intervale **R**. $f(2) = 29 \Rightarrow x = 2$ – vienintelė šaknis.

Logaritminės lygtys

Paprasčiausių logaritminių lygčių sprendimas pagrįstas logaritminės funkcijos

$$y = \log_a x \ (a > 0;\ a \neq 1;\ D(y) = (0; +\infty);\quad E(y) = \mathbf{R})$$

monotoniškumu

15. Lygtys

Paprasčiausios logaritminės lygtys

1) $\log_a x = b$ visoms galimoms a reikšmėms turi vienintelį sprendinį $x = a^b$
2) $\log_a (f(x)) = b$ ekvivalenti lygčiai $f(x) = a^b$
3) $\log_a (f(x)) = g(x)$ ekvivalenti lygčiai $f(x) = a^{g(x)}$
4) $\log_a (f(x)) = \log_a (g(x))$ ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Be to, bet kurios iš dviejų paskutinių nelygybių galima (ir, paprastai, reikia) nerašyti

Sprendžiant logaritmines lygtis, paprastai, nebūtina rasti lygties funkcijų egzistavimo sričių. Pakanka patikrinti, ar gautos sistemos lygčių šaknys tenkina sistemos nelygybes

Lygtys, pertvarkomos į 4 tipo lygtis

$$\log_2 (x^2 + x - 2) = 1 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 (x^2 + x - 2) = \log_2 (2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 2x \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Kintamojo pakeitimas

$\lg^2\left(\frac{10}{x}\right) + \lg x = 7,$

$(\lg 10 - \lg x)^2 + \lg x = 7,$

$y = \lg x \Rightarrow (1 - y)^2 + y = 7 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 3 \\ \lg x = -2 \end{array} \right. .$$

Atsakymas: $x = 1000$; $x = 0{,}01$.

Lygčių, pertvarkomų į 4 tipo lygtis, potencijavimas

$$\log_{\frac{1}{3}} (x + 1) + \log_3 \left(\frac{x}{2}\right) = 2 - 2\log_{\frac{1}{9}} (x^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} -$$

$$- \log_{\frac{1}{3}} (x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{2(x+1)}{x} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{2(x+1)}{x} = \frac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11} - 3}{6}.$$

Lygtis, kurios kintamasis yra logaritmo pagrinde

$\log_x 5 = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}.$$

Atsakymas: $\sqrt[3]{5}$.

$$\log_{x^2} x = 0{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x > 0 \\ (x^2)^{0,5} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ |x| = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Atsakymas: $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

$\log_{(-x)} 25 = -2$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ (-x)^{-2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 = \frac{1}{25} \end{cases}.$$

Atsakymas: $x = -\frac{1}{5}$.

Trigonometrinės lygtys

$\sin x = a$		$\cos x = a$	
$\lvert a \rvert > 1$	$\lvert a \rvert \le 1$	$\lvert a \rvert > 1$	$\lvert a \rvert \le 1$
sprendinių nėra	y; $\pi - \arcsin a$; a; $\arcsin a$; 0; 1; x $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	sprendinių nėra	y; $\arccos a$; 0; a; 1; x; $-\arccos a$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Kai $\lvert a \rvert \le 1$:

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin a) = a$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$

Kai $\lvert a \rvert \le 1$:

$0 \le \arccos a \le \pi$

$\cos(\arccos a) = a$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\tan x = a$	$\cot x = a$
$x = \arctan a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ y; a; $\arctan a$; 0; 1; x; $\pi + \arctan a$	$x = \operatorname{arccot} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ y; 1; a; $\operatorname{arccot} a$; 0; 1; x; $\pi + \operatorname{arccot} a$

Bet kuriam a:

$-\frac{\pi}{2} < \arctan a < \frac{\pi}{2}$

$\tan(\arctan a) = a$

$\arctan(-a) = -\arctan a$

a	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arccot} a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$\arctan a + \operatorname{arccot} a = \frac{\pi}{2}$

Bet kuriam a:

$0 < \operatorname{arccot} a < \pi$

$\cot(\operatorname{arccot} a) = a$

$\operatorname{arccot}(-a) = \pi - \operatorname{arccot} a$

Atskirieji sprendiniai

$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
y; 0; x	y; 0; x	y; 0; x	y; 0; x
$x = \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$x = 2\pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$

15. Lygtys

$\sin(f(x)) = a$	$\cos(f(x)) = a$	$\tan(f(x)) = a$
kai $\lvert a\rvert < 1$: $\left[\begin{array}{l} f(x) = \arcsin a + 2\pi n \\ f(x) = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.$ $n \in \mathbf{Z}$	kai $\lvert a\rvert < 1$: $f(x) = \pm\arccos a + 2\pi n$ $n \in \mathbf{Z}$	bet kuriam a: $f(x) = \arctan a + \pi n$ $n \in \mathbf{Z}$

Trigonometrinių lygčių sprendimo būdai

Trigonometrinės lygtys, išreiškiamos vieno kintamojo vienos trigonometrinės funkcijos lygtimis, paprastai sprendžiamos įvedant naują kintamąjį

$\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75,$ $1 - \cos^2 x + 4\cos x = 2{,}75,$ $\cos x = t;\quad \lvert t\rvert \le 1,$ $t^2 - 4t + 1{,}75 = 0,$ $t = \frac{1}{2};\ t = \frac{7}{2} > 1;$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$	$\tan x + 3\cot x = 4,$ $\tan x + \frac{3}{\tan x} = 4,$ $\tan x = t,$ $t^2 - 4t + 3 = 0,$ $t = 1;\ t = 3;$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \arctan 3 + \pi k \end{array}\right.$ $n, k \in \mathbf{Z}.$	$\cos^2 x + \cos 4x = 0{,}25,$ $0{,}5(1 + \cos 2x) + 2\cos^2 2x - 1 = 0{,}25,$ $\cos 2x = u;\quad \lvert u\rvert \le 1,$ $4u^2 + u - 1{,}5 = 0,$ $u = \frac{1}{2};\ u = -\frac{3}{4};$ $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{3}{4}) + \pi n;$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Homogeninės trigonometrinės lygtys ir lygtys, pertvarkomos į jas

$2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0,$ $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0,$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$ $2\sin x - \cos x = 0.$ Lygties $\cos x = 0$ šaknys netenkina duotosios lygties. Dalijame iš $\cos x \ne 0$: $2\tan x - 1 = 0,$ $\tan x = \frac{1}{2},$ $x = \arctan\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$	$5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 2,$ $5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x,$ $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0,$ $\cos x \ne 0$. Dalijame iš $\cos^2 x$: $3\tan^2 x + \tan x - 4 = 0 \Rightarrow \tan x = 1;\ \tan x = -\frac{4}{3}.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\quad x = -\arctan\frac{4}{3} + \pi k;$ $n, k \in \mathbf{Z}.$

Skaidymas dauginamaisiais

$\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x - 2 = \cos x - 2\sqrt{2}\sin x,$ $\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x - \cos x - 2 + 2\sqrt{2}\sin x = 0,$ $\cos x(\sqrt{2}\sin x - 1) - 2(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0,$ $(\sqrt{2}\sin x - 1)(\cos x + 2) = 0.$	$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \\ \cos x + 2 = 0 \end{array}\right.,\qquad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}},$ $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in \mathbf{Z},$ $\cos x = -2$, šaknų nėra.

15. Lygtys

Lygtys sprendžiamos pasinaudojant trigonometrinių funkcijų lygybe		
$\sin f(x) = \sin \varphi(x)$ $\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + 2\pi k \\ f(x) = \pi - \varphi(x) + 2\pi n \end{array}\right.$ $n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}$	$\cos f(x) = \cos \varphi(x)$ $f(x) = \varphi(x) + 2\pi n$ $f(x) = -\varphi(x) + 2\pi k$ $n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}$	$\tan f(x) = \tan \varphi(x)$ $\begin{cases} f(x) = \varphi(x) + \pi n \\ \varphi(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases}$ $n \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}$

Atvirkštinių trigonometrinių funkcijų lygtys			
$\arcsin x = a$	$\arccos x = a$	$\arctan x = a$	$\text{arccot}\, x = a$
$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ $x = \sin a$	$0 \leq a \leq \pi$ $x = \cos a$	$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ $x = \tan a$	$0 < a < \pi$ $x = \cot a$
$a < -\frac{\pi}{2}$ arba $a > \frac{\pi}{2}$ sprendinių nėra	$a < 0$ arba $a > \pi$ sprendinių nėra	$a \leq -\frac{\pi}{2}$ arba $a \geq \frac{\pi}{2}$ sprendinių nėra	$a \leq 0$ arba $a \geq \pi$ sprendinių nėra

Parametrinės lygtys

Išspręsti lygtį $\frac{2x+3}{x-a} = 0$ su bet kuriuo a.

Duota lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x \neq a. \end{cases}$$

Atsakymas: kai $a \neq -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$;

kai $a = -\frac{3}{2}$, sprendinių nėra.

Rasti tokias p reikšmes, kurioms esant viena lygties $x^2 - 3px + 2p^2 = 0$ šaknis būtų lygi 1, ir kiekvienai tokiai p reikšmei rasti likusias šaknis.

Tam, kad viena lygties šaknis būtų lygi 1, būtina ir pakankama sąlyga:

$1^2 - 3p \cdot 1 + 2p^2 = 0$, t. y. $2p^2 - 3p + 1 = 0$,

$p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

Kai $p = 1$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

kai $p = \frac{1}{2}$, $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Atsakymas: kai $p = 1$ ir kai $p = \frac{1}{2}$. Kai $p = 1$, $x_2 = 2$;

kai $p = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $4^x - (a+2)\,2^x + 2a = 0$ turi: a) bent vieną sprendinį; b) tik vieną sprendinį; c) daugiau nei vieną sprendinį?

Pažymėsime $2^x = t$, $t^2 - (a+2) \cdot t + 2a = 0$, $t_1 = a$, $t_2 = 2$.

$2^x = 2$, $x = 1$ bet kuriam a.

$2^x = a$, kai $a \leq 0$, sprendinių nėra; kai $a > 0$, $x = \log_2 a$.

Pastebėsime, kad kai $a = 2$, $x = 1$ sutampa su pirmąja šaknimi.

Atsakymas: a) su visomis a reikšmėmis; b) kai $a \leq 0$ ir $a = 2$; c) kai $0 < a < 2$ ir $a > 2$.

15. Lygtys

Su kuriomis b reikšmėmis lygtys $\sin^2 x - (3 + b)\sin x + 3b = 0$ ir $x^2 = b$ yra ekvivalenčios?
Jeigu pirmoji lygtis turi sprendinį x_0, tai ji turi ir be galo daug sprendinių $x_0 + 2\pi k$, t. y. negali būti ekvivalenti lygčiai $x^2 = b$, kuri turi ne daugiau kaip du sprendinius.
Lygtys ekvivalenčios, jei abi neturi sprendinių.
Lygtis $x^2 = b$, kai $b < 0$ neturi sprendinių, pirmoji lygtis ekvivalenti sistemai
$\left[\begin{array}{l}\sin x = b\\ \sin x = 3,\end{array}\right.$ kuri neturi sprendinių, kai $b < -1$ arba kai $b > 1$. Taigi abi lygtys neturi sprendinių, t. y. ekvivalenčios, kai $b < -1$.
Atsakymas: kai $b < -1$.

Rasti, su kuriomis p reikšmėmis lygties $x^2 - px + 3 = 0$ realiųjų šaknų suma mažesnė už penkis.

Kai $D \geq 0$, $x_1 + x_2 = p$. $\begin{cases} p < 5 \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 5 \\ p^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty; -2\sqrt{3}\,] \cup [\,2\sqrt{3}\,; 5).$

Atsakymas: $p \in (-\infty; -2\sqrt{3}\,] \cup [\,2\sqrt{3}\,; 5)$.

Su kuriomis m reikšmėmis lygtys $x^2 + 3x - m = 0$ ir $mx^2 + x + 3 = 0$ turi bendrą šaknį?
Kiekvienai tokiai m reikšmei rasti tą šaknį.
Tarkime, kad t – bendra šaknis. Sudarysime lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais (t ir m):

$$\begin{cases} t^2 + 3t - m = 0 \\ mt^2 + t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+3) = m \\ t + 3 = -mt^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+3) = m \\ m = -mt^2 \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+3) = m \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Kai $m = 0$ $\begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$, bendra šaknis $x = -3$; kai $t = -1$, $m = (-1)(-1 + 3) = -2$.

$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \\ -2x^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$ bendra šaknis $x = -1$.

Atsakymas: kai $m = -2$, $x = -1$; kai $m = 0$, $x = -3$.

Rasti realiųjų skaičių poras a ir b, su kuriomis lygtis $|x - 1| + |x + 3| = ax + b$ turi begalinę aibę sprendinių.

$$|x-1| + |x+3| = \begin{cases} -2x - 2, & \text{kai } x < -3 \\ 4, & \text{kai } -3 \leq x < 1 \\ 2x + 2, & \text{kai } x \geq 1 \end{cases}$$

Lygtis turi begalinę aibę sprendinių, jeigu $ax + b$ tapatingai lygi $-2x - 2$,
t. y. $a = -2$; $b = -2$.
Analogiškai $ax + b$ tapatingai lygi 4,
t. y. $a = 0$; $b = 4$.
Analogiškai $a = 2$; $b = 2$.
Atsakymas: $(-2; -2)$; $(0; 4)$; $(2; 2)$.

Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $x^2 - mx + 1 = 0$ turi dvi šaknis, atstumas tarp kurių skaičių ašyje lygus 2?
Lygtis turi dvi skirtingas šaknis, kai $D > 0$, t. y. $m^2 - 4 > 0$. Atstumas tarp šaknų skaičių ašyje lygus

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{m - \sqrt{D}}{2} - \frac{m + \sqrt{D}}{2}\right| = \sqrt{D}.$$

Turime sistemą : $\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \sqrt{m^2 - 4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Atsakymas: $m = -2\sqrt{2}$, $m = 2\sqrt{2}$.

16. Lygčių sistemos sprendimo būdai

Keitimo būdas

$$\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x^2 + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{5} \\ x^2 + 3 \cdot \dfrac{6-x}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{5} \\ 5x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{32}{25} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Atsakymas: $\left(-\frac{2}{5}; \frac{32}{25}\right)$, (1; 1).

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ \cos(3x - 2y) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - 2x \\ \cos(3x - 2\pi + 4x) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0{,}5 \\ y = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7} \\ y = \dfrac{19\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi n}{7} \\ y = \dfrac{23\pi}{21} - \dfrac{4\pi n}{7} \end{cases} \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$

Atsakymas: $\left(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}; \frac{19\pi}{21} - \frac{4\pi k}{7}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi n}{7}; \frac{23\pi}{21} - \frac{4\pi n}{7}\right)$; $n, k \in \mathbf{Z}$.

Algebrinės sudėties būdas

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \text{ dauginame iš } 3 \\ 7x - 3y = 1 \text{ dauginame iš } 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 6y = 27 \\ 14x - 6y = 2 \end{cases} \overset{\text{sudedame lygtis}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 29x = 29 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Atsakymas: (1; 2).

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75 \\ \sin x \sin y = 0{,}25 \end{cases} \underset{\text{atimame sistemos lygtis}}{\overset{\text{sudedame sistemos lygtis}}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1 \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \end{array}\right..$$

Atsakymas: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n + k); \frac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right)$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

16. Lygčių sistemos sprendimo būdai

Papildomi būdai

Vieto teoremos taikymas

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$$

x, y – lygties šaknys:
$a^2 - 5a + 4 = 0$.
$a = 1$; $a = 4$.
Atsakymas: (1; 4); (4; 1).

Simetrinės sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = -1 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$$

pakeitimas
$x + y = p$
$xy = q$

$$\begin{cases} (p^2 - 2q) - 3q = -1 \\ p - q = 1 \end{cases}$$

Keitimas paprastesnių sistemų visuma

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-4y) = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (2;\, 2) \\ (-4/3;\, -4/3) \end{array}.$$

$$(2) \begin{cases} x = 4y \\ 24y^2 - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{385}}{12};\, \frac{1+\sqrt{385}}{48}\right);\ \left(\frac{1-\sqrt{385}}{12};\, \frac{1-\sqrt{385}}{48}\right).$$

Homogeniškumo panaudojimas

$$\begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

Padauginsime pirmąją lygtį iš (–3), antrąją – iš 5 ir sudėsime.

$$\begin{cases} -9x^2 + 3xy - 3y^2 = -15 \\ 5x^2 + 10y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 3xy + 7y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+x)(7y-4x) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y + x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1;\, -1) \\ (-1;\, 1) \end{array} \right. \\ \begin{cases} 7y - 4x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{7\sqrt{3}}{9};\, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \\ \left(-\frac{7\sqrt{3}}{9};\, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \end{array} \right. \end{array} \right..$$

Atsakymas: (1; –1); (–1; 1); $\left(\frac{7\sqrt{3}}{9};\, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$; $\left(-\frac{7\sqrt{3}}{9};\, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

17. Nelygybės

Griežtosios nelygybės	**Negriežtosios nelygybės**
Skaičius $a > b$ (a daugiau už b), jeigu skirtumas $(a - b)$, – teigiamas skaičius Jeigu $a < b$, tai $b > a$. Šiuo atveju skirtumas $(a - b)$ neigiamas skaičius	$a \leq b$ $c \geq d$

Skaitinių nelygybių savybės

a, b – bet kurie skaičiai	a, b – teigiami skaičiai
Jeigu $a > b$ ir $b > c$, tai $a > c$ (tranzityvumo savybė) Jeigu $a > b$, tai $a + c > b + c$ ($c \in \mathbf{R}$) Jeigu $a > b$ ir c – teigiamas skaičius, tai $ac > bc$ Jeigu $a > b$ ir c – neigiamas skaičius, tai $ac < bc$ Jeigu $a > b$ ir $c > d$, tai $a + c > b + d$	Jeigu $a > b > 0$, tai $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ Jeigu $a > b > 0$ ir $c > d > 0$, tai $ac > bd$ Jeigu $a > b > 0$ ir $m \in \mathbf{N}$, tai $a^m > b^m$ Jeigu $a > b > 0$ ir $m \in \mathbf{N}$, tai $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$

Dviguboji nelygybė ($a < b \geq c$)

Dvigubųjų nelygybių sudėtis $a \leq b \leq c,\ p \leq m < q \Rightarrow a + p \leq b + m < c + q$	*Dvigubųjų nelygybių su teigiamais nariais sandauga* $0 < a < b < c;\ 0 < p < m < q \Rightarrow ap < bm < cq$

Nelygybių įrodymo būdai

Skirtumo sudarymas (jeigu dviejų skaičių skirtumas teigiamas, tai turinys didesnis už atėminį) Žinomų nelygybių panaudojimas Sustiprinimo metodas (tranzityvumo panaudojimas) Funkcijos monotoniškumo panaudojimas, išvestinės pritaikymas	*Pavyzdys.* Įrodyti nelygybę $e^x \geq 1 + x$, kai $x \geq 0$. Išnagrinėsime funkciją $f(x) = e^x - 1 - x$. $f'(x) = e^x - 1 > 0$, kai $x > 0$. Vadinasi, $f(x)$ didėja intervale $[0; +\infty)$. Bet $f(0) = 0$. Taigi $f(x) > 0$ kai $x > 0$. Kai $x = 0$, nelygybė tampa lygybe. Taigi $e^x - 1 - x \geq 0$, tai yra $e^x \geq 1 + x$, kai $x \geq 0$.

Teigiamų skaičių vidurkių palyginimas ($a \geq b > 0,\ a_i > 0,\ n \in \mathbf{N}$)

Aritmetinis vidurkis	dviejų skaičių $\frac{a+b}{2}$	n skaičių $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
Geometrinis vidurkis	dviejų skaičių $\sqrt{ab}$	n skaičių $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$
Harmoninis vidurkis	dviejų skaičių $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$	n skaičių $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$

17. Nelygybės

Teigiamų skaičių vidurkių palyginimas ($a \geq b > 0$, $a_i > 0$, $n \in \mathbf{N}$) (tęsinys)		
Kvadratinis vidurkis	dviejų skaičių $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$	n skaičių $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$
$a \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \geq b$ (teisinga ir n skaičiams)		

Tiesinės nelygybės (pertvarkomos į $ax > b$; $ax \geq b$; $ax < b$; $ax \leq b$)			
$3 \cdot x > -6$, $x > -2$, $x \in (-2; +\infty)$.	$-5 \cdot x \geq 1$, $x \leq -\dfrac{1}{5}$, $x \in (-\infty; -\dfrac{1}{5}]$.	$0 \cdot x < 2$, $x \in \mathbf{R}$.	$0 \cdot x > 8$, $x \in \{\varnothing\}$.
$(\sqrt{5} - \sqrt{7})x > (\sqrt{5} - \sqrt{7})$, $x < 1$, kadangi $\sqrt{5} - \sqrt{7} < 0$, $x \in (-\infty; 1)$.			

Kvadratinės nelygybės (pertvarkomos į $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$)			
Kvadratinių nelygybių sprendimui apskaičiuosime kvadratinio trinario šaknis ir diskriminantą $D = b^2 - 4ac$			
Nelygybės	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
	x	x_0, x	x_1, x_2, x
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbf{R}$	$x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	nėra sprendinių	nėra sprendinių	$x \in (x_1; x_2)$

Paprasčiausios iracionaliosios nelygybės		
	$\sqrt{x} < a$	$\sqrt{x} > a$
$a < 0$	nėra sprendinių	$x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty)$
$a = 0$	nėra sprendinių	$x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$
$a > 0$	$0 \leq x < a^2$, $x \in [0; a^2)$	$x > a^2 \Leftrightarrow x \in (a^2; +\infty)$

17. Nelygybės

Paprasčiausios iracionaliosios nelygybės (tęsinys)		
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$
ekvivalenti sistemai $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	ekvivalenti sistemų visumai $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$	ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Paprasčiausios rodiklinės nelygybės				
	$a^x < m$	$a^x > m$	$a^{f(x)} < m$	$a^{f(x)} > m$
$m \leq 0;\ a > 0,\ a \neq 1$	nėra sprendinių	$x \in \mathbf{R}$	nėra sprendinių	$x \in D(f)$
$m > 0;\ a > 1$	$x < \log_a m$	$x > \log_a m$	$f(x) < \log_a m$	$f(x) > \log_a m$
$m > 0;\ 0 < a < 1$	$x > \log_a m$	$x < \log_a m$	$f(x) > \log_a m$	$f(x) < \log_a m$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	kai $a > 1$, ekvivalenti nelygybei $f(x) > g(x)$ kai $0 < a < 1$, ekvivalenti nelygybei $f(x) < g(x)$			

Paprasčiausios logaritminės nelygybės				
$m \in \mathbf{R}$	$\log_a x < m$	$\log_a x > m$	$\log_a f(x) < m$	$\log_a f(x) > m$
$a > 1$	$\begin{cases} x < a^m \\ x > 0 \end{cases}$	$x > a^m$	$\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$f(x) > a^m$
$0 < a < 1$	$x > a^m$	$\begin{cases} x < a^m \\ x > 0 \end{cases}$	$f(x) > a^m$	$\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$\log_a f(x) < \log_a g(x)$		$\log_{H(x)} f(x) < \log_{H(x)} g(x)$
kai $a > 1$, ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	kai $0 < a < 1$, ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	ekvivalenti nelygybių sistemų visumai: $\begin{cases} H(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ ir $\begin{cases} H(x) > 0 \\ H(x) < 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Paprasčiausių trigonometrinių nelygybių pavyzdžiai			
$\sin x < -1{,}3$	$\sin x > -1{,}3$	$\sin x < \sqrt{1{,}3}$	$\sin x > \sqrt{1{,}3}$
sprendinių nėra $-1 \leq \sin x \leq 1$	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$, nes $\sin x \leq 1 < \sqrt{1{,}3}$	sprendinių nėra

17. Nelygybės

$\sin x < -0{,}5$	$\sin x > -0{,}5$	$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x \in \left(2\pi n - \frac{5\pi}{6};\ 2\pi n - \frac{\pi}{6}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(2\pi n + \frac{2\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x < -3^{0,7}$	$\cos x < \ln 3$	$\cos x > -\frac{\pi}{3}$	$\cos x > e^{0,2}$
sprendinių nėra	$x \in \mathbf{R}$, nes $\cos x \le 1 < \ln 3$	$x \in \mathbf{R}$, nes $\cos x \ge -1 > -\frac{\pi}{3}$	sprendinių nėra, nes $e^{0,2} > 1$

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x < 0{,}5$
$x \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(2\pi n + \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x > 0$	$\cos x > 0{,}7$	$\tan x \le \sqrt{3}$
$x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$	$x \in (2\pi n - \arccos 0{,}7;\ \arccos 0{,}7 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$

17. Nelygybės

$\tan x < -2^{-1}$	$\tan x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot x > 1$
$\left(-2^{-1} = -\dfrac{1}{2}\right)$ $x \in \left(\pi n - \dfrac{\pi}{2};\ \pi n - \operatorname{arcot}\dfrac{1}{2}\right),\quad n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left[\pi n - \dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\quad n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right),\quad n \in \mathbf{Z}$

Sudėtingesnių trigonometrinių nelygybių sprendimų pavyzdžiai

$\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{8}\right) < 0$	$\sin x \geq \cos x$	$\tan^2 x \leq 3$
$t = 2x - \dfrac{3\pi}{8}$ $\cos t < 0$ $t \in \left(2\pi n + \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $2\pi n + \dfrac{\pi}{2} < 2x - \dfrac{3\pi}{8} < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n,$ $\pi n + \dfrac{7\pi}{16} < x < \dfrac{15\pi}{16} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$2\pi n + \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$	$\lvert \tan x \rvert \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \leq \sqrt{3} \\ \tan x \geq -\sqrt{3} \end{cases}$ $x \in \left[\pi n - \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{3} + \pi n\right],\quad n \in \mathbf{Z}$

$6\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

Tarkime $y = \cos x$. Tuomet

$$\begin{cases} 6y^2 - y - 1 < 0 \\ |y| \leq 1 \end{cases},\quad -\frac{1}{3} < y < \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ -\frac{1}{3} < \cos x < \frac{1}{2},$$

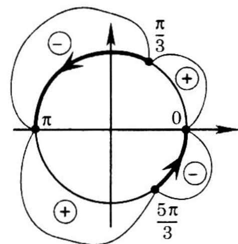
$$x \in \left(2\pi n - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right);\ 2\pi n - \arccos\frac{1}{2}\right) \cup \left(2\pi n + \arccos\frac{1}{2};\ 2\pi n + \right.$$

$$\left. + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

arba

$$x \in \left(2\pi n - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right);\ 2\pi n - \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

17. Nelygybės

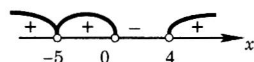
$\sin x - \sin 2x \le 0$
$\sin x\,(1 - 2\cos x) \le 0$ Panaudosime intervalų metodą trigonometriniame apskritime, imdami $x \in [0; 2\pi)$. $F(x) = \sin x\,(1 - 2\cos x)$; $F(x) = 0 \Rightarrow x = 0; \pi; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$. $x \in \left[2\pi n + \frac{\pi}{3}; \pi + 2\pi n\right] \cup \left[2\pi n + \frac{5\pi}{3}; 2\pi + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. 

Atvirkštinių trigonometrinių funkcijų nelygybių pavyzdžiai			
$\arccos x < -5$ sprendinių nėra, nes $0 \le \arccos x \le \pi$	$\text{arrcos}\, x > -4$ $x \in [-1; 1]$	$\arccos x < \frac{\pi}{3}$ $x \in (0{,}5; 1]$	$\arccos x > 1$ $x \in [-1; \cos 1)$
$\arcsin x < \pi$ $x \in [-1; 1]$	$\arcsin x < -1{,}7$ sprendinių nėra, nes $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$	$\arcsin x \le -\frac{\pi}{6}$ $x \in [-1; -0{,}5]$	$\arcsin x > 0$ $x \in (0; 1]$
$\arctan x < 2$ $x \in \mathbf{R}$, nes $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$	$\arctan x > 5$ sprendinių nėra	$\arctan x \le \frac{\pi}{7}$ $x \in \left(-\infty; \text{tg}\,\frac{\pi}{7}\right]$	$\arctan x \le 0$ $x \in (-\infty; 0]$

Intervalų metodas	
Intervalų metodu sprendžiamos nelygybės, pertvarkomos į nelygybes $F(x) > 0$ arba $F(x) < 0$, ($F(x) \ge 0$ arba $F(x) \le 0$). Metodas pagrįstas tuo, kad tolydžioji intervale funkcija gali keisti ženklą tik tuose taškuose, kuriuose jos reikšmė lygi nuliui (gali ir nekeisti)	*Metodo panaudojimo algoritmas:* Rasime $D(F(x))$ ir intervalus, kuruose funkcija $F(x)$ tolydi. Rasime funkcijos $F(x)$ nulius – tas x reikšmes, kurioms esant $F(x) = 0$. Skaičių ašyje pažymėsime surastus intervalus ir funkcijos nulius. Nustatysime intervalus, kuriuose funkcijos ženklas nesikeičia, ir pažymėsime surastus ženklus. Užrašysime atsakymą

Pavyzdžiai

$x(x-4)(x+5)^2 > 0$

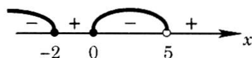
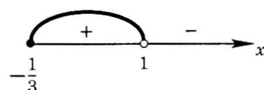


Nagrinėsime funkciją $F(x) = x(x-4)(x+5)^2$.

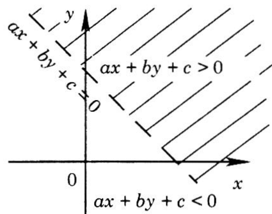
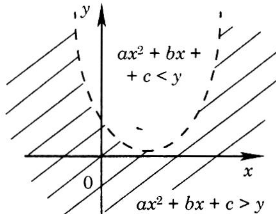
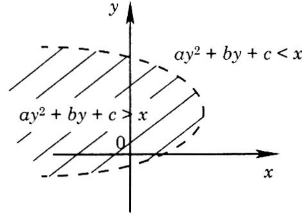
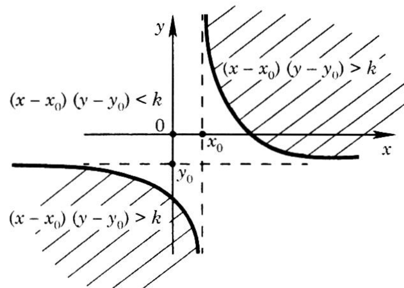
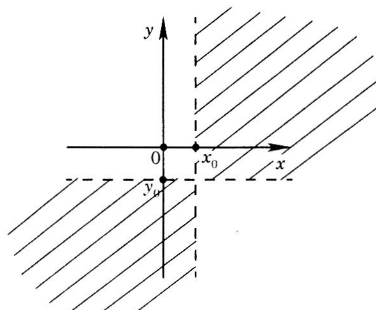
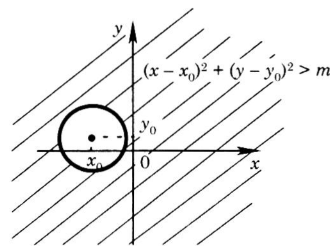
$D(F) = \mathbf{R}$, funkcija tolydi aibėje $\mathbf{R}$. $F(x) = 0$ taškuose $x = 0$; $x = 4$; $x = -5$.

$F(-6) > 0$; $F(-1) > 0$; $F(1) < 0$; $F(5) > 0$.

Atsakymas: $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (4; \infty)$. $x(x-4)(x+5)^2 \le 0$ kai $x \in \{-5\} \cup [0; 4]$.

Pavyzdžiai (tęsinys)	
$\frac{x(x+2)}{x-5} \le 0$. Nagrinėsime funkciją $F(x) = \frac{x(x+2)}{x-5}$. $D(F) = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$. $F(x) = 0$ taškuose $x = 0$; $x = -2$. $F(-3) < 0$; $F(-1) > 0$; $F(1) < 0$; $F(6) > 0$. Atsakymas: $(-\infty; -2] \cup [0; 5)$. 	$\sqrt{3x+1} > 2x$. Pertvarkysime nelygybę į $\sqrt{3x+1} - 2x > 0$. $F(x) = \sqrt{3x+1} - 2x$. $D(F) = [-\frac{1}{3}; +\infty)$. Rasime šios funkcijos nulius. $\sqrt{3x+1} - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x+1 = 4x^2 \end{cases}$. $F(x) = 0$, kai $x = 1$. $F(0) > 0$; $F(5) < 0$. *Atsakymas*: $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$. 

18. Nelygybės su dviem kintamaisiais

$ax + by + c > 0$ ir $ax + by + c < 0$ – pusplokštumės ($a^2 + b^2 \ne 0$)	$ax^2 + bx + c > y$ ir $ax^2 + bx + c < y$	$ay^2 + by + c > x$ ir $ay^2 + by + c < x$
riba – tiesė $ax + by + c = 0$ 	riba – parabolė $ax^2 + bx + c = 0$ 	riba – parabolė $ay^2 + by + c = x$ 
$(x - x_0)(y - y_0) \ge k$ ir $(x - x_0)(y - y_0) < k$ ($k \ne 0$)	$(x - x_0)(y - y_0) > 0$ ir $(x - x_0)(y - y_0) < 0$ ($k = 0$)	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ge m$ ir $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < m$; ($m > 0$)
riba – hiperbolė $(x - x_0)(y - y_0) = k$ (dvi šakos) 	riba – dvi tiesės $x = x_0$ ir $y = y_0$ 	riba – apskritimas $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = m$ $\sqrt{m}$ – apskritimo spindulys 

19. Diferencijavimas

Funkcijos išvestinė taške x_0 vadinama tos funkcijos pokyčio $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ir jį atitinkančio argumento pokyčio Δx santykio riba, kai Δx artėja prie nulio: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	Funkcijos išvestinės radimą vadiname funkcijos *diferencijavimu* **Būtinos funkcijos diferencijavimo sąlygos** Kad funkcija f būtų diferencijuojama (turėtų išvestinę) taške x_0, būtina (bet nepakankama), kad funkcija būtų tolydi tame taške (t. y. $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) \to 0$)

Funkcijos išvestinės radimas remiantis apibrėžimu	
$f(x) = x^2$, $x_0 = 2$	$f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (4+\Delta x) = 4.$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 \neq 0$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0+\Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\left(\sqrt[3]{(x_0+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0+\Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)\Delta x} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}}.$
$f(x) = \sin x$, $x_0 \in \mathbf{R}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x_0.$
$f(x) = \lvert x \rvert \cdot x^2$, $x_0 = -2$	$f'(-2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\lvert -2+\Delta x \rvert \cdot (-2+\Delta x)^2 - 8}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(2-\Delta x)(-2+\Delta x)^2 - 8}{\Delta x} = -12.$

Tolydžiosios, *nediferencijuojamos* taške x_0 funkcijos pavyzdys	
$f(x) = \lvert x-2 \rvert$, $x_0 = 2$	$f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\lvert (2+\Delta x) - 2 \rvert - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\lvert \Delta x \rvert}{\Delta x}$ riba neegzistuoja, $f'(2)$ neegzistuoja.
$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x_0 = 1$	$f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+\Delta x)-1} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty$, $f'(1)$ neegzistuoja.

Antroji išvestinė	**Aukštesnės eilės išvestinės**
$f''(x) = (f'(x))'$	$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$
$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$	$(\sqrt{x})''' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'' = \left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right)' = \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$

19. Diferencijavimas

Pagrindinių elementariųjų funkcijų išvestinės		**Sudėtinės funkcijos išvestinė** $(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$
$(c)' = 0,$	$c \in \mathbf{R}$ (konstanta)	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$*
$(x)' = 1,$	$x \in \mathbf{R}$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(x^n)' = nx^{n-1},$	$n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$; arba $-n \in \mathbf{N}, x \neq 0$; arba $n \notin \mathbf{Z}, x > 0$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x,$	$x \in \mathbf{R}$	$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x,$	$x \in \mathbf{R}$	$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x},$	$x \in (0; +\infty)$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$	$x \in (0; +\infty)$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x,$	$x \in \mathbf{R}$	
$(a^x)' = a^x \ln a,$	$x \in \mathbf{R}$	* $u = u(x)$

Atvirkštinės funkcijos išvestinė

Funkcijos $y = f(x)$ ir $y = \varphi(x)$ viena kitai atvirkštinės. $f(a) = b \Leftrightarrow a = \varphi(b)$

$$\boxed{f'(a) \cdot \varphi'(b) = 1}$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1; 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1; 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in \mathbf{R}$	$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x \in \mathbf{R}$	$(\text{arccot}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Pagrindinės formulės	*Išvados*
$(u + v)' = u' + v'$	$(u - v)' = u' - v'$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$

Pavyzdžiai

$(\cos \sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

$((2x^2 - x + 1)^{10})' = 10 \cdot (2x^2 - x + 1)^9 \cdot (2x^2 - x + 1)' = 10 \cdot (2x^2 - x + 1)^9 \cdot (4x - 1).$

19. Diferencijavimas

Mechaninė išvestinės prasmė	Geometrinė išvestinės prasmė
Tarkime $s = s(t)$ – kelio priklausomybė nuo laiko. Tuomet: $v = v(t) = s'(t)$ *Greitis – kelio išvestinė laiko atžvilgiu.* $a = a(t) = v'(t) = s''(t)$ *Pagreitis – greičio išvestinė laiko atžvilgiu* (antroji kelio išvestinė laiko atžvilgiu)	Funkcijos $f(x)$ grafiko liestine taške x_0 vadinama tiesė, kurios lygtis $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $f'(x_0) = \tan \alpha_{liest} = k_{liest}$ *Funkcijos išvestinės reikšmė taške lygi funkcijos grafiko liestinės, nubrėžtos per tą tašką, krypties koeficientui*

Funkcijos grafiko liestinė

Funkcijos $y = f(x)$ *grafiko liestinės* (ne vertikaliosios) taške, kurio abscisė x_0, lygtis yra:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Jeigu funkcija $f(x)$ neturi išvestinės taške x_0, bet yra tolydi šiame taške, tai funkcijos grafikas tame taške arba neturi liestinės, arba tai vertikalioji liestinė

$y = |x|$ neturi liestinės grafiko taške, kurio abscisė $x = 0$

$y = \sqrt[3]{x}$ turi vertikaliąją liestinę $x = 0$ grafiko taške, kurio abscisė $x = 0$

Liestinės lygties sudarymo *pavyzdžiai*

Sudaryti kreivės $y = x^3 - x^2$ grafiko liestinės lygtį taške, kurio abscisė $x_0 = 1$.

Lietimosi taško koordinatės $x_0 = 1$; $y_0 = 1^3 - 1^2 = 0$.

$y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow k_{liest} = y'(1) = 1$.

Liestinės lygtis: $y = 0 + 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$.

Sudaryti kreivės $f(x) = (x^2 + 6x + 3)/2$ liestinės, kuri nekirstų tiesės $y = 2x + 5$, lygtį.

Kadangi liestinė nekerta tiesės $y = 2x + 5$, tai ji yra lygiagreti su liestine. Vadinasi, $f'(x_0) = 2$, bet $f'(x) = x + 3$.

Taigi $x_0 + 3 = 2$ ir $x_0 = -1$. Lietimosi taško ordinatė y_0 lygi

$((-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 3)/2 = -1$. Lietimosi taško koordinatės $(-1; -1)$.

Liestinės lygtis $y = -1 + 2(x + 1)$, arba $\boxed{y = 2x + 1}$.

Sudaryti lygtį liestinės, kuri kreivę $y = x^3$ liečia taške $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. Tarkime kad, $(x_0; y_0)$ – lietimosi taškas.

Tuomet $y_0 = x_0^3$; $k_{liest} = 3x_0^2$. Liestinės lygtis $y = x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0)$. Taškas $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$ yra liestinės taškas,

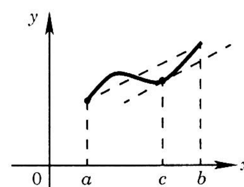
todėl $-1 = x_0^3 + 3x_0^2\left(\frac{1}{3} - x_0\right) \Rightarrow 2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Liestinės lygtis $y = 1 + 3(x - 1)$, arba $\boxed{y = 3x - 2}$.

Funkcijų tyrimas taikant išvestines

Funkcijos monotoniškumas

Lagranžo (Lagrange) teorema
Jeigu $f(x)$ tolydi intervale $[a; b]$ ir diferencijuojama intervale $(a; b)$, tai egzistuoja toks taškas $c \in (a; b)$ kad $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$



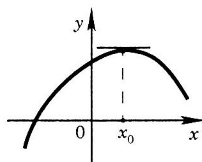
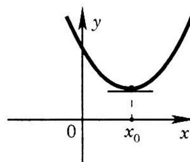
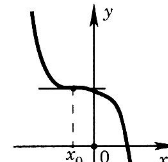
(Pastebėsime, kad tokių taškų c intervale $(a; b)$ gali būti ir daugiau.)

Norint išnagrinėti funkcijos $f(x)$ monotoniškumą galima nagrinėti jos išvestinės ženklo pastovumą

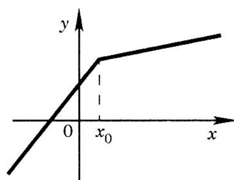
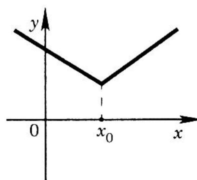
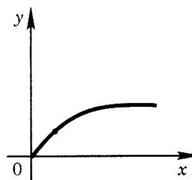
Jeigu $f'(x) > 0$ intervale $(a; b)$, tai $f(x)$ didėja intervale $(a; b)$ Jeigu $f(x)$ tolydi intervale $[a; b]$, tai $f(x)$ didėja intervale $[a; b]$	Jeigu $f'(x) < 0$ intervale $(a; b)$, tai $f(x)$ mažėja intervale $(a; b)$ Jeigu $f(x)$ tolydi intervale $[a; b]$, tai $f(x)$ mažėja intervale $[a; b]$
$f(x) = x^2 - 6x + 1$; $f'(x) = 2x - 6 > 0$, kai $x > 3 \Rightarrow f(x)$ didėja intervale $[3; +\infty)$	$f(x) = \sqrt{-x}$; $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$, kai $x < 0 \Rightarrow f(x)$ mažėja intervale $(-\infty; 0]$
Jeigu $f(x)$ didėja ir diferencijuojama intervale $[a; b]$, tai $f'(x) \geq 0$	Jeigu $f(x)$ mažėja ir diferencijuojama intervale $[a; b]$, tai $f'(x) \leq 0$

Funkcijos kritiniai taškai

Funkcijos apibrėžimo srities vidiniai taškai, kuriuose funkcijos išvestinė yra lygi nuliui arba neegzistuoja, vadinami *kritiniais taškais*

		
$f'(x_0) = 0$; x_0 – kritinis taškas; $f(x_0) = f_{max}$	$f'(x_0) = 0$; x_0 – kritinis taškas; $f(x_0) = f_{min}$	$f'(x_0) = 0$; x_0 – kritinis taškas; $f(x_0)$ nėra ekstremumas

Kritiniai taškai (pavyzdžiai)

		
$f'(x_0)$ neegzistuoja; x_0 – kritinis taškas; $f(x_0)$ nėra ekstremumas	$f'(x_0)$ neegzistuoja; x_0 – kritinis taškas; $f(x_0) = f_{min}$	Nėra kritinių taškų; $x_0 = 0$ nėra vidinis apibrėžimo srities taškas

19. Diferencijavimas

Kritiniai taškai (pavyzdžiai) (tęsinys)

Nėra kritinių taškų; x_0 – trūkio taškas	$f'(x) = 0$ su visais $x \in (-3; 4)$; $f'(-3)$, $f'(4)$ neegzistuoja; visi $x \in [-3; 4]$ – kritiniai taškai	$f'(x_0)$ neegzistuoja; x_0 – kritinis taškas; $f(x_0) = f_{min}$

Ekstremumai

$x_0 \in D(f)$ – $f(x)$ *maksimumo* taškas, jeigu egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad su visais $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \geq f(x)$	$x_0 \in D(f)$ – $f(x)$, *minimumo* taškas, jeigu egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad su visais $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \leq f(x)$

Funkcijos maksimumo ir minimumo taškai vadinami jos ekstremumo taškais, o funkcijos reikšmės juose – ekstremumais (maksimumais ir minimumais)

$f'(x_0) = 0$, kai $x < x_0$ $f'(x) > 0$, kai $x > x_0$ $f'(x) < 0$	$f'(x_0) = 0$, kai $x < x_0$ $f'(x) < 0$, kai $x > x_0$ $f'(x) > 0$

Įvairių funkcijų kritinių taškų *pavyzdžiai*

1) $y = |x|$; $x_0 = 0$; $y'(0)$ neegzistuoja; $y(0) = 0$ – minimumas.
2) $y = x^2$; $x_0 = 0$; $y'(0) = 0$; $y(0) = 0$ – minimumas.
3) $y = x^3$; $x_0 = 0$; $y'(0) = 0$ – ekstremumo nėra.
4) $y = 2x - |x|$; $x_0 = 0$; $y'(0)$ – neegzistuoja, ekstremumo nėra.

Funkcijų monotoniškumo tyrimų *pavyzdžiai*

$f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$; $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$, kai $x \in \mathbf{R}$; $f(x)$ didėja intervale $\mathbf{R}$.	$f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) = 3(x-1)(x+1) = 0$, kai $x = -1$ ir $x = 1$; $f(x)$ didėja intervale $(-\infty; -1]$ ir intervale $[1; +\infty)$; $f(x)$ mažėja intervale $[-1; 1]$.	$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$; $f'(x) = 0$, kai $x = 1$; $f(x)$ didėja intervale $(-\infty; 0)$ ir intervale $[1; +\infty)$; $f(x)$ mažėja intervale $(0; 1]$.

$f(x) = x^4 - x^3$; $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$; $f(x)$ didėja intervale $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; $f(x)$ ir mažėja intervale $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$.	$f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $f(x)$ didėja intervale $(-\infty; -1]$ ir intervale $[1; +\infty)$; $f(x)$ mažėja intervale $[-1; 0)$ ir intervale $(0; 1]$.

20. Funkcijų tyrimas

Funkcijos apibrėžimo sritis $D(f)$ – aibė reikšmių x, kurioms esant funkcija apibrėžta

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $D(f) = \mathbf{R}$	$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ $D(f) = \{x \mid x \neq 1\}$	$f(x) = \sqrt[4]{1-x}$ $D(f) = \{x \mid x \leq 1\}$	$f(x) = \sqrt{2x-x^2-1}$ $D(f) = \{1\}$	$f(x) = \lg x + \lg(-x)$ $D(f) = \varnothing$

Funkcijos reikšmių sritis $E(f)$ – reikšmių, kurias gali įgyti $f(x)$, kai $x \in D(f)$ aibė
(Visos a reikšmės, kurioms esant lygtis $f(x) = a$ turi sprendinį.)

$f(x) = x^3 - 3x$ $E(f) = \mathbf{R}$	$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3}$ $E(f) = \{y \mid y \neq 1\}$	$f(x) = \sqrt[3]{2x-x^2}$ $E(f) = \{y \mid y \leq 1\}$	$f(x) = 1 + \sqrt{4x-x^2-4}$ $E(f) = \{1\}$	$f(x) = \sin x + \cos x$ $E(f) = \{y \mid -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}\}$

Lyginumas	**Nelyginumas**
$f(-x) = f(x),\ x \in D(f)$	$f(-x) = -f(x),\ x \in D(f)$
Lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas ordinačių srities atžvilgiu	Nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu
Lyginių funkcijų *pavyzdžiai* $f(x) = x^4 - 21x^2;\quad g(x) = 5^x + 5^{-x};$ $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$.	Nelyginių funkcijų *pavyzdžiai* $h(x) = x^3 - 20x;\quad u(x) = 5^x - 5^{-x};$ $v(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$.

$f(x) = \sin x - \cos x$ nėra nei lyginė, nei nelyginė

Periodiškumas

$f(x - t) = f(x + t) = f(x),\ x \in D(f),\ t \neq 0$

Skaičius t vadinamas *funkcijos periodu*, o mažiausia teigiama t reikšmė – *pagrindiniu funkcijos periodu* (T)

$f(x) = \sin 4x$, $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.	$f(x) = \cos 2\pi x$, $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.	$f(x) = 2 \cdot \tan \frac{x}{3}$, $T = \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$.	$f(x) = 17$, $t \in (0; +\infty)$ – pagrindinio periodo nėra.

$f(x) = x + \sin x;\ f(x) = \cos(x^2)$ – neperiodinės funkcijos

Periodinės funkcijos grafikas sudarytas iš pasikartojančių fragmentų T ilgio atkarpoje; bet kurioje tokioje atkarpoje periodinė funkcija įgyja visas savo reikšmes

20. Funkcijų tyrimas

Funkcijos šaknis (nulis) – argumento reikšmė, kuriai esant funkcijos reikšmė lygi nuliui				
$f(x) = 4x - \frac{1}{x}$ šaknys: $x = \pm\frac{1}{2}$.	$f(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$ šaknys: $x = 0$; $x = 1$.	$f(x) = (1+x) \cdot \sqrt{x}$ šaknis: $x = 0$.	$f(x) = \sin x + \cos x$ šaknys: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.	$f(x) = \frac{1}{\sin x}$ šaknų nėra.

Pastovaus ženklo intervalas – intervalas, kuriame funkcijos reikšmės teigiamos (arba neigiamos)	
Pavyzdžiai	
$f(x) = 3x^2 + 5x - 8$; $f(x) < 0$, kai $x \in \left(-\frac{8}{3};\ 1\right)$.	$f(x) > 0$, kai $x \in \left(-\infty;\ -\frac{8}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$.
$f(x) = x^{-2}$; du pastovaus ženklo intervalai $(-\infty;\ 0)$ ir $(0;\ +\infty)$, abiejuose funkcija teigiama.	
Monotoniškumas	
Funkcija $f(x)$ vadinama *didėjančia* intervale I, jeigu su bet kuriomis x_1 ir x_2 ir šio intervalo $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Intervalas I vadinamas funkcijos $f(x)$ *didėjimo intervalu*, jeigu funkcija šiame intervale yra didėjanti	Funkcija $f(x)$ vadinama *mažėjančia* intervale I, jeigu su bet kuriomis x_1 ir x_2 ir šio intervalo $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Intervalas I vadinamas $f(x)$ *mažėjimo intervalu*, jeigu funkcija šiame intervale yra mažėjanti
Didėjimo ir mažėjimo intervalai vadinami funkcijos *monotoniškumo intervalais*	
Funkcijos monotoniškumo kriterijus	
$f(x)$ didėja intervale, jeigu $f'(x) > 0$	$f(x)$ mažėja intervale, jeigu $f'(x) < 0$
Pavyzdžiai	
$f(x) = 3x^2 + 5x - 8$; $f'(x) > 0$, kai $x > -\frac{5}{6}$; $f'(x) < 0$, kai $x < -\frac{5}{6}$;	$f'(x) = 6x + 5$; $f(x)$ didėja intervale $\left[-\frac{5}{6};\ +\infty\right)$; $f(x)$ mažėja intervale $\left(-\infty;\ -\frac{5}{6}\right]$.
$f(x) = -\frac{1}{x^3}$; du monotoniškumo intervalai $(-\infty;\ 0)$ ir $(0;\ +\infty)$; abiejuose funkcija didėja.	
$f(x) = 3x + 4$ didėja aibėje $\mathbf{R}$, vienas monotoniškumo intervalas $(-\infty;\ +\infty)$.	

20. Funkcijų tyrimas

Funkcijos monotoniškumo kriterijus (tęsinys)
$f(x) = 3x^2 + 6x - 8$; $f'(x) = 6(x + 1) = 0$, kai $x = -1$; $f'(-2) < 0 \Rightarrow f(x)$ mažėja intervale $(-\infty; -1]$; $f'(0) > 0 \Rightarrow f(x)$ didėja intervale $[-1; +\infty)$; $x_0 = -1$ – minimumo taškas; $f(-1) = -11$ – minimumas.
$f(x) = x^3$ – ekstremumų nėra.

Funkcijos tyrimas taikant išvestinę. Grafiko braižymas	
Randame $D(f)$. Randame išvestinę, kritinius taškus, nagrinėjame išvestinės ženklus. Randame monotoniškumo intervalus, ekstremumo taškus, nustatome maksimumo ir minimumo taškus. Randame funkcijos ekstremumus. Ištiriame, ar funkcija yra lyginė, nelyginė, periodinė (periodinę funkciją geriausia nagrinėti T ilgio atkarpoje). Brėžiame grafiko eskizą. Randame $E(f)$. Apskaičiuojame keletą funkcijos reikšmių (bent po vieną kiekviename monotoniškumo intervale)	*Jei galima* Išnagrinėjame funkciją apibrėžimo srities galuose ir trūkio taškuose. Randame horizontaliąją ir vertikaliąją asimptotes. Randame funkcijos šaknis ir intervalus, kuriuose funkcija yra pastovaus ženklo. Nubraižome funkcijos grafiką

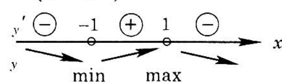
Pavyzdys

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

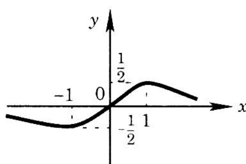
$D(y) = \mathbf{R}$.

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2};$$

y' – egzistuoja, kai $x \in \mathbf{R}$;
$y' = 0$, kai $x = \pm 1$.



$$y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2};\ y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}.$$



Funkcija nelyginė: $y(-x) = -y(x)$.

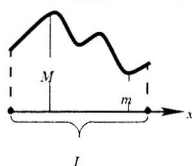
$$E(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

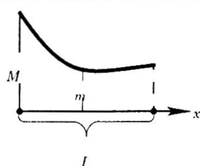
$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

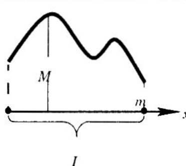
$y = 0$ – horizontalioji asimptotė;
vertikaliųjų asimptočių nėra.
$y = 0$, kai $x = 0$ (šaknis),
$y > 0$, kai $x > 0$;
$y < 0$, kai $x < 0$.

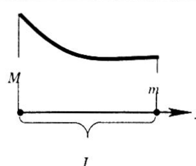
21. Funkcijos didžiausiosios ir mažiausiosios reikšmės radimas atkarpoje

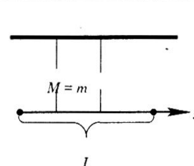
Didžiausiąja (mažiausiąja) funkcijos $f(x)$ reikšme atkarpoje I vadinamas toks skaičius M (m), kuriam egzistuoja toks $x_0 \in I$, kad $f(x_0) = M$ $(f(x_0) = m)$, $M \geq f(x)$ $(m \leq f(x))$ bet kuriam x iš I











Tolydžioji atkarpoje I funkcija didžiausiąją ir mažiausiąją reikšmes gali įgyti arba atkarpos galuose (jeigu tai skaičiai), arba kritiniuose taškuose atkarpos viduje

Tolydžiosios atkarpoje $[a; b]$ *funkcijos didžiausiosios* ir *mažiausiosios reikšmių* atkarpoje $[a; b]$ *radimo algoritmas*

1. Raskite $f(a)$ ir $f(b)$ – funkcijos reikšmes atkarpos galuose.
2. Raskite funkcijos kritinius taškus atkarpos viduje, (t. y. intervale $(a; b)$.
3. Raskite funkcijos reikšmes kritiniuose taškuose.
4. Iš visų gautų reikšmių išrinkite didžiausiąją ir mažiausiąją. Tai ir bus didžiausioji ir mažiausioji funkcijos reikšmės atkarpoje $[a; b]$

Pavyzdys

$f(x) = 8x^2 - x^4$, $x \in [-1; 3]$. $f(-1) = 7$; $f(3) = -9$;

$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = 2$; $x = -2 \notin [-1; 3]$. $f(0) = 0$; $f(2) = 16$.

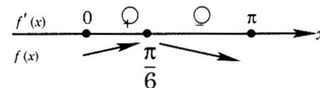
$\max\{7; -9; 0; 16\} = 16 \Rightarrow \max\limits_{[-1;\,3]} f(x) = 16$; $\min\{7; -9; 0; 16\} = -9 \Rightarrow \min\limits_{[-1;\,3]} f(x) = -9$.

Pavyzdys

Jeigu tolydžioji atkarpoje I funkcija turi vienintelį ekstremumo tašką ir šis ekstremumas – maksimumas (minimumas), tai šiame taške funkcija įgyja didžiausiąją (mažiausiąją) reikšmę.

$f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x$, $x \in [0; \pi]$. $f(0) = \sqrt{3}$; $f(\pi) = -\sqrt{3}$; $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$;

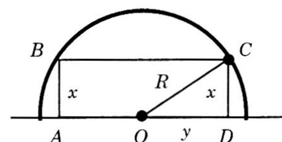
$f'(x) = 0$, kai $\cos x = \sqrt{3}\sin x \Rightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k \in [0; \pi]$, kai $k = 0$.



$\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6} = 2$; $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(\pi) = -\sqrt{3}$.

Uždavinys

Į spindulio R pusapskritimį taip įbrėžti didžiausio ploto stačiakampį, kad viena jo kraštinė būtų pusapskritimio skersmenyje, o dvi jo viršūnės – pusapskritimio lanke.



Pažymėsime stačiakampio kraštines $AB = x$,

$AD = 2y$. Tada jo plotas $S = 2xy$. Pastebėsime, kad $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Gauname $S = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = 2 \cdot \sqrt{R^2x^2 - x^4}$, $x \in (0; R)$.

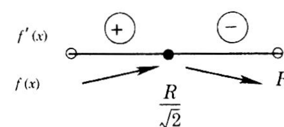
Paieškosime funkcijos $f(x) = R^2x^2 - x^4$ maksimumo, kai $x \in (0; R)$.

$f'(x) = 2R^2x - 4x^3 = 2x(R^2 - 2x^2)$.

21. Funkcijos didžiausiosios ir mažiausiosios reikšmių atkarpoje radimas

Uždavinys (tęsinys)

$f'(x) = 0$, kai $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ (kadangi $x \in (0; R)$).



Vadinasi, kai $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, stačiakampio plotas didžiausias.

Atsakymas. Stačiakampio plotas yra didžiausias, kai jo kraštinės $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $2y = R\sqrt{2}$.

22. Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas

Funkcija $F(x)$ vadinama funkcijos $f(x)$ *pirmykšte funkcija* intervale I, jei su visomis x reikšmėmis iš šio intervalo yra teisinga lygybė $F'(x) = f(x)$	Visų pirmykščių funkcijų $f(x)$ aibė vadinama *neapibrėžtiniu integralu* ir žymima $\int f(x)dx$
Jeigu $F(x)$ – funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija intervale I, tai bet kuri funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija šiame intervale turi pavidalą $F(x) + C$, čia $C \in \mathbf{R}$	$\int f(x)dx = F(x) + C$, čia $F(x)$ – bet kuri funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, $C \in \mathbf{R}$

Pirmykščių funkcijų savybės

$f'(x)$ pirmykštė funkcija yra $f(x) + C$ Jeigu funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija yra $F(x)$, tai $f(t)$ pirmykštė lygi $F(t)$ Jeigu funkcijos $f(x)$ pirmykštė yra $F(x)$, tai $kf(x)$ pirmykštė lygi $kF(x)$ Tarkime, $f_1(x)$ pirmykštė f-ja yra $F_1(x)$, $f_2(x)$ pirmykštė funkcija $F_2(x)$, tuomet $f_1(x) + f_2(x)$ pirmykštė lygi $F_1(x) + F_2(x)$	Tarkime, $f(x)$ pirmykštė lygi $F(x)$, tuomet $f(kx + p)$ pirmykštė lygi $\frac{1}{k}F(kx + p)$ Norint įrodyti, kad funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija intervale I, reikia parodyti, kad visiems šio intervalo x $F'(x) = f(x)$, t. y. pasinaudoti apibrėžimu

Uždaviniai

Įrodyti, kad funkcija $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x$ yra pirmykštė funkcijai $f(x) = 1 + \cos 2x$ aibėje $\mathbf{R}$.

$F'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 + 1 = 1 + \cos 2x = f(x)$.

Gautoji lygybė teisinga visoms realiosioms x reikšmėms.

Rasti funkcijos $f(x) = 3x^2 - 1$ pirmykštę, kurios grafikas eina per tašką $M(1; -1)$.
Funkcijos $f(x) = 3x^2 - 1$ bet kurią pirmykštę galima užrašyti taip: $F(x) = x^3 - x + C$.
Ieškomos pirmykštės funkcijos grafikas eis per tašką $M(1; -1)$, jei $F(1) = -1$, t. y. $1^3 - 1 + C = -1 \Rightarrow C = -1$.
Atsakymas. $F(x) = x^3 - x - 1$.

22. Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas

Uždaviniai (tęsinys)

Rasti pirmykštę funkcijai $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$.

Pertvarkome $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$.

Sumos pirmykštė funkcija lygi pirmykščių sumai. Taigi pirmykštė $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$,

čia C – laisvoji konstanta.

Rasti neapibrėžtinį integralą $\int \sin 3x \cdot \cos x\, dx$.

$$\int \sin 3x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\cos 4x + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2x\right) = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Rasti pirmykštę funkcijai $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 1}$.

Pertvarkome $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{2x+1}\right)$. Taigi pirmykštė

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C.$$

Pirmykščių funkcijų lentelė

$f(x)$	$F(x)$	Intervalas I
k	$kx + C$	$\mathbf{R}$
x^{α} ($\alpha \neq -1$)	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$; $-\alpha \in \mathbf{N}$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $\alpha \notin \mathbf{Z}$, $x \in (0; +\infty)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$(-\infty; 0)$ arba $(0; +\infty)$
e^x	$e^x + C$	$\mathbf{R}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbf{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$

23. Apibrėžtinis integralas ir jo taikymas

Jeigu funkcija $f(x)$ tolydi skaičių ašies intervale I, turinčiame taškus $x = a$ ir $x = b$, tai reikšmių skirtumas $F(b) - F(a)$ (čia $F(x)$ – funkcijos $f(x)$ pirmykštė intervale I) vadinamas funkcijos $f(x)$ *apibrėžtiniu integralu* nuo a iki b	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Apibrėžtinis integralas yra skaičius

Pagrindinės savybės

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, jeigu a, b ir c – bet kurie intervalo I, kuriame funkcija $f(x)$ yra tolydi, taškai
$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

Kitos savybės

$\int_a^b f(px+q)dx = \frac{1}{p}\int_{pa+q}^{pb+q} f(t)dt$	Jeigu $f(x)$ nelyginė, tai $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
Jeigu $f(x)$ lyginė, tai $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$.	$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

Pavyzdžiai

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 (x^{1/2} + x^{-1/2})dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) + 2(4^{1/2} - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 + 2 \cdot 1 = \frac{20}{3}.$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3x+4)^2} = \frac{1}{3} \cdot \int_{3\cdot(-1)+4}^{3\cdot 2+4} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t}\Bigg|_1^{10} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{90}; \qquad 3x + 4 = t.$$

$$\int_0^1 \frac{25^x + 5^{x+1}}{10^{x-1}}dx = \int_0^1 \left(\frac{25}{10}\right)^x 10dx + \int_0^1 \left(\frac{5}{10}\right)^x 50dx =$$

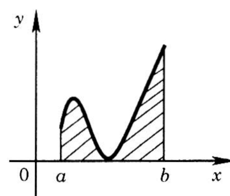
$$= 10\int_0^1 2{,}5^x dx + 50\int_0^1 0{,}5^x dx =$$

$$= 10 \cdot \frac{2{,}5^x}{\ln 2{,}5}\Bigg|_0^1 + 50 \cdot \frac{0{,}5^x}{\ln 0{,}5}\Bigg|_0^1 = \frac{15}{\ln 2{,}5} + \frac{25}{\ln 2}.$$

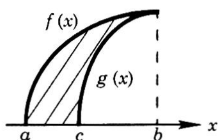
23. Apibrėžtinis integralas ir jo taikymas

Kreivinės trapecijos plotas

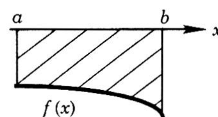
Figūra, apribota tiesėmis $y = 0$; $x = a$; $x = b$ ir tolydžiosios neneigiamos intervale $[a;\ b]$ funkcijos $f(x)$ grafiku, vadinama *kreivine trapecija*. Kreivinės trapecijos plotas $S = \int_a^b f(x)\,dx$



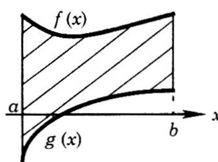
Plotų skaičiavimas



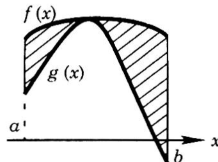
$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b g(x)\,dx$$



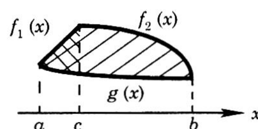
$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



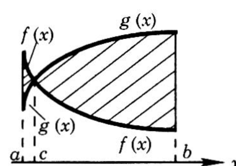
$f(x) \geq (g(x))$
intervale $[a,\ b]$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



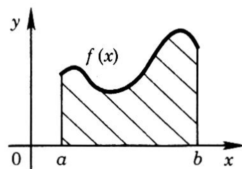
$$S = \int_a^c (f_1(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (f_2(x) - g(x))\,dx$$



$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$$

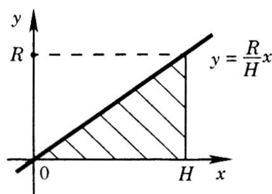
Sukinių tūrių skaičiavimas

Kreivinė trapecija (apie ašį $0x$)



$$V_{0x} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Kūgis



$$V_K = \pi \int_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Sukinių tūrių skaičiavimas (tęsinys)		
Rutulys	$y=\sqrt{R^2-x^2}$; $-R$, 0, R, x, y	$V_R=\pi\int\limits_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=2\pi\int\limits_{0}^{R}(R^2-x^2)dx=$ $=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3$
Kelias, kurį nueina materialusis taškas per laiką t_2-t_1 $(t_2>t_1)$ tiesiaeigiai judėdamas greičiu $v(t)$, lygus:		$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}v(t)dt.$

Priedas

Faktorialai ir laipsniai				
n	$n!$	2^n	3^n	5^n
0	1	1	1	1
1	1	2	3	5
2	2	4	9	25
3	6	8	27	125
4	24	16	81	625
5	120	32	243	3125
6	720	64	729	15625
7	5040	132	2187	78125
8	40320	264	6561	390625
9	362880	512	19683	1953125
10	3628800	1024	59049	9765625

Geometrija

1. Įrodymų teorijos elementai

„$A \Rightarrow B$" – duotoji teorema; „$B \Rightarrow A$" – atvirkštinė teorema; „ne $A \Rightarrow$ ne B" – priešingoji teorema; „ne $B \Rightarrow$ ne A" – teorema, atvirkštinė priešingajai	„*Būtina ir pakankama*" keičiama į „tada ir tik tada" Keturkampis *tada ir tik tada* yra lygiagretainis, *kai* jo įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau. Keturkampio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau *tada ir tik tada*, kai keturkampis yra lygiagretainis
Jeigu iš A išplaukia B, tai A yra *pakankama* sąlyga B, o B yra *būtina* A sąlyga. Jeigu iš A išplaukia B, o iš B išplaukia A, tai A yra *būtina ir pakankama* B sąlyga	Sąryšis yra *simetrinis*, jeigu iš to, kad duotas sąryšis A su B, išplaukia, kad yra sąryšis tarp B ir A. *Simetrinių sąryšių pavyzdžiai*: tiesių lygiagretumas, tiesių statmenumas, plokštumų lygiagretumas, plokštumų statmenumas, skaičių lygybė, figūrų lygybė
Būtina (bet nepakankama), kad keturkampis būtų lygiagretainis ir kad jo įstrižainės dalytų jį į du lygius trikampius. Kad keturkampis būtų lygiagretainis, *pakankama* (bet ne būtina), kad visos jo kraštinės būtų lygios. Kad sveikasis skaičius dalytųsi iš 3, *būtina ir pakankama*, kad jo skaitmenų suma dalytųsi iš 3. Kad trikampis būtų statusis, *būtina ir pakankama*, kad vienos jo kraštinės kvadratas būtų lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai	Sąryšis yra tranzityvus, jeigu iš to, kad A sutinka su B duotu santykiu, o B su C, seka, kad A sutinka su C duotu santykiu. *Tranzityvumo sąryšių pavyzdžiai*: skaičių lygybė, figūrų panašumas, sąryšiai „mažiau" ir „daugiau" (<; >), nesutampančių tiesių ir plokštumų lygiagretumas

PLANIMETRIJA

2. Kampai ir lygiagretumas

Kampu vadinama figūra, kurią sudaro du spinduliai, išeinantys iš vieno taško (*viršūnės*). Spindulys, išeinantis iš kampo viršūnės ir dalijantis ją pusiau, vadinamas kampo *pusiaukampine*	 $\angle BAC$ AM – pusiaukampinė $\Rightarrow$ $\angle BAM = \angle CAM$
Kampas vadinamas *ištiestiniu*, jeigu jo kraštinės yra vienoje tiesėje. *Laipsnis* – kampo dydis, lygus $\frac{1}{180}$ ištiestinio kampo daliai	 $\angle BAC$ – ištiestinis $A \in (BC)$ $\angle BAC = 180°$
Radianas – kampas, kurio dydis laipsniais yra $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$. Vieno radiano centrinis kampas remiasi į apskritimo lanką, kurio ilgis lygus apskritimo spinduliui. Centrinis kampas, kuris sutraukia a ilgio apskritimo lanką, lygus $\frac{a}{R} = \alpha$ radianų	 ilg. $\breve{AB} = R$ $\frac{\text{ilg. } C\breve{m}D}{R} = \alpha$ radianų
Kampas, lygus pusei ištiesinio kampo, vadinamas *stačiuoju* (90°). Kampas, mažesnis už statųjį, vadinamas *smailiuoju*. Kampas, didesnis už statųjį, bet mažesnis už ištiestinį, vadinamas *bukuoju*	 $\angle BAD = 90°$ – statusis $\angle CAB < 90°$ – smailusis $90° < \angle BAH < 180°$ – bukasis
Gretutiniai kampai Du kampai, kurių viena kraštinė bendra, o kitos dvi yra papildomieji spinduliai, vadinami *gretutiniais*. Gretutinių kampų suma lygi 180°. Kampas, gretutinis stačiajam, yra statusis	 $\angle BAC$ ir $\angle CAD$ – gretutiniai $\angle BAC + \angle CAD = 180°$
Kryžminiai kampai Du kampai, kurių vieno kraštinės yra kito kraštinių papildomieji spinduliai, vadinami *kryžminiais*. Kryžminiai kampai yra *lygūs*	 $\angle BAC, \angle HAD$ – kryžminiai $\angle BAH, \angle DAC$ – kryžminiai $\angle BAC = \angle HAD$

2. Kampai ir lygiagretumas

Kampas tarp tiesių	
Kampu tarp dviejų susikertančių tiesių vadinamas mažesnis kryžminis kampas. Tiesės, kurios sudaro statųjį kampą, vadinamos *statmenosiomis*	$\angle(a, b) = \angle AFB \leq \angle BFC$ $(\angle AFB = \angle BFC) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\angle(a, b) = 90°) \Rightarrow (a \perp b)$
Dvi plokštumos tiesės, neturinčios bendrų taškų, vadinamos *lygiagrečiosiomis*	$a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \varnothing$
Kai dvi tieses kerta trečioji (*kirstinė*), susidaro kampų poros: (1; 2); (3; 4); (5; 6); (7; 8) – *priešiniai*, (1; 8); (5; 3); (4; 6); (7; 2) – *atitinkamieji*, (1; 3); (2; 4); (5; 8); (7; 6) – *vienašaliai*	$a \cap c \quad b \cap c$
Lygiagrečių tiesių kirtimas kirstine	
Priešiniai kampai yra lygūs ($\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 6$; $\angle 7 = \angle 8$). Atitinkamieji kampai yra lygūs ($\angle 3 = \angle 5$; $\angle 1 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 7$; $\angle 4 = \angle 6$). Vienašalių kampų suma lygi 180° ($\angle 1 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 4 =$ $= \angle 6 + \angle 7 = 180°$)	
Lygiagretumo aksioma Per tašką, kuris nėra duotoje tiesėje, eina tik *viena tiesė*, *lygiagreti su duotąja*	
Lygiagrečių tiesių požymiai Jeigu dvi skirtingos tiesės *lygiagrečios su trečiąja*, tai jos lygiagrečios tarpusavyje (*lygiagretumo tranzityvumas*). Jeigu dvi tieses kerta trečioji ir *priešiniai kampai yra lygūs*, tai tos tiesės yra lygiagrečios. Jeigu dvi tieses kerta trečioji ir *atitinkamieji kampai yra lygūs*, tai tos tiesės yra lygiagrečios. Jeigu dvi tieses kerta trečioji ir *vienašalių kampų suma lygi 180°*, tai tos tiesės yra lygiagrečios	$(a \parallel b;\ b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$

2. Kampai ir lygiagretumas

Trikampio kampų suma lygi 180°	$m \parallel AC$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Faleso teorema

Jeigu vienoje tiesėje pažymėta keletas lygių atkarpų ir per jų galus nubrėžtos lygiagrečios tiesės, kertančios antrąją tiesę, tai ir antrojoje tiesėje gauname lygias atkarpas $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \Rightarrow$ $\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$	*Atkarpos dalijimas į lygias dalis* $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots =$ $= C_4C_5$ – laisvai pasirinktos lygios atkarpos $BC_5 \parallel C_4M_4 \parallel C_3M_3 \parallel C_2M_2 \parallel$ $\parallel C_1M_1 \Rightarrow AM_1 = M_1M_2 =$ $= M_2M_3 = M_3M_4 = M_4B$	*Išplėstinė Faleso teorema* Jeigu vienoje tiesėje pažymėta keletas atkarpų ir per jų galus nubrėžtos lygiagrečios tiesės, kertančios antrąją tiesę, tai antrojoje tiesėje gauname atkarpas, proporcingas duotosioms $c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4 \Rightarrow A_1A_2 : A_2A_3 :$ $: A_3A_4 = B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4$

3. Taškų aibės (geometrinė vieta) plokštumoje

Aibė taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų duotų taškų, yra atkarpõs, jungiančios duotus taškus, *vidurio statmuo* (jame yra apskritimų, einančių per du duotus taškus, centrai)	$AO = OB$; $c \perp AB$ $(X \in c) \Leftrightarrow (AX = XB)$
Aibė taškų, vienodai nutolusių nuo duoto kampo (mažesnio už išplėstinį) kraštinių, yra to *kampo pusiaukampinė* (joje yra apskritimų, liečiančių kampo kraštines, centrai)	$\angle AOC = \angle BOC$ $(X \in OC) \Leftrightarrow (\rho(X, OA) =$ $= \rho(X, OB))$*

* $\rho(X, OA)$ ir $\rho(X, OB)$ – žymimas atstumas nuo taško iki tiesės.

3. Taškų aibės (geometrinė vieta) plokštumoje

Aibė taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų lygiagrečių tiesių, yra *tiesė, lygiagreti su duotosiomis,* einanti per tiesių bendrojo statmens vidurio tašką (joje yra apskritimų, liečiančių duotąsias tieses, centrai)	$a \parallel b$, $c \parallel a$ $(\rho(X, a) = \rho(X, b)) \Leftrightarrow (X \in c)$
Aibė taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų susikertančių tiesių, yra *dvi viena kitai statmenos tiesės,* kuriose yra kryžminių kampų, susidariusių kertantis duotosioms tiesėms, *pusiaukampinės* (jose yra apskritimų, liečiančių duotąsias tieses, centrai)	$a \cap b$ $(\rho(X, a) = \rho(X, b)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X \in m \\ \text{arba} \\ X \in n \end{array}\right.$
Aibė taškų, duotu atstumu nutolusių nuo taško, yra *apskritimas,* kurio centras – duotasis taškas	$\rho(X, O) = a$
Aibė taškų, duotu atstumu nutolusių nuo tiesės, yra *dvi tiesės,* lygiagrečios su duotąja	$\rho(X, a) = \rho(Y, a) = m$ $b \parallel a$; $c \parallel a$
Stačiųjų trikampių su duota įžambine viršūnių aibė yra *apskritimas,* kurio skersmuo – duotoji įžambinė (neimant įžambinės galų)	$\angle AXB = 90°$
Aibė taškų, iš kur duotoji atkarpa matyti duotu kampu, yra du simetriniai lankai, kurie remiasi į duotąją atkarpą (neimant lankų galų)	$\angle AXB = \angle AYB$
Apolonijaus apskritimas Aibė taškų M, tokių, kad $AM = kMB$, yra apskritimas, kurio skersmuo N_1N_2 yra tiesėje AB, ir $AN_1 : N_1B = k \quad AN_2 : N_2B = k \ (k \neq 1)$	

4. Trikampis

Trikampio nelygybė

Kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą

$a - b < c < a + b$, čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, be to, $a > b$

Trikampio priekampis lygus dviejų jam negretutinių vidaus kampų sumai

$\angle BAM = \angle B + \angle C$

Trikampio kampų suma lygi 180°

Trikampyje prieš ilgesnę kraštinę yra didesnis kampas, prieš didesnį kampą – ilgesnė kraštinė

$a^2 + b^2 > c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$	$a^2 + b^2 < c^2$
smailusis	statusis	bukasis

Trikampių lygybės požymiai

Pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų	Pagal kraštinę ir du kampus prie jos	Pagal tris kraštines

Lygių trikampių *atitinkami elementai lygūs*

Trikampių panašumo požymiai

Pagal du kampus	Pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų	Pagal tris kraštines

4. Trikampis

Tiesė, lygiagreti su trikampio kraštine, atkerta trikampį, panašų į duotąjį. Panašių trikampių *atitinkami tiesiniai elementai proporcingi atitinkamoms kraštinėms.* Panašių trikampių *perimetrų santykis lygus atitinkamų kraštinių santykiui.* Panašių trikampių *plotų santykis lygus atitinkamų kraštinių kvadratų santykiui*	$PQ \parallel AC \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta PBQ \Rightarrow \Rightarrow \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PQ} = \frac{BC}{BQ} = k$ – panašumo koeficientas; $PP_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \frac{AA_1}{PP_1} = k$; $\frac{AB + AC + BC}{PB + PQ + BQ} = k$; $\frac{S_{ABC}}{S_{PBQ}} = k^2$

Panašių trikampių pavyzdžiai

$\Delta ABC \backsim \Delta NBM$; $k = \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BM}$	$\Delta ABC \backsim \Delta AB_1B$; $k = \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BB_1}$

Pusiaukraštinė

Trikampio *pusiaukraštine* vadinama atkarpa, jungianti trikampio kraštinės vidurį su prieš ją esančio kampo viršūne	$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$
Trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške (trikampio *svorio centre*) ir dalijasi tame taške santykiu 2:1 (nuo viršūnės)	$AA_1^2 = m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$
Pusiaukraštinė dalija trikampį į du lygiapločius trikampius. Trys pusiaukraštinės dalija trikampį į šešis lygiapločius trikampius	

Pusiaukampinė

Trikampio vidaus kampo pusiaukampinės dalis vadinama trikampio *pusiaukampine.* Visos trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške – *įbrėžto į trikampį apskritimo centre.* Pusiaukampinė dalija priešingą kraštinę į dalis, proporcingas gretimoms kraštinėms	$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CA_1 = \frac{ab}{b+c}$; $A_1B = \frac{ac}{b+c}$; $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$; $AA_1^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C$

4. Trikampis

Trikampio vidinio ir jam gretutinio priekampio pusiaukampinės yra statmenos. Nelygiašonio trikampio priekampio pusiaukampinė kerta priešingosios kraštinės pratęsimą taške, kurio atstumai nuo kraštinės kraštų proporcingi kitoms dviem kraštinėms	$\angle LAM = 90°$ $\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC}$
Aukštinė	
Atkarpa statmens, nuleisto iš trikampio viršūnės į tiesę, kurioje yra priešingoji kraštinė, vadinama *aukštine.* Visos trikampio aukštinės kertasi viename taške – trikampio *ortocentre*	AA_1, BB_1, CC_1 – aukštinės ΔABC $AA_1 = h_a$; $BB_1 = h_b$; $CC_1 = h_c$; H – ortocentras $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ r – įbrėžtinio apskritimo spindulys
Vidurio linija	
Atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama trikampio *vidurio linija.* Vidurio linija *lygiagreti su trečiąja kraštine* ir lygi jos *pusei*	$PQ \parallel AB$ $PQ = \frac{1}{2}AB$
Vidurio statmuo Tiesė, statmena trikampio kraštinei ir dalijanti ją pusiau, vadinama *vidurio statmeniu.* Visi trikampio kraštinių vidurio statmenys kertasi viename taške – *apibrėžto* apie trikampį *apskritimo centre.* Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą ir tik vieną. Trikampio vidurio statmenų susikirtimo taškas yra trikampio, kurį sudaro duotojo trikampio vidurio linijos, aukštinių susikirtimo taškas	$AO = BO = CO = l$

4. Trikampis

Trikampio plotas

$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Herono formulė)

$S_\Delta = rp$

$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – pusperimetris

r – įbrėžtinio apskritimo spindulys

R – apibrėžtinio apskritimo spindulys

Kosinusų teorema

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso sandauga

Sinusų teorema

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Trikampio kraštinės poporcingos prieš jas esančių kampų sinusams

Įbrėžtinis apskritimas

Į kiekvieną trikampį galima *įbrėžti* apskritimą ir tik *vieną*. Jo centras – *pusiaukampinių susikirtimo taškas.*

Spindulys (r) apskaičiuojamas pagal formulę:

$r = \frac{S}{p}$

$r = (p-a)\cdot\tan\frac{A}{2} = (p-b)\cdot\tan\frac{B}{2} = (p-c)\cdot\tan\frac{C}{2}$

$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{S}{p}$

p – pusperimetris

$OT \perp AC$;
$OV \perp AB$, $OW \perp BC$
$AV = AT = p - a$
$BV = BW = p - b$
$CW = CT = p - c$

Apibrėžtinis apskritimas

Apie kiekvieną trikampį galima *apibrėžti* apskritimą ir tik *vieną*. Jo centras – *vidurio statmenų* į trikampio kraštines *susikirtimo taškas.*

Spindulys (R) apskaičiuojamas pagal formulę:

$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$

$R = \frac{abc}{4S}$

$AB_1 = B_1C$; $AC_1 = C_1B$;
$BA_1 = A_1C$
$OA_1 \perp BC$; $OB_1 \perp AC$; $OC_1 = AB$
$OA = OB = OC = R$

4. Trikampis

Statusis trikampis

Stačiojo trikampio kraštinė, esanti prieš statųjį kampą, vadinama *įžambine*, kitos dvi kraštinės vadinamos *statiniais*

c įžambinė, *a* statinys, *b* statinys

Pitagoro teorema
Įžambinės ilgio kvadratas lygus statinių ilgių kvadratų sumai:
$c^2 = a^2 + b^2$

Stačiojo trikampio savybės

Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi pusei įžambinės. Tik apie statųjį trikampį apbrėžto apskritimo centras yra trikampio kraštinėje (sutampa su įžambinės vidurio tašku)

$OA = OB = OC = R = \frac{1}{2}c$

Stačiojo trikampio plotas

$S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch$, h – aukštinė, nubrėžta į įžambinę

Stačiojo trikampio smailiųjų kampų trigonometrinės funkcijos

Stačiojo trikampio smailiojo kampo *sinusu* vadinamas prieš tą kampą esančio statinio ir įžambinės santykis.
Stačiojo trikampio smailiojo kampo *kosinusu* vadinamas prie to kampo esančio statinio ir įžambinės santykis.
Stačiojo trikampio smailiojo kampo *tangentu* vadinamas prieš tą kampą esančio statinio ir prie to kampo esančio statinio santykis.
Stačiojo trikampio smailiojo kampo *kotangentu* vadinamas prie to kampo esančio statinio ir prieš tą kampą esančio statinio santykis

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\beta = 90° - \alpha$

$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha$

$\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$

$\tan\beta = \tan(90° - \alpha) = \frac{b}{a} = \cot\alpha$

Pavyzdys
$\sin 54° = \cos 36°$; $\tan 89° = \cot 1°$.

Kai kurių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmės

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	neegzistuoja	0

4. Trikampis

Stačiojo trikampio požymiai

Jeigu vienos trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, tai toks trikampis yra statusis.
Jeigu trikampio pusiaukraštinė lygi pusei atitinkamos kraštinės, tai toks trikampis yra statusis

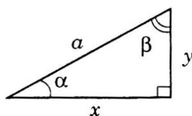
Stačiųjų trikampių sprendimas

Duota : įžambinė ir smailusis kampas.

$x = a \cos \alpha$

$y = a \sin \alpha$

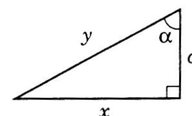
$\beta = 90° - \alpha$



Duota: statinys ir smailusis kampas.

$x = a \tan \alpha$

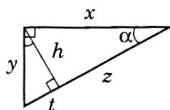
$y = \frac{a}{\cos \alpha}$



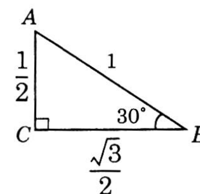
Duota: aukštinė, nuleista į įžambinę, ir smailusis kampas.

$y = \frac{h}{\cos \alpha}$ $\quad x = \frac{h}{\sin \alpha}$

$z = h \cot \alpha$ $\quad t = h \tan \alpha$



Statinys, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės



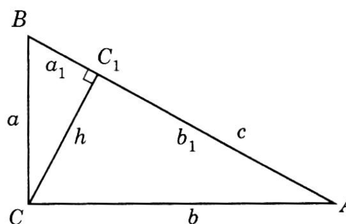
Stačiojo trikampio sąsajos

$BC^2 = BC_1 \cdot AB;\ a^2 = a_1 \cdot c$

$AC^2 = AC_1 \cdot AB;\ b^2 = b_1 \cdot c$

$CC_1^2 = BC_1 \cdot C_1A;\ h^2 = a_1 \cdot b_1$

$h = \frac{ab}{c}$

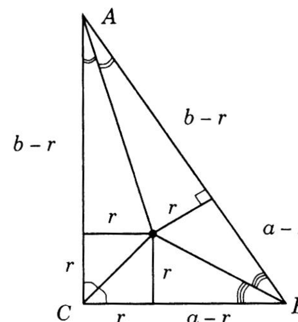


Įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių skaičiavimas

$2R = AB = c = (b - r) + (a - r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = a + b - 2r \Rightarrow r = \frac{a + b - c}{2} = p - c$

$2(R + r) = a + b$



4. Trikampis

Trikampiai skirstomi: pagal kraštines – į *įvairiakraščius*, *lygiašonius* ir *lygiakraščius*; pagal kampus – į *smailiuosius*, *bukuosius* ir *stačiuosius*

Trikampiai	įvairiakraščiai	lygiašoniai	lygiakraščiai
smailieji			
bukieji			—
statieji		$45°$	—

Lygiašonis trikampis

Trikampis, kurio dvi kraštinės lygios, vadinamas *lygiašoniu* trikampiu.

Bendra lygių kraštinių viršūnė vadinama lygiašonio trikampio *viršūne*, o trečioji kraštinė – *pagrindu*.

Lygiašonio trikampio savybės

Kampai prie pagrindo lygūs.

Aukštinė, nuleista iš lygiašonio trikampio viršūnės, yra pusiaukraštinė ir pusiaukampinė (simetrijos ašis).

Aukštinės (pusiaukraštinės, pusiaukampinės), nuleistos į šonines kraštines, lygios

$$\begin{matrix} AA_1 \perp BC \\ CC_1 \perp AB \end{matrix} \Leftrightarrow AA_1 = CC_1$$

Jei trikampis turi tas savybes, jis yra lygiašonis

Taisyklingasis trikampis

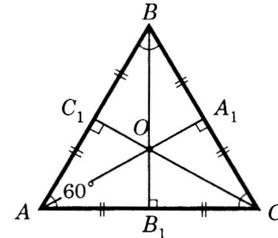
Trikampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *taisyklinguoju* trikampiu (*lygiakraščiu*)

Taisyklingasis trikampis (tęsinys)

Taisyklingojo trikampio savybės

Visi lygiakraščio trikampio kampai lygūs 60°.
Tik taisyklingojo trikampio pusiaukampinės, pusiaukraštinės, aukštinės, vidurio statmenys susikerta viename taške. Šis taškas vadinamas *taisyklingojo trikampio centru* ir yra įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centras.
Taisyklingojo trikampio centras dalija jo aukštines santykiu 2 : 1 skaičiuojant nuo viršūnės.
Tik taisyklingojo trikampio:

$$R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$AB = BC = AC = a$
$AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

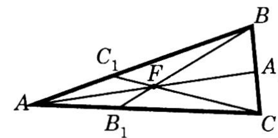
Lygiakraščio trikampio plotas

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Kitos trikampio teoremos

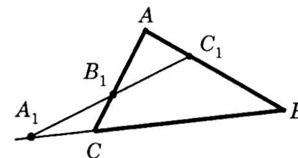
Čevos (Ceva) teorema
Atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



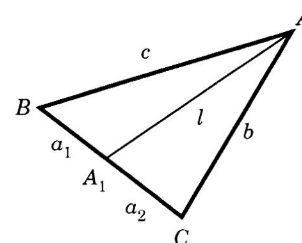
Menelajo teorema
Taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$$

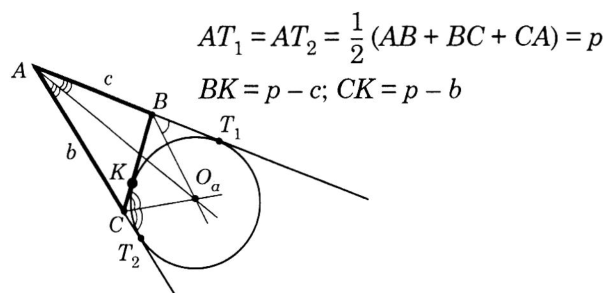


Stiuarto (Stewart) teorema
$AA_1 = l$, tuomet

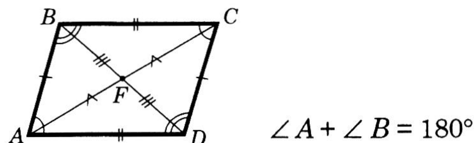
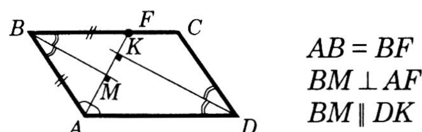
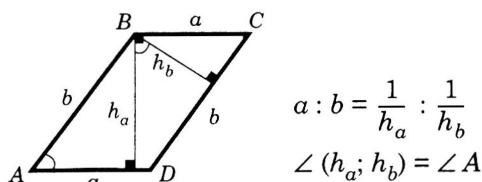
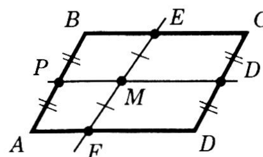
$$l^2 = \frac{b^2a_1 + c^2a_2}{a_1 + a_2} - a_1a_2$$



4. Trikampis

Kitos teoremos apie trikampius (tęsinys)	
Pribrėžtinių apskritimų centrai yra trikampio vidaus kampo pusiaukampinės ir dviejų priekampių pusiaukampinių susikirtimo taškuose	 $AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = p$ $BK = p - c$; $CK = p - b$

5. Lygiagretainis

Lygiagretainiu vadinamas keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios	
Lygiagretainio savybės Įstrižainė dalija lygiagretainį į du lygius trikampius. Priešingosios lygiagretainio kraštinės yra lygios. Lygiagretainio gretimųjų kampų suma lygi 180°. Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau	 $\angle A + \angle B = 180°$
Kitos lygiagretainio savybės Lygiagretainio kampo pusiaukampinė atkerta nuo jo lygiašonį trikampį. Gretimųjų lygiagretainio *kampų pusiaukampinės* yra statmenos, o priešingųjų kampų pusiaukampinės lygiagrečios arba yra vienoje tiesėje. Lygiagretainio *įstrižainės* dalija jį į keturis lygiapločius trikampius	 $AB = BF$ $BM \perp AF$ $BM \parallel DK$
Lygiagretainio *aukštinės* yra *atvirkščiai proporcingos atitinkamoms* lygiagretainio *kraštinėms.* Lygiagretainio aukštinės, nuleistos iš vienos viršūnės, sudaro kampą, lygų gretimosios lygiagretainio viršūnės kampui	 $a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$ $\angle (h_a; h_b) = \angle A$
Bet kurios atkarpos, kurios galai yra priešingosiose lygiagretainio kraštinėse, vidurio taškas yra tiesėje, einančioje per kitų dviejų lygiagretainio kraštinių vidurio taškus	

5. Lygiagretainis

Lygiagretainio požymiai

Jei keturkampio dvi *priešingosios kraštinės yra lygios ir lygiagrečios*, tai tas keturkampis – lygiagretainis.
Jei keturkampio *priešingosios kraštinės lygios*, tai tas keturkampis – lygiagretainis.
Jei keturkampio *įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau*, tai tas keturkampis – lygiagretainis

Lygiagretainio perimetras $P = 2a + 2b$

Lygiagretainio plotas

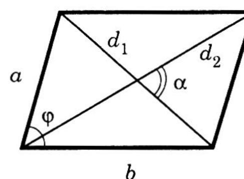
$S = ah_a = bh_b$

$S = ab \sin \varphi$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$

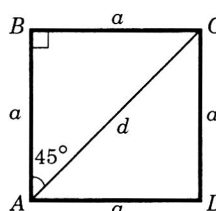
Lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi keturių lygiagretainio kraštinių kvadratų sumai:

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$



Kvadratas

Kvadratu vadinamas stačiakampis, kurio visos kraštinės lygios (rombas, kurio visi kampai statieji).
Kvadratui būdingos visos rombo ir stačiakampio savybės.
Kvadratas – taisyklingasis keturkampis



$d = a\sqrt{2}$

$r = \frac{1}{2} a$

$R = \frac{1}{2} d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Kvadrato plotas

$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$

Rombas

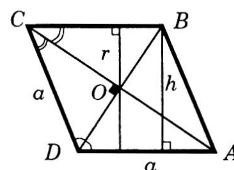
Rombu vadinamas lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios

Rombo savybės

Rombo įstrižainės yra statmenos viena kitai.
Rombo įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinėse.
Rombo aukštinės yra lygios.
Į rombą galima įbrėžti apskritimą

$r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} a \sin A.$

Rombui būdingos visos lygiagretainio savybės



$h = a \sin A = a \sin B = 2r$

Rombas (tęsinys)

Rombo požymiai

Jeigu lygiagretainio įstrižainės yra statmenos viena kitai, tai tas lygiagretainis – rombas.
Jeigu lygiagretainio įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinėse, tai tas lygiagretainis – rombas.
Jeigu keturkampio kraštinės lygios, tai tas keturkampis – rombas.

Rombo plotas	$S = ha = a^2 \sin A = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Stačiakampis

Stačiakampiu vadinamas lygiagretainis, kurio visi kampai statieji.

Stačiakampio savybės Stačiakampio įstrižainės lygios. Apie stačiakampį galima apibrėžti apskritimą $R = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$. Stačiakampiui būdingos visos lygiagretainio savybės	$AC = BD = d$ $OA = OB = OC = OD =$ $= R = \frac{1}{2} d$ $d^2 = a^2 + b^2$

Stačiakampio požymiai

Jeigu lygiagretainio įstrižainės lygios, tai tas lygiagretainis – stačiakampis.
Jeigu lygiagretainio vienas kampas statusis, tai tas lygiagretainis – stačiakampis.
Jeigu keturkampio trys kampai statieji, tai tas keturkampis – stačiakampis.

Stačiakampio plotas	$S = ab$ $\quad S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$

6. Trapecija

Trapecija vadinamas keturkampis, kurio dvi kraštinės lygiagrečios, o kitos dvi nelygiagrečios.

Trapecijos elementai BC ir AD – ilgesnysis ir trumpesnysis pagrindai, AB ir CD – šoninės kraštinės, AC ir BD – įstrižainės, MN – vidurio linija, $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Trapecijos aukštinė BB_1 – atstumas tarp pagrindų tiesių	$BB_1 \perp AD$, $BB_1 = h$

6. Trapecija

Trapecijos plotas $S = h \cdot MN = \frac{1}{2}h(BC + AD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \times$ $\times \sin \angle(AC, BD)$	
Trapecijos kraštinių nelygybė $AB + CD > AD - BC$ *Trapecijos įstrižainių nelygybė* $AC + BD > AD + BC$	$CD_1 \parallel BD$ $h = \frac{2S_{ACD_1}}{AD_1}$ $d_1 + d_2 > b + a$
Trapecijos dalijimas į lygiagretainį ir trikampį	
$BB_1 \parallel CD$; $BCDB_1$ – lygiagretainis; $BC = a = B_1D$; $AD = b \Rightarrow AB_1 = b - a$	$CC_1 \parallel AB$; $ABCC_1$– lygiagretainis
Jeigu žinomos trapecijos kraštinės, tai pagal Herono formulę galima rasti atkertamo trikampio (S_Δ) plotą, trapecijos aukštinę ($h = \frac{2S_\Delta}{AB_1}$ arba $h = \frac{2S_\Delta}{C_1D}$) ir trapecijos plotą	
Trapecijos braižymas, kai žinomi pagrindai ir šoninės kraštinės	
Tarkime, duotos tokios atkarpos a, b, l_1, l_2, kad $l_1 + l_2 > b - a$ ($b > a$) (trapecijos kraštinių nelygybė). 1. Braižome ΔABB_1, kurio kraštinės yra $b - a$, l_1, l_2. 2. Per tašką B brėžiame tiesę $BX \parallel AB_1$. 3. Spinduliuose BX ir B_1Y atidedame atkarpas $BC = B_1D = a$. Trapecija $ABCD$ – ieškomoji	
Keturių trapecijos taškų teorema Trapecijos pagrindų vidurio taškai, įstrižainių susikirtimo taškas ir šoninių kraštinių tęsinių susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje	$BL = LC$ $AT = TD$
Trapecijos trikampių savybės: $\Delta\ BOC \sim \Delta\ DOA$ $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{a}{b}$; $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ $S_{AOB} = S_{COD}$	

6. Trapecija

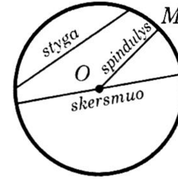
Trapecijos braižymas, kai žinomi pagrindai ir šoninės kraštinės (tęsinys)	
Atkarpa, lygiagreti su pagrindais ir einanti per įstrižainių susikirtimo tašką $OQ = OP = \dfrac{ab}{a+b}$; $PQ = \dfrac{2ab}{a+b}$	B a C P Q O A D b
Atkarpa, lygiagreti su pagrindais ir dalijanti trapeciją į lygiaplotes dalis $FP = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$	B a C F P A b D $S_{AFPD} = S_{FBCP}$; $FP \parallel BC$
Į trapeciją galima įbrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai pagrindų suma lygi šoninių kraštinių sumai $BC + AD = AB + CD$	B C O A D
Lygiašonė trapecija	
Lygiašone trapecija vadinama tokia, kurios šoninės kraštinės lygios	B C O d_1 d_2 A D
Lygiašonės trapecijos savybės Lygiašonės trapecijos įstrižainės lygios ($d_1 = d_2$). Lygiašonės trapecijos kampai prie to paties pagrindo lygūs. Tik apie lygiašonę trapeciją galima apibrėžti apskritimą; jis sutampa su apskritimu, apibrėžtu apie bet kurį trikampį, kurio viršūnės yra trapecijos viršūnėse. Apskritimo centras yra trapecijos pagrindų vidurio statmenyje. Jeigu apibrėžtinio apskritimo centras yra trapecijos pagrinde, tai jo skersmuo yra statmenas šoninei kraštinei	B C O A D $AO = BO = CO = DO = R$ B C A R O R D
Į lygiašonę trapeciją galima įbrėžti apskritimą, jeigu trapecijos šoninė kraštinė lygi vidurio linijai	B C r r r r O A D $AB = \dfrac{BC+AD}{2}$; $2r = h$

7. Apskritimas

Apskritimu vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško (apskritimo *centro*).

Atkarpos apskritime

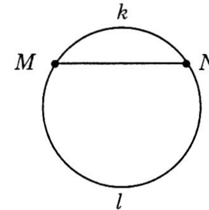
Bet kuriam apskritimo, kurio centras O, taškui M teisinga lygybė: $OM = R$ (atkarpa OM – apskritimo *spindulys*).
Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus, vadinama *styga*.
Styga, einanti per apskritimo centrą, vadinama *skersmeniu* (D):
$D = 2R$



Apskritimo ilgis
$C = 2\pi R$

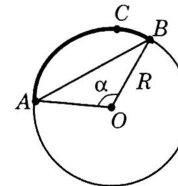
Apskritimo lankas
Apskritimo dalis tarp dviejų jo taškų vadinama *lanku*

Bet kurie apskritimo taškai M ir N apibrėžia du lankus: $\breve{MkN}$ ir $\breve{MlN}$. Bet kurį iš šių lankų jungia *styga* MN.
Lygius lankus jungia lygios stygos

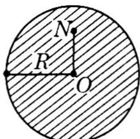
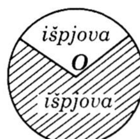
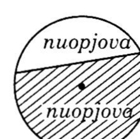


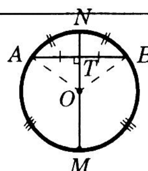
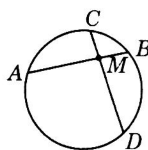
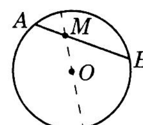
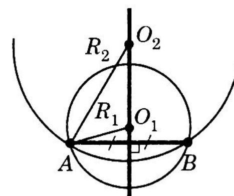
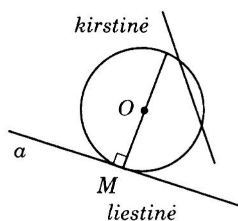
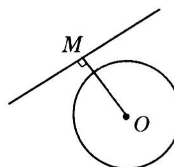
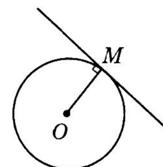
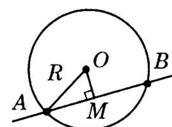
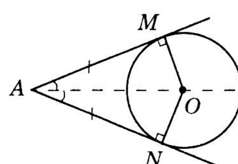
Lanko ilgis

$\breve{ACB} = R\alpha$, čia α – kampo AOB didumas radianais;
$\breve{ACB} = R\dfrac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}$, čia φ – kampo AOB didumas laipsniais



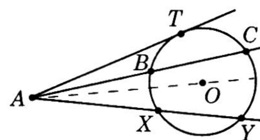
Skritulys

Skrituliu vadinama plokštumos dalis, apribota apskritimu. Visiems skritulio taškams teisinga nelygybė: $ON \leq R$  	Skritulio dalis, apribota lanku ir dviem spinduliais, vadinama skritulio *išpjova*. Bet kurie du spinduliai apibrėžia dvi išpjovas  	Skritulio dalis, apribota lanku ir jį jungiančia styga, vadinama *nuopjova*. Bet kuri styga dalija skritulį į dvi nuopjovas. Nuopjova, apribota skersmeniu, vadinama *pusskrituliu* 

Skritulys (tęsinys)	
Skersmuo, statmenas stygai, dalija tą stygą ir ja apibrėžiamus lankus pusiau. Jeigu skersmuo dalija stygą, kuri nesutampa su skersmeniu, pusiau, tai jis jai statmenas	 $MN \perp AB \Rightarrow AT = BT$
Jeigu dvi stygos AB ir CD turi bendrą tašką M, tai $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Sandauga atkarpų, į kurias dalija stygą duotas apskritimo vidaus taškas M, yra pastovus dydis ir lygus $(R + OM)(R - OM)$	  $AM \cdot MB = (R + OM)(R - OM) = R^2 - OM^2$
Visų apskritimų, einančių per du duotus taškus, centrai yra atkarpos, jungiančios tuos du duotus taškus vidurio statmenyje	
Tiesė ir apskritimas	
Tiesė, turinti vieną bendrą tašką su apskritimu, vadinama apskritimo *liestine*; tiesė, turinti du bendrus taškus su apskritimu – *kirstinė*. Tiesė liečia apskritimą tada ir tik tada, kai skersmuo, einantis per bendrą tiesės ir apskritimo tašką, yra statmenas tai tiesei	 $OM \perp a$
Jeigu atstumas OM nuo apskritimo centro iki tiesės: *didesnis už spindulį* – tiesė neturi bendrų taškų su apskritimu; *lygus spinduliui* – tiesė liečia apskritimą; *mažesnis už spindulį* – apskritimas išpjauna tiesėje stygą, kurios ilgis $2 \cdot \sqrt{R^2 - OM^2}$	 $OM > R$  $OM = R$  $OM < R$
Jeigu apskritimas liečia duotojo kampo kraštines, tai: apskritimo centras yra kampo pusiaukampinėje, liestinių atkarpos lygios tarpusavyje	 $AM = AN$

Tiesė ir apskritimas (tęsinys)

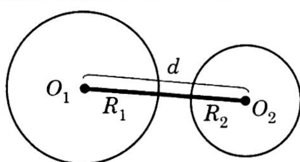
Jeigu iš taško, esančio šalia apskritimo, nubrėžiame liestinę ir kirstinę, tai *liestinės atkarpos kvadratas lygus visos kirstinės atkarpos ir jos išorinės dalies sandaugai*



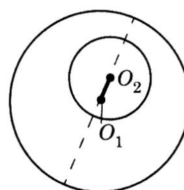
$AT^2 = AB \cdot AC =$
$= AX \cdot AY =$
$= (OA - R)(OA + R) =$
$= OA^2 - R^2$

Du apskritimai

Jeigu atstumas d tarp dviejų apskritimų centrų didesnis už apskritimų spindulių sumą ($R_1 + R_2 < d$) arba mažesnis už skirtumą ($R_1 - R_2 > d$), tai apskritimai neturi bendrų taškų



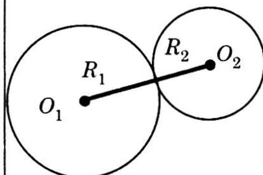
$R_1 + R_2 < d$



$R_1 - R_2 > d$

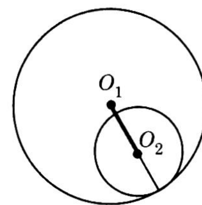
Jeigu $R_1 + R_2 = d$ arba $R_1 - R_2 = d$, tai apskritimai liečiasi

išorinis lietimasis



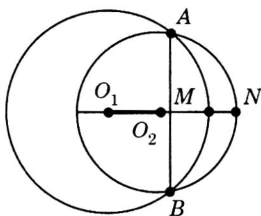
$R_1 + R_2 = d$

vidinis lietimasis

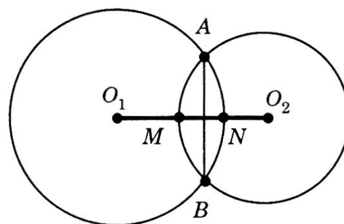


$R_1 - R_2 = d$

Jeigu $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$, tai apskritimai turi bendrą stygą



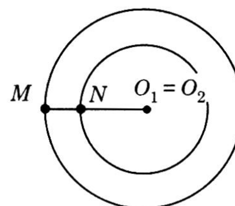
$MN = R_2 - R_1 + d$



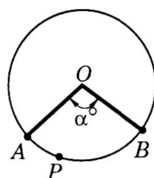
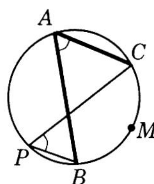
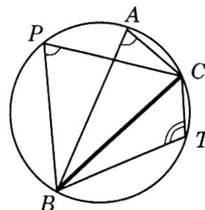
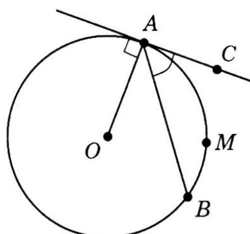
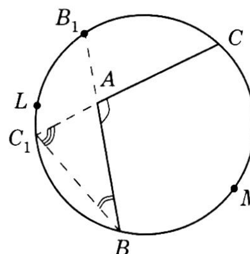
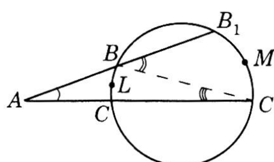
$MN = R_1 + R_2 - d$

$AB = \dfrac{4S_{O_1AO_2}}{d}$

Du apskritimai, turintys bendrą centrą, vadinami *koncentriniais*

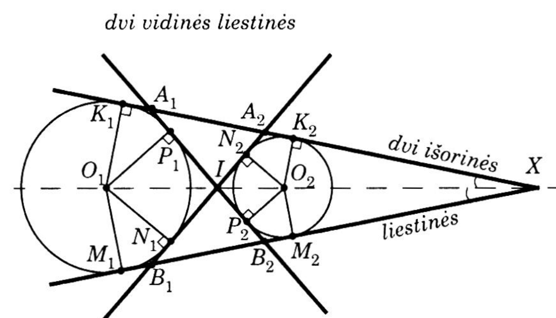
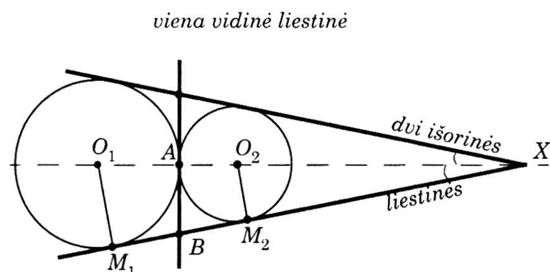


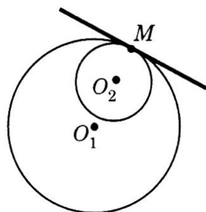
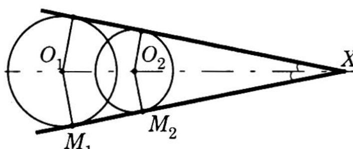
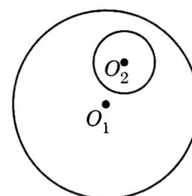
$MN = R_1 - R_2$
$d = 0$

Apskritimo kampai	
Apskritimo *centriniu kampu* vadinamas kampas tarp dviejų spindulių. Centrinio kampo laipsninis matas lygus lanko, į kurį jis remiasi, laipsniniam matui (matuojamas lanku, į kurį jis remiasi)	 $\angle AOB = \overset{\smile}{APB} = \alpha^\circ$
Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės yra apskritimo stygos, vadinamas *įbrėžtiniu kampu.* Įbrėžtinis kampas matuojamas puse lanko, į kurį jis remiasi. Įbrėžtinis kampas, besiremiantis į skersmenį, yra statusis. Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į vieną ir tą patį lanką, lygūs	 $\angle BAC = \angle BPC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BMC}$ $\angle BAC = 90^\circ$
Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į vieną ir tą pačią *stygą*, arba lygūs, arba jų suma lygi 180°	 $\angle BPC = \angle BAC$ $\angle BAC + \angle BTC = 180^\circ$
Kampas tarp *stygos ir liestinės* matuojamas *puse* apskritimo lanko, esančio tame kampe.	 $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BMA}$
Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo viduje (kampas tarp dviejų stygų)	 $\angle BAC = \angle CC_1B + \angle B_1BC_1 = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BMC} + \overset{\smile}{B_1LC_1})$
Kampas, kurio viršūnė yra šalia apskritimo (kampas tarp dviejų kirstinių)	 $\angle BAC = \angle C_1BB_1 - \angle CC_1B = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{B_1MC_1} - \overset{\smile}{BLC})$

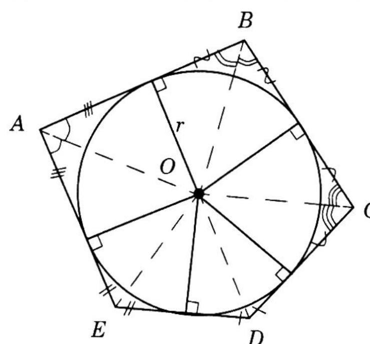
7. Apskritimas

Dviejų apskritimų bendroji liestinė

Jeigu vienas apskritimas yra šalia kito, tai jie turi *keturias bendras liestines*	Jeigu vienas apskritimas liečia kitą iš išorės, tai jie turi *tris bendras liestines*
	
$d = O_1O_2 > R_1 + R_2$ $IO_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}d$; $M_1M_2^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$ $IO_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}d$; $N_1N_2^2 + (R_1 + R_2)^2 = d^2$	$d = R_1 + R_2$ $M_1M_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$ $M_1B = BA = BM_2$

Jeigu vienas apskritimas liečia kitą iš vidaus, tai jie turi *vieną bendrą liestinę*	Jeigu apskritimai kerta vienas kitą, tai jie turi *dvi bendras liestines* (dvi išorines liestines, vidinių liestinių nėra)	Jeigu vienas apskritimas yra kito viduje, tai *bendrų liestinių nėra*
	 Jeigu $O_1O_2 = d$, tai $M_1M_2^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$	

Įbrėžtinis apskritimas

Apskritimas vadinamas *įbrėžtu į daugiakampį*, jeigu jis liečia visas daugiakampio kraštines. Jo centras priklauso visoms šio daugiakampio vidaus kampų pusiaukampinėms. Spindulį galima apskaičiuoti pagal formulę $r = \frac{S}{p}$, čia S – plotas, p – daugiakampio pusperimetris. Ne į kiekvieną daugiakampį galima įbrėžti apskritimą	

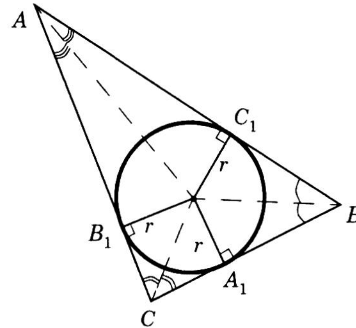
Įbrėžtinis apskritimas (tęsinys).

Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą ir tik vieną. Jo centras yra vidaus kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas, o spindulys apskaičiuojamas pagal formules:

$$r = \frac{S}{p},$$

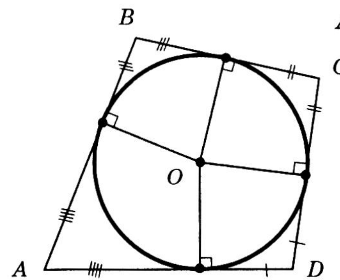
$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2},$$

čia S – trikampio plotas, o p – jo pusperimetris



$AB_1 = AC_1 = p - a$
$BC_1 = BA_1 = p - b$
$CA_1 = CB_1 = p - c$
$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – pusperimetris

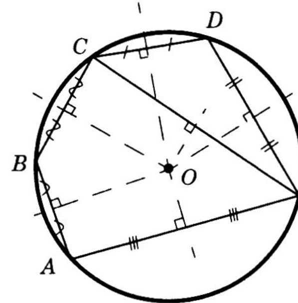
Į iškiląjį keturkampį galima įbrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingų kraštinių ilgių sumos lygios



$AB + CD = BC + AD$

Apibrėžtinis apskritimas

Apskritimas vadinamas *apibrėžtu apie daugiakampį*, jei jis eina per visas daugiakampio viršūnes. Jo centras yra visuose šio daugiakampio kraštinių vidurio statmenyse (ir įstrižainėse). Spindulys apskaičiuojamas kaip apibrėžto apie trikampį, kurio viršūnės yra bet kurios trys duotojo daugiakampio viršūnės, apskritimo spindulys



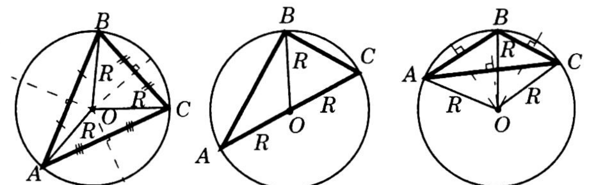
$OA = OB = OC =$
$= OD = OE = R$

Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą ir tik vieną. Jo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas, o spindulys apskaičiuojamas pagal formules:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S},$$

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, S – jo plotas



$\angle B \leqslant 90° \Rightarrow \angle AOC \leqslant 2B$

$\angle B > 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOC = 180° - 2B$

7. Apskritimas

Apibrėžtinis apskritimas (tęsinys).	
Apie keturkampį galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingųjų kampų suma lygi 180°	A, B, C, D $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$
Ptolemėjaus teorema Į apskritimą įbrėžto keturkampio įstrižainių sandauga lygi priešingųjų kraštinių sandaugų sumai: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$	B, C, A, D

8. Plotai

Lygių figūrų plotai lygūs. Jeigu figūra sudaryta iš keleto figūrų, neturinčių bendrų vidinių taškų, tai jos plotas lygus figūrų plotų sumai. Figūros, turinčios vienodus plotus, vadinamos *lygiadydėmis*	
Kvadrato plotas $S = a^2$	**Stačiakampio plotas** $S = a \cdot b$
Lygiagretainio plotas $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ $S = ab \sin \alpha$	B, C, h_b, b, h_a, α, A, B_1, a, D B, C, b, h_a, α, A, a, D, B_1
Trikampio plotas *Pagrindinės formulės* $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$ *Herono formulė* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, čia $p = \frac{1}{2}(a + b + $ $+ c)$ – pusperimetris	A, b, h_a, c, h_b, h_c, C, a, B

8. Plotai

Kitos formulės $S = rp$, čia r – įbrėžtinio apskritimo spindulys $S = \frac{abc}{4R}$, čia R – apibrėžtinio apskritimo spindulys $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$	B, a, c, r, r, r, C, b, A
Kai kurios trikampių plotų sąsajos	
Panašių trikampių (figūrų) *plotų* santykis lygus atitinkamų elementų (kraštinių, pusiaukraštinių, aukštinių ir t.t.) kvadratų santykiui ir lygus panašumo koeficiento kvadratui	$\Delta ABC \sim \Delta MNC$ $CC_1 = h$; $CX = x$; $AB = c$ $\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{MN^2}{c^2} = k^2$
Trikampių, turinčių lygias aukštines (bendrą aukštinę), *plotų santykis* lygus atitinkamų aukštinėms kraštinių santykiui	$S_{ABC} : S_{BFG} = AC : FG$
Trikampių, turinčių lygias kraštines, plotų santykis lygus atitinkamų kraštinėms aukštinių santykiui	$S_{ABC} : S_{AEC} = BB_1 : EE_1$
Trikampių, turinčių lygius kampus (arba bendrą kampą), *plotų santykis* lygus kraštinių, sudarančių tą kampą, sandaugų santykiui	$\frac{S_{ABC}}{S_{AFE}} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AE}$
Pusiaukraštinė dalija trikampį į du lygiapločius trikampius. Trys pusiaukraštinės dalija trikampį į šešis lygiapločius trikampius	$S_{ABB_1} = S_{B_1BC}$ $S_{ACC_1} = S_{C_1CB}$ $S_{ACA_1} = S_{A_1AB}$ $S_{AGB_1} = S_{B_1GC} = S_{CGA_1} =$ $= S_{A_1GB} = S_{BGC_1} = S_{C_1GA}$

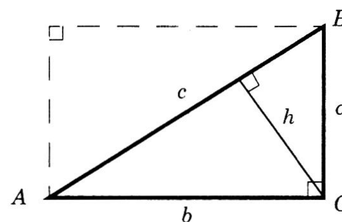
8. Plotai

Kai kurios trikampių plotų sąsajos
(tęsinys)

Stačiojo trikampio plotas

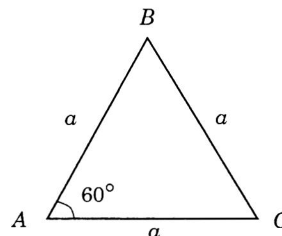
$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$

$h = \frac{ab}{c}$



Taisyklingojo trikampio plotas

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Plotų apskaičiavimo uždavinių pavyzdžiai

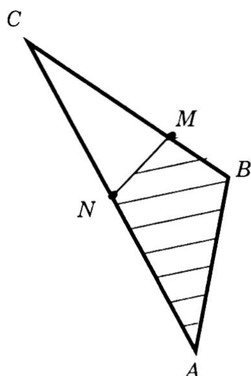
1 pavyzdys.
Duota: $CM = 2MB$; $CN = NA$; $S_{ABC} = S$.

Rasti: S_{MBAN}.

Sprendimas:

$\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{CM \cdot CN}{CB \cdot CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CMN} = \frac{1}{3}S \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MBAN} = S_{ABC} - S_{CMN} = S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S.$



2 pavyzdys.
Duota: $3CA_1 = A_1B$; $AO = OA_1$; $S_{ABC} = S$.

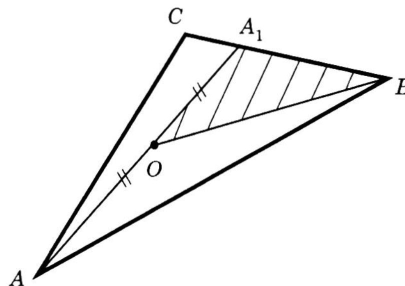
Rasti: S_{OBA_1}.

Sprendimas:
$\Delta\, ABA_1$ ir $\Delta\, ABC$ turi bendrą aukštinę, nuleistą

iš viršūnės $A \Rightarrow \frac{S_{ABA_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B}{CB} =$

$= \frac{3}{4} \Rightarrow S_{ABA_1} = \frac{3}{4}S.$

BO – pusiaukraštinė $\Delta\, ABA_1 \Rightarrow S_{OBA_1} = \frac{3}{8}S.$



Plotų apskaičiavimo uždavinių pavyzdžiai (tęsinys)

3 pavyzdys.

Duota: $AU = \frac{1}{2} BU$; $BT = \frac{1}{2} CT$; $AX = XY = YC$; $S_{ABC} = S$.

Rasti: S_{XUTY}.

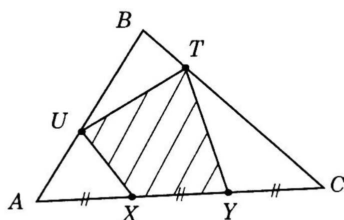
Sprendimas:

$S_{ATB} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} S$ (bendra aukštinė).

$S_{BTU} = \frac{2}{3} S_{ABT} = \frac{2}{9} S$ (bendra aukštinė).

Analogiškai $S_{TYC} = \frac{2}{9} S$;

$S_{AXU} = \frac{1}{9} S \Rightarrow S_{XUTY} = \frac{4}{9} S$.



4 pavyzdys.

Duota: $YX \parallel AC$; $XZ \parallel AB$; $S_{BXY} = S_1$; $S_{CXZ} = S_2$.

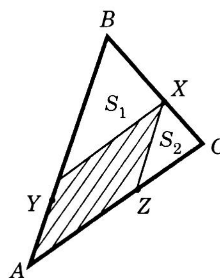
Rasti: S_{AYXZ}.

Sprendimas:

$\Delta XYB \sim \Delta CZX \Rightarrow \frac{CZ}{XY} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$.

$S_{AYXZ} = 2 \cdot S_{AXZ} = 2 \cdot \frac{AZ}{ZC} \cdot S_{CXZ} =$

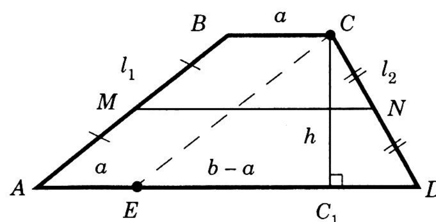
$= 2 \cdot \frac{XY}{CZ} \cdot S_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \cdot S_2 = 2\sqrt{S_1 S_2}$.



Trapecijos plotas

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = MN \cdot h$,

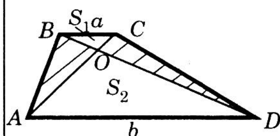
čia a ir b – pagrindų ilgiai,
h – aukštinė, MN – vidurio linija



Tarkime, duota pagrindai a, b ir šoninės kraštinės $AB = l_1$, $CD = l_2$. Nubrėšime $CE \parallel AB$. Tuomet $AE = a$, $ED = b - a$, $CE = l_1$.

$CC_1 = h = \frac{2S_{ECD}}{b-a}$, S_{ECD} – skaičiuojama pagal Herono formulę.

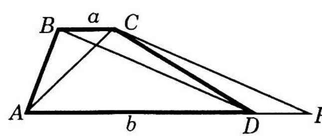
Figūrų, susijusių su trapecija, plotų sąsajos



$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{BC}{AD}\right)^2$

$S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{S_1 S_2}$

$S_{DOC} = \frac{b}{a} S_1 = \frac{a}{b} S_2$

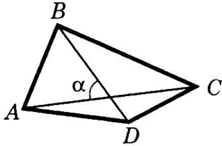


$CP \parallel BD \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ACP}$

Figūrų, susijusių su trapecija, plotų sąsajos (tęsinys)

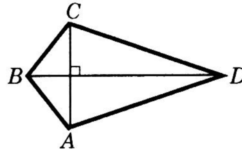
Bet kurio keturkampio plotas

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$



Romboido plotas

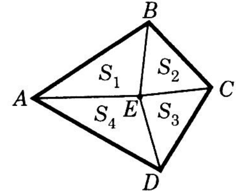
$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$



Bet kurio daugiakampio plotas (trianguliacija)

$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

E – bet kuris daugiakampio vidaus taškas



Taisyklingojo n – kampio plotas

$S = \frac{1}{2} rP \qquad S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$

$S = nr^2 \tan\frac{\pi}{n} \qquad S = \frac{na^2}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{n}$

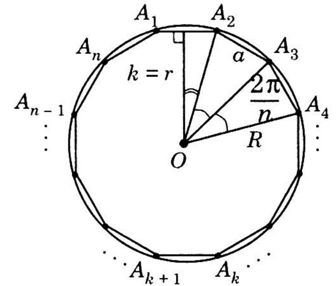
$S = \frac{1}{2} kP$, čia k – *apotema*

Taisyklingųjų daugiakampių plotai

$S_6 = \frac{6R^2}{2} \sin\frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$

$S_8 = \frac{8R^2}{2} \sin\frac{2\pi}{8} = 2R^2\sqrt{2}$

$S_{12} = \frac{12R^2}{2} \sin\frac{2\pi}{12} = 3R^2$



$A_1A_2 = \dots A_nA_1 = a$

$P = an$ – perimetras

R – apibrėžtinio apskritimo spindulys

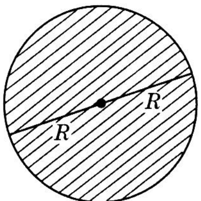
r – įbrėžtinio apskritimo spindulys

Skritulio plotas

$S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{1}{2} RC,$

čia C – apskritimo ilgis,

$D = 2R$ – skersmuo



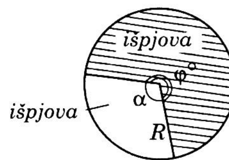
$C = 2\pi R$

Išpjovos plotas

$S = \frac{1}{2} R^2 \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}$

$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$

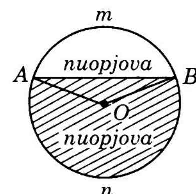
$\left(\alpha \text{ radianų} = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}\right)$



Nuopjovos plotas

$S = \frac{1}{2} R^2(\alpha - \sin\alpha),$

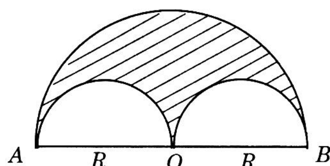
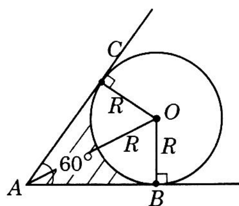
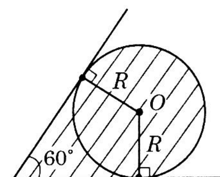
čia α – radianinis lanko matas $\overset{\frown}{AmB}$ arba $\overset{\frown}{AnB}$ (atitinkamai nuopjovoms AmB arba AnB).



$S_{\text{nuopj}AmB} = S_{\text{išpj}AmB} - S_{AOB}$

$S_{\text{nuopj}AnB} = S_{\text{išpj}AnB} + S_{AOB}$

8. Plotai

Figūrų, susijusių su trapecija, plotų sąsajos (tęsinys)		
1 pavyzdys. Didžiojo pusskritulio plotas $\frac{\pi R^2}{2}$. Kiekvieno mažojo pusskritulio plotas $\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}$. Subrūkšniuotos figūros plotas $S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{8} = \frac{3\pi R^2}{8}$. 	*2 pavyzdys.* $AO = 2R$; $AC = R\sqrt{3}$ (pagal Pitagoro teoremą). Plotas $ACOB = 2S_{ACO} =$ $= R^2\sqrt{3}$. Išpjovos plotas $COBK = \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$. Subrūkšniuotos figūros plotas $S = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} =$ $= R_2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$. 	*3 pavyzdys.* $S = R^2\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$. 

STEREOMETRIJA

9. Pagrindinės aksiomos ir apibrėžimai

Per bet kuriuos tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, eina viena ir tik viena plokštuma	B, A, C, α
Jeigu du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai ir visa tiesė priklauso plokštumai	α, M, L, a $\left.\begin{matrix} M \in a, L \in a \\ M \in \alpha, L \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \subset \alpha$
Jeigu dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos kertasi tiese, einančia per tą tašką. Bet kuriai plokštumai tinka planimetrijos aksiomos	M, a, α, β $M \in \alpha, M \in \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cap \beta = a \\ M \in a \\ a \ni M \end{cases}$
Dvi tiesės, turinčios tik vieną bendrą tašką, vadinamos *susikertančiomis*	M, a, b $a \cap b = M$

9. Pagrindinės aksiomos ir apibrėžimai

Dvi tiesės, esančios vienoje plokštumoje ir neturinčios bendro taško, vadinamos *lygiagrečiomis*	$a \parallel b \Rightarrow (a \subset \alpha;\ b \subset \alpha)$
Dvi tiesės, nesančios vienoje plokštumoje, vadinamos *prasilenkiančiomis*	$a \dot{-} b$
Tiesė, kurios visi taškai priklauso plokštumai, vadinama tiese, *priklausančia* tai plokštumai	$a \subset \alpha$
Tiesė *kerta plokštumą*, jei jos turi tik vieną bendrą tašką	$a \cap \alpha = M$
Tiesė vadinama *lygiagrečia su plokštuma*, o plokštuma – lygiagrečia su tiese, jei jos neturi nė vieno bendro taško	$a \parallel \alpha,\ \alpha \parallel a$
Dvi plokštumos, neturinčios bendrų taškų, vadinamos *lygiagrečiomis*	$\alpha \parallel \beta$
Du spinduliai vadinami *vienakrypčiais*, jei vienas iš jų yra kito dalis arba jie yra lygiagrečiose tiesėse ir vienoje pusplokštumėje nuo tiesės, einančios per spindulių pradžią	NM ir NK – vienakrypčiai; AX ir BY – vienakrypčiai, $AX \parallel BY$
Tiesė vadinama *statmena plokštumai* (o plokštuma tiesei), jei tiesė *statmena kiekvienai tiesei*, esančiai plokštumoje	$a \perp \alpha \Rightarrow (a \perp c,\ a \perp b)$

10. Stereometrijos teoremos

Per tiesę ir joje nesantį tašką eina viena ir tik viena plokštuma	$M \notin a \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ M \in \alpha \end{cases}$
Per dvi susikertančias tieses eina viena ir tik viena plokštuma	$a \cap b = M \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases}$
Per dvi lygiagrečias tieses eina viena ir tik viena plokštuma	$a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases}$
Jeigu taškai *A*, *B*, *C*, *D* nėra vienoje plokštumoje, tai tiesės *AB* ir *CD* (*AC* ir *BD*, *AD* ir *BC*) prasilenkia. Jeigu tiesė *AB* yra plokštumoje, o tiesė *CD* tą plokštumą kerta taške, nesančiame tiesėje *AB*, tai tiesės *AB* ir *CD* yra prasilenkiančios	$\left.\begin{matrix} A, B, C \in \alpha \\ D \notin \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} AB \dot{-} CD \\ AC \dot{-} BD \\ AD \dot{-} BC \end{matrix}$
Jeigu viena iš lygiagrečių tiesių kerta plokštumą, tai ir kita tiesė kerta tą plokštumą	$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ a \cap \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \cap \alpha$
Tiesių lygiagretumo požymis Jeigu dvi tiesės lygiagrečios su trečiąja, tai tos tiesės lygiagrečios tarpusavyje	$\left.\begin{matrix} a \parallel c \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$
Tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis Jeigu tiesė, nesanti plokštumoje, lygiagreti su kuria nors toje plokštumoje esančia tiese, tai ta tiesė lygiagreti su plokštuma	$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$

10. Stereometrijos teoremos

Jeigu viena iš susikertančių plokštumų eina per tiesę, lygiagrečią su kita plokštuma, tai plokštumų susikirtimo tiesė lygiagreti su ta tiese	$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = b \\ a \subset \alpha \\ a \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$
Jeigu kiekviena iš susikertančiųjų plokštumų eina per vieną iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai plokštumų susikirtimo tiesė lygiagreti su tomis tiesėmis	$\left.\begin{array}{l}c = \alpha \cap \beta \\ a \subset \alpha \\ b \subset \beta \\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a \parallel c \\ b \parallel c\end{array}\right.$
Jeigu dvi susikertančias plokštumas kerta trečioji plokštuma lygiagrečiomis tiesėmis, tai plokštumų susikirtimo tiesė lygiagreti su šiomis tiesėmis	$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = c \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}c \parallel a \\ c \parallel b\end{array}\right.$
Jeigu dvi susikertančias plokštumas kerta trečioji plokštuma susikertančiomis tiesėmis, tai jų susikirtimo taškas yra plokštumų susikirtimo tiesėje	
Kampai, kurių atitinkamos kraštinės vienakryptės, yra lygūs	$\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$
Plokštumų lygiagretumo požymis Jeigu vienos plokštumos dvi susikertančios tiesės lygiagrečios su kitos plokštumos dviem susikertančiomis tiesėmis, tai tos plokštumos lygiagrečios	$\left.\begin{array}{l}a \cap b = M \\ a \subset \alpha;\ b \subset \alpha \\ a \parallel a_1;\ b \parallel b_1 \\ a_1 \subset \beta;\ b_1 \subset \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
Jeigu dvi plokštumos lygiagrečios su trečiąja, tai tos plokštumos lygiagrečios viena su kita	$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \gamma \\ \beta \parallel \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

10. Stereometrijos teoremos

Lygiagrečių plokštumų savybės Jeigu plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas, tai jų susikirtimo tiesės lygiagrečios	$\left.\begin{array}{l}\gamma \cap \alpha = a\\ \gamma \cap \beta = b\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$
Jeigu tiesė kerta vieną iš lygiagrečių plokštumų, tai ji kerta ir kitą plokštumą	$\left.\begin{array}{l}a \cap \alpha\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow a \cap \beta$
Jeigu plokštuma kerta vieną iš lygiagrečių plokštumų, tai ji kerta ir kitą plokštumą	$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ \gamma \cap \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma \cap \beta$
Per tašką, nesantį plokštumoje, galima nubrėžti vieną ir tik vieną plokštumą, lygiagrečią su duotąja plokštuma	$\left.\begin{array}{l}M \notin \alpha\\ a \subset \alpha\\ b \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$ egzistuoja $\left\{\begin{array}{l}a_1 \parallel a\\ b_1 \parallel b\\ a_1 \cap b_1 = M\end{array}\right. \Rightarrow$ egzistuoja vienintelė plokštuma $\beta \parallel \alpha$, $M \in \beta$
Tiesės ir plokštumos statmenumo požymis Jeigu tiesė statmena dviem susikertančioms tiesėms, esančioms plokštumoje, tai ji statmena tai plokštumai	$\left.\begin{array}{l}a \cap b\\ a \subset \alpha;\ b \subset \alpha\\ c \perp a\\ c \perp b\end{array}\right\} \Rightarrow c \perp \alpha$

10. Stereometrijos teoremos

Tiesės ir plokštumos statmenumo požymis (tęsinys)	
a) Jeigu tiesė statmena vienai iš lygiagrečių plokštumų, tai ji statmena ir kitai plokštumai b) Jeigu dvi plokštumos statmenos vienai ir tai pačiai tiesei, tai plokštumos lygiagrečios c) Per tašką eina vienintelė plokštuma, statmena duotai tiesei	a) $\left.\begin{matrix}\alpha \parallel \beta \\ a \perp \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$ b) $\left.\begin{matrix}\alpha \perp a \\ \beta \perp a\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ c) $\left.\begin{matrix}M \in a \\ M \in \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ egzistuoja vienintelė plokštuma $\alpha \perp a \Leftarrow \left\{\begin{matrix}M \notin a \\ M \in \alpha\end{matrix}\right.$
a) Jeigu viena iš lygiagrečių tiesių statmena plokštumai, tai ir kita tiesė statmena plokštumai b) Jeigu dvi tiesės statmenos vienai plokštumai, tai tos tiesės lygiagrečios c) Per tašką eina vienintelė tiesė, statmena duotai plokštumai	a) $\left.\begin{matrix}a \parallel b \\ a \perp \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$ b) $\left.\begin{matrix}a \perp \alpha \\ b \perp \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ c) $M \in \alpha \Rightarrow$ egzistuoja vienintelė tiesė $a \perp \alpha$, $M \in \alpha \Leftarrow M \notin \alpha$
Trijų statmenų teorema Jeigu pasvirosios projekcija statmena tiesei plokštumoje, tai ir pati pasviroji statmena tai tiesei. Jeigu pasviroji statmena tiesei plokštumoje, tai ir pasvirosios projekcija į plokštumą statmena tai tiesei	$\left.\begin{matrix}a \perp \alpha \\ b \cap \alpha \\ b \not\perp \alpha \\ c = \mathrm{pr}_{\alpha}^{\perp} b \\ m \subset \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow (c \perp m) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (b \perp m)$
Jeigu plokštuma eina per statmenį kitai plokštumai, tai ji statmena tai plokštumai	$\left.\begin{matrix}a \subset \alpha \\ a \perp \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$

10. Stereometrijos teoremos

Statmuo į vieną iš dviejų statmenų plokštumų arba priklauso kitai plokštumai, arba yra lygiagretus su ja	$\left.\begin{matrix}\alpha \perp \beta \\ a \perp \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow a \subset \alpha$ arba $a \parallel \alpha$
Jeigu dvi susikertančios plokštumos statmenos trečiai, tai ir jų susikirtimo tiesė yra statmena tai plokštumai	$\left.\begin{matrix}\alpha \cap \beta = a \\ \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma\end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \gamma$
Kampas, kurį sudaro pasviroji ir plokštuma, yra ne didesnis nei kampas tarp tos pasvirosios ir bet kurios kitos tiesės plokštumoje. Kampu tarp pasvirosios ir plokštumos vadinamas kampas tarp tos pasvirosios ir jos ortagonaliosios projekcijos plokštumoje	$p \perp \gamma$ $a \cap \gamma$ $\quad b = \mathrm{pr}_{\gamma}^{\perp} a$ $a \not\perp \gamma$ $m \subset \gamma$ $\angle (a, \gamma) = \alpha = \angle (a, b) \leqslant \beta = \angle (a, m)$
Lygiagrečių tiesių atkarpos tarp lygiagrečių plokštumų yra lygios	$\left.\begin{matrix}\alpha \parallel \beta \\ a \parallel b\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = CD$
Faleso teorema Lygiagrečios plokštumos, kertančios tieses ir vienoje iš jų atkertančios lygias atkarpas, atkerta lygias atkarpas ir kitose tiesėse	$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \parallel \alpha_3$, $A_1A_2 = A_2A_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$, $C_1C_2 = C_2C_3$

11. Atstumas erdvėje

Atstumas *tarp taškų A* ir *B* lygus atkarpos *AB* ilgiui. Atstumas yra neneigiamas skaičius	A, B $\rho(A, B) = AB \geqslant 0$
Atstumas *tarp taško ir figūros* (taškų aibės) lygus nuliui, jei taškas priklauso figūrai, arba lygus ilgiui trumpiausios atkarpos, kurios vienas galas yra duotasis taškas, o kitas galas artimiausias figūros taškas (jei tokia atkarpa egzistuoja)	K, F, A, M, X $X \in F, A \in F$ $\rho(M, F) = MA$ $\rho(K, F) = 0$ $MX \geqslant MA$
Atstumas *tarp dviejų figūrų* (taškų aibių) lygus nuliui, jei figūros turi bendrą tašką, ir lygus atstumui tarp artimiausių tų figūrų taškų, jei tokie taškai egzistuoja	F_1, F_2 $\rho(F_1, F_2) = 0$ F_1, A_1, A_2, F_2 $\rho(F_1, F_2) = A_1A_2$ $A_1 \in F_1, A_2 \in F_2$
Atstumas *tarp taško ir tiesės*, jei tas taškas nepriklauso tiesei, yra lygus statmens, nuleisto iš taško į teisę, atkarpos ilgiui	M, a, A $M \notin a$ $\rho(M, a) = MA$ $A \in a, MA \perp a$
Atstumas *tarp taško ir plokštumos*, kuriai tas taškas nepriklauso, lygus statmens, nuleisto iš to taško į plokštumą, atkarpos ilgiui	M, α, A $M \notin \alpha$ $\rho(M, \alpha) = MA$ $A \in \alpha, MA \perp \alpha$
Atstumas *tarp dviejų susikertančių tiesių* yra lygus nuliui	a, A, b $a \cap b = A, \rho(a, b) = 0$
Atstumas *tarp dviejų lygiagrečių tiesių* yra lygus jų bendro statmens atkarpos ilgiui	A_2, A_1, a, B_2, b, B_1 $a \parallel b, \rho(a, b) = A_1B_1 = A_2B_2$ $A_1 \in a, A_2 \in a; B_1 \in b; B_2 \in b$ $A_1B_1 \perp a, A_2B_2 \perp a$
Atstumas *tarp dviejų lygiagrečių tiesių* yra lygus atstumui tarp bet kurio vienos tiesės taško ir kitos tiesės	A, a, b $a \parallel b, A \in a \Rightarrow \rho(a, b) = \rho(A; b)$
Atstumas *tarp prasilenkiančių tiesių* yra lygus jų bendro statmens atkarpos ilgiui (tokia atkarpa vienintelė)	A, a, b, B $a \dot{-} b$ $\rho(a, b) = AB$ $A \in a, B \in b, AB \perp a, AB \perp b$

11. Atstumas erdvėje

Atstumas *tarp dviejų prasilenkiančių tiesių* lygus atstumui tarp bet kurio vienos tiesės taško ir plokštumos, einančios per antrąją tiesę ir lygiagrečios pirmajai, arba atstumui tarp dviejų lygiagrečių plokštumų, kurioms priklauso tos tiesės	$(a \dot{-} b \Rightarrow \alpha \parallel b,$ $a \subset \alpha) \Rightarrow \rho(a, b) = \rho(b, \alpha)$ $a \dot{-} b,\ a \subset \alpha,$ $b \subset \beta \Rightarrow \rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta)$
Atstumas *tarp tiesės ir jai nelygiagrečios plokštumos* lygus nuliui	$a \nparallel \alpha \Rightarrow \rho(a, \alpha) = 0$ $b \subset \alpha \Rightarrow \rho(b, \alpha) = 0$
Atstumas *tarp tiesės ir jai lygiagrečios plokštumos* lygus jų bendro statmens atkarpos ilgiui. Atstumas *tarp tiesės ir jai lygiagrečios plokštumos* lygus atstumui tarp bet kurio tos tiesės taško ir plokštumos	$\left.\begin{array}{l} a \parallel \alpha,\ A \in a,\ B \in \alpha \\ AB \perp \alpha,\ \ AB \perp a \\ \rho(a, \alpha) = AB \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} M \in a,\ a \parallel \alpha \\ \rho(a, \alpha) = \rho(M, \alpha) \end{cases}$
Atstumas *tarp dviejų lygiagrečių plokštumų* lygus jų bendro statmens atkarpos ilgiui	$\alpha \parallel \beta,\ A \in \alpha,\ B \in \beta$ $AB \perp \alpha,\ AB \perp \beta$ $\rho(\alpha, \beta) = AB$
Atstumas *tarp dviejų lygiagrečių plokštumų* lygus atstumui tarp taško, priklausančio vienai iš plokštumų, ir kitos plokštumos	$\alpha \parallel \beta,\ A \in \alpha$ $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$
Atstumas *tarp dviejų lygiagrečių plokštumų* lygus atstumui tarp poros bet kurių prasilenkiančių tiesių, kurių viena priklauso vienai, kita – kitai plokštumai	$\alpha \parallel \beta,\ a \subset \alpha,\ b \subset \beta;\ a \dot{-} b$ $\rho(\alpha, \beta) = \rho(a, b)$
Atstumas *tarp taško ir sferos* lygus atstumo tarp taško ir sferos centro bei sferos spindulio skirtumo moduliui	$\rho(M, S) = MA = MO - R,\ A \in S$ $\rho(M_1, S) = M_1A_1 = R - M_1O,$ $A_1 \in S$ $\rho(M, S) = \lvert MO - R \rvert$

11. Atstumas erdvėje

Atstumas *tarp dviejų rutulių*, neturinčių bendrų taškų, lygus atstumo tarp jų centrų ir jų spindulių sumos skirtumui	Q_1, Q_2 neturi bendrų taškų $\rho(Q_1, Q_2) = O_1O_2 - (R_1 + R_2)$

12. Erdvės taškų aibės, susijusios su atstumu

Aibė erdvės taškų, *nutolusių* duotu atstumu R *nuo duotojo taško*, yra *sfera* su centru duotajame taške ir spinduliu R ($R > 0$)	
Aibės erdvės taškų, *nutolusių* duotu atstumu R *nuo duotosios tiesės*, *yra* cilindrinis paviršius ($R > 0$)	
Aibė erdvės taškų, nutolusių duotu atstumu a nuo duotosios plokštumos, yra dvi lygiagrečios su ja plokštumos ($a > 0$)	$\alpha \parallel \beta_1$, $\alpha \parallel \beta_2$; $AM_1 = AM_2 = a$ $M_1M_2 \perp \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in M_1M_2$
Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo dviejų taškų*, yra plokštuma, einanti per atkarpos, kurios galai yra tie taškai, vidurį ir statmena tiesei, einančiai per tuos taškus. Šioje plokštumoje yra visų sferų, einančių per duotus taškus, centrai	$AM = MB$; $AK = KB$ $AB \perp \alpha$
Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo trijų taškų*, nesančių vienoje tiesėje, yra statmuo plokštumai, einančiai per tuos taškus, einantis per apskritimo, apibrėžto apie trikampį, kurio viršūnės yra duotieji taškai, centrą. Šiame statmenyje yra visų sferų, einančių per duotus taškus, centrai	$\left.\begin{matrix} OA = OB = OC \\ MO \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow MA = MB = MC$
Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo keturių taškų*, nesančių vienoje plokštumoje, yra vienintelis taškas – *sferos, einančios per duotus keturis taškus, centras*	

12. Erdvės taškų aibės, susijusios su atstumu

Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo dviejų lygiagrečių tiesių*, yra plokštuma, einanti per vidurį atkarpos, esančios bendrame tų tiesių statmenyje ir statmena jam. Šioje plokštumoje yra visų sferų, liečiančių šias tieses, centrai	$a \parallel b,\ X \in a,\ Y \in b,\ M \in \alpha$ $XY \perp \alpha,\ XY \perp a,\ XY \perp b$ $XZ = ZY$ $\Rightarrow MX = MY$
Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo dviejų susikertančių tiesių*, yra dvi plokštumos, statmenos plokštumai, kurioje ir yra tos tiesės, ir einančios per susikertančių tiesių sudaryto kampo pusiaukampines	$\beta_1 \perp \alpha,\ \beta_2 \perp \alpha$
Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo tiesių, kuriose yra trikampio kraštinės*, yra keturios tiesės, statmenos trikampio plokštumai, einančios atitinkamai per trikampio įbrėžtinio ir trijų pribrėžtinių apskritimų centrus	$m_a \perp \alpha,\ m_b \perp \alpha$ $m_c \perp \alpha,\ m_0 \perp \alpha$
Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo duotojo trikampio kraštinių*, yra statmuo trikampio plokštumai, einantis per trikampio įbrėžtinio apskritimo centrą. Šiame statmenyje yra visų rutulių, liečiančių trikampio kraštines, centrai	$XO \perp (ABC)$ $OC_1 = OA_1 = OB_1$ $OC_1 \perp AB,\ OA_1 \perp BC,\ OB_1 \perp AC$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow XC_1 \perp AB,\ XB_1 \perp AC,$ $XA_1 \perp BC;\ XA_1 = XB_1 = XC_1$
a) Aibė erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų lygiagrečių plokštumų, yra lygiagreti su jomis plokštuma, einanti per jų bendrojo statmens atkarpos vidurį. Joje yra visų rutulių, liečiančių abi plokštumas, centrai b) Aibė dvisienio kampo taškų, *vienodai nutolusių nuo to kampo kraštų*, yra to kampo pusiaukampinė pusplokštumė. Joje yra visų rutulių, įbrėžtų į tą kampą, centrai	$\alpha \parallel \beta,\ \gamma \parallel \alpha,\ AB \perp \alpha,\ AC = CB$ $X \in \gamma \Rightarrow \rho(X, \alpha) = \rho(X, \beta)$ $\angle (M, AB, X) = \angle (X, AB, N)$ $X \in \gamma \Rightarrow \rho(X, \alpha) = \rho(X, \beta)$

12. Erdvės taškų aibės, susijusios su atstumu

Aibė erdvės taškų, *vienodai nutolusių nuo dviejų susikertančių plokštumų*, yra dvi pusiaukampinės plokštumos, einančios per duotų plokštumų susikirtimo tiesę ir dalijančios sudarytus dvisienius kampus pusiau. Jose yra visų rutulių, liečiančių abi plokštumas, centrai	$\angle(\alpha, \gamma) = \angle(\beta, \gamma)$ $X \in \gamma \Rightarrow \rho(X, \alpha) = \rho(X, \beta)$ $\angle(\alpha, \delta) = \angle(\beta, \delta)$ $Y \in \delta \Rightarrow \rho(Y, \alpha) = \rho(Y, \beta)$

13. Kampai erdvėje

Kampas tarp tiesių	
Kampas tarp lygiagrečių arba sutampančių tiesių yra lygus nuliui	$a \parallel b$; $a = b$ $(\widehat{a, b}) = \angle(a, b) = 0$
Kampu tarp susikertančių tiesių vadinamas mažiausias iš tų tiesių sudarytų kampų	$a \cap b = M$; $\angle(a, b) = \angle PMT$
Kampu tarp prasilenkiančių tiesių vadinamas kampas tarp susikertančių tiesių, atitinkamai lygiagrečių su prasilenkiančiomis	$a \dot{-} b$; $a_1 \parallel a$; $b_1 \parallel b$; $a_1 \cap b_1 = M$ $\angle(a, b) = \angle(a_1, b_1)$
Dvi tiesės vadinamos *statmenomis*, jeigu kampas tarp jų status	
Kampas tarp dviejų tiesių gali būti nuo 0° iki 90°. $0° \leq \angle(a, b) \leq 90°$	
Kampų tarp dviejų tiesių briaunainiuose radimo pavyzdžiai	

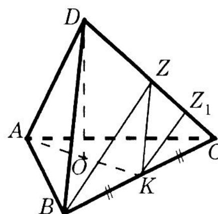
1 pavyzdys. Duotas kubas.

1) $\angle(AB, D_1C_1) = 0°$
2) $\angle(AD, BC_1) = \angle(BC, BC_1) = 45°$
3) $\angle(DC, BC_1) = \angle(D_1C_1, BC_1) = 90°$
4) $\angle(D_1B_1, BC_1) = \angle(DB, BC_1) = 60°$
($\Delta\, DBC_1$ – taisyklingasis)
5) $\angle(A_1D, BC_1) = \angle(B_1C, BC_1) = 90°$
6) $\angle(AB_1, BC_1) = \angle(DC_1, BC_1) = 60°$
7) $\angle(A_1C, BC_1) = 90°$ (trijų statmenų teorema)

Kampų tarp dviejų tiesių briaunainiuose radimo pavyzdžiai (tęsinys)

2 pavyzdys. Duotas taisyklingasis tetraedras.

1) $\angle(DO, AB) = 90°$ ($DO \perp (ABC)$)
2) $\angle(AD, BC) = 90°$ (trijų statmenų teorema)
3) $\angle(DO, KZ) = \angle(DO, BD)$, nes $KZ \parallel BD$
4) $\angle(AK, BZ) = \angle(AK, KZ_1)$, čia $KZ_1 \parallel BZ$.



Duota:
$AB = BC = CA = AD = BD =$
$= CD = a$
$BK = KC, K \in BC$
$DZ = ZC, Z \in DC$

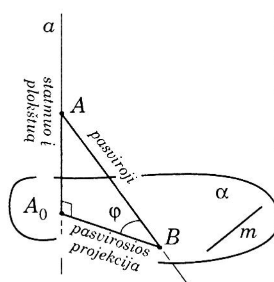
Nagrinėsime ΔAKZ_1.

$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $KZ_1 = \frac{1}{2}BZ = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AZ_1^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{4}\cos\angle ACD$ (kosinusų teorema ΔAZ_1C).

$AZ_1^2 = \frac{13a^2}{16}$. $AZ_1^2 = AK^2 + KZ_1^2 - 2AK \cdot KZ_1 \cos\varphi$, čia $\varphi = \angle(AK, KZ_1)$ (kosinusų teorema ΔAKZ_1).

Vadinasi, $\angle(AK, KZ_1) = \varphi = \arccos\frac{1}{6}$.

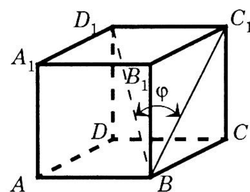
Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Tiesė vadinama statmena plokštumai, o plokštuma – statmena tiesei, jei tiesė statmena bet kuriai tiesei, esančiai plokštumoje	 $m \subset \alpha \Rightarrow \angle(m, \alpha) = 0°$ $a \perp \alpha \Rightarrow \angle(a, \alpha) = 90°$ $\angle(AB, \alpha) = \angle A_0BA = \varphi$ $\sin\varphi = \frac{\rho(A, \alpha)}{AB}$
Tiesė, kertanti plokštumą, bet nestatmena jai, vadinama *pasviraja į plokštumą*	
Kampas tarp tiesės, lygiagrečios duotai plokštumai (arba esančios toje plokštumoje) ir duotos plokštumos yra lygus nuliui	
Jeigu tiesė ir plokštuma statmenos viena kitai, tai kampas tarp jų lygus 90°	Kampo tarp pasvirosios AB ir plokštumos, kurioje yra taškas B, *sinusas* lygus atstumo nuo taško A iki plokštumos ir atkarpos AB ilgio santykiui
Kampas tarp pasvirosios ir plokštumos yra lygus kampui tarp pasvirosios ir pasvirosios projekcijos į tą plokštumą (statmenosios projekcijos)	Kampas tarp tiesės ir plokštumos yra nuo 0° iki 90°: $0° \le \angle(a, \alpha) \le 90°$

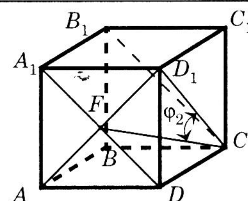
Kampų tarp tiesės ir plokštumos radimo pavyzdžiai

1 pavyzdys.
Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kubas. Rasti: $\varphi = \angle(BD_1, (BB_1C_1))$.
Sprendimas:
1. $D_1C_1 \perp (BB_1C_1) \Rightarrow BC_1$ – projekcija $BD_1 \Rightarrow \varphi = \angle D_1BC_1$.
2. ΔBD_1C_1 $\sin\varphi = \frac{D_1C_1}{D_1B} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (arba $\tan\varphi = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) $\Rightarrow$

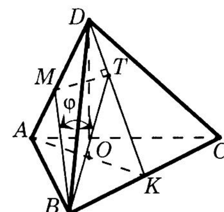
$\Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Kampų tarp tiesės ir plokštumos radimo pavyzdžiai (tęsinys)



2 pavyzdys.
Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kubas.
Rasti: $\varphi_1 = \angle(AD_1, (DA_1B_1))$; $\varphi_2 = \angle(CD_1, (DA_1B_1))$.
Sprendimas:
1. $AD_1 \perp A_1D$; $A_1B_1 \perp (AA_1D_1) \Rightarrow A_1B_1 \perp AD_1$.
2. $AD_1 \perp (DA_1B_1) \Rightarrow \varphi_1 = 90°$.
3. $AD_1 \perp (DA_1B_1)$; $AD_1 \cap (DA_1B_1) = F \Rightarrow FC$ yra CD_1 projekcija į $(DA_1B_1) \Rightarrow \varphi_2 = \angle D_1CF$.
4. $\Delta\, D_1FC$ $\sin\varphi_2 = \dfrac{FD_1}{D_1C} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 30°$.

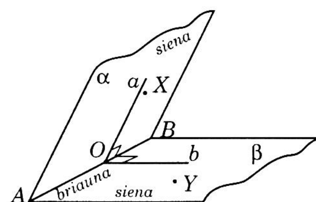


3 pavyzdys.
Duota: $ABCD$ – taisyklingasis tetraedras, $AM = MD$, $M \in AD$.
Rasti: $\varphi = \angle(BM, (BDC))$.
Sprendimas: K – BC vidurys.
1. $(DAK) \perp (BDC)$, kadangi $BC \perp (DAK)$.
2. $(DAK) \cap (DBC) = DK$, $MT \perp DK$, $T \in DK \Rightarrow MT \perp (BDC) \Rightarrow BT$ yra BM projekcija į $(BDC) \Rightarrow \varphi = \angle MBT$.
3. $MT = \dfrac{1}{2}\rho\,(A, (BDC)) = = \dfrac{1}{2} a \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, čia a – tetraedro briauna; $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{MT}{BM} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

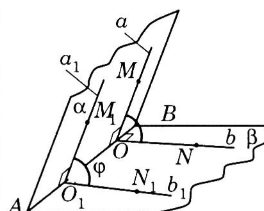
Dvisienis kampas

Dvisieniu kampu vadinamas susikirtimas dviejų pusplokštumių, kurias sudaro nelygiagrečios plokštumos. (Figūra, kurią sudaro dvi nelygiagrečios pusplokštumės, turinčios bendrą kraštą.)
Pusplokštumių bendra tiesė vadinama dvisienio kampo *briauna*, o pusplokštumės – dvisienio kampo *sienomis*



$\angle(X, (AB), Y)$ – dvisienis kampas
$a \subset \alpha$ $a \perp AB$;
$b \subset \beta$ $b \perp AB$
$a \cap b = O$; $\angle(a, b)$ – tiesinis kampas
$\angle(X, (AB), Y) =$
$= \angle(a, b)$

Dvisienio kampo tiesiniu kampu vadinamas susikirtimas dvisienio kampo ir plokštumos, statmenos jo briaunai. (Kampas tarp dviejų statmenų į dvisienio kampo briauną, esančių dvisienio kampo sienose ir turinčių dvisienio kampo briaunoje bendrą pradžią)



$a \perp AB$; $a_1 \perp AB$;
$b \perp AB$; $b_1 \perp AB$
$\angle(M, (AB), N) = \angle(a, b) =$
$= \angle(a_1, b_1) = \angle MON =$
$= \angle M_1O_1N_1$
$\sin\varphi = \dfrac{\rho(M;\ \beta)}{\rho(M;\ AB)}$

Dvisienio kampo didumas yra lygus jo tiesinio kampo didumui.

Dvisienio kampo visi tiesiniai kampai yra lygūs

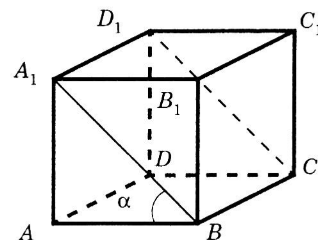
Dvisienio kampo dydis yra nuo 0° iki 180°:
$0° < \angle(M, (AB), N) < 180°$

Dvisienio kampo tiesinio kampo sinusas lygus santykiui vienos dvisienio kampo sienos bet kurio taško atstumo iki kitos dvisienio kampo sienos ir to taško atstumo iki dvisienio kampo briaunos

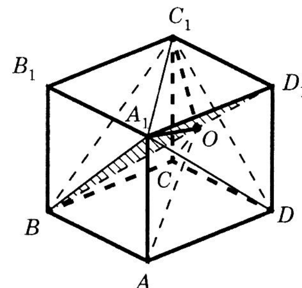
13. Kampai erdvėje

Dvisienių kampų kube radimo pavyzdžiai

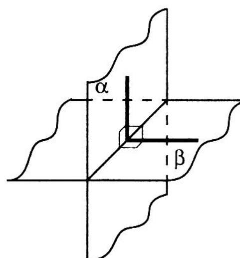
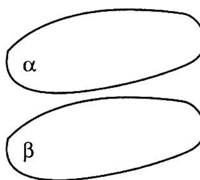
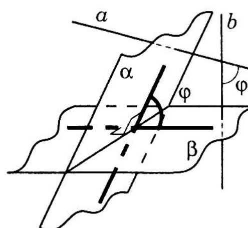
1 pavyzdys.
Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kubas.
Rasti: $\alpha = \angle (A_1, (BC), D)$.
Sprendimas:
1. $A_1B \perp BC$; $AB \perp BC \Rightarrow \alpha = \angle A_1BA$.
2. $\angle A_1BA = 45° \Rightarrow \alpha = 45°$.



2 pavyzdys.
Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$– kubas.
Rasti: $\varphi = \angle (A_1, (BD_1), C_1)$.
Sprendimas:
1. $BD_1 \perp (A_1C_1D)$; $BD_1 \cap (A_1C_1D) = O$; $A_1O = OC_1 = OD$; $OA_1 \perp BD_1$; $OC_1 \perp BD_1 \Rightarrow \angle A_1OC_1 = \varphi$.
2. ΔA_1DC_1 – lygiakraštis $\Rightarrow \angle A_1OC_1 = 120° \Rightarrow \varphi = 120°$.



Kampas tarp plokštumų

Plokštumos vadinamos *statmenomis*, jeigu jos sudaro statųjį dvisienį kampą	 $\alpha \perp \beta \Rightarrow \angle(\alpha, \beta) = 90°$
Kampas tarp lygiagrečiųjų arba sutampančiųjų plokštumų yra lygus nuliui	 $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \angle(\alpha, \beta) = 0°$
Kampas tarp susikertančiųjų plokštumų yra lygus mažiausiam iš dvisienių kampų, kuriuos sudaro tos plokštumos (t. y. kiekvienas iš trijų likusiųjų ne mažesnis už duotąjį). *Kampas tarp dviejų plokštumų* yra lygus kampui tarp tiesių, statmenų toms plokštumoms	 $\angle(\alpha, \beta) = \varphi \in (0°, 90°)$ $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$ $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$

Kampas tarp dviejų plokštumų yra nuo 0° iki 90°:

$$0° \le \angle(\alpha, \beta) \le 90°$$

13. Kampai erdvėje

Trisienis kampas *MABC*

M – viršūnė;
MA, *MB*, *MC* – briaunos;
$\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ – trisienio kampo plokštieji kampai

$\angle AMB = C$
$\angle AMC = B$
$\angle BMC = A$
$A + B > C$, $A + C > B$,
$B + C > A$
$A + B + C < 360°$

Trisienio kampo nelygybė:
Trisienio kampo dviejų plokščiųjų kampų suma didesnė už trečią plokščiąjį kampą

Trisienio kampo sinusų teorema

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin A} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin B} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin C}$$

Trisienio kampo kosinusų teorema

$\cos C = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \hat{C}$,

čia $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ – dvisienių kampų prie briaunų *MA*, *MB*, *MC* dydžiai;
C, *B*, *A* – plokščiųjų kampų, esančių atitinkamai prie *AB*, *AC*, *BC* dydžiai

Daugiasienis kampas $MA_1A_2...A_n$
M – viršūnė;
MA_1, MA_2, ..., MA_n – briaunos;
$\angle A_1MA_2$, ..., $A_{n-1}MA_n$ – daugiasienio kampo plokštieji kampai

$\angle A_1MA_2 + \angle A_2MA_3 +$
$+ ... + \angle A_{n-1}MA_n < 360°$

Iškilojo daugiasienio kampo plokščiųjų kampų suma mažesnė už 360°

14. Pagrindiniai brėžimo erdvėje uždaviniai

Bet kurioje plokštumoje galima pritaikyti planimetrijos brėžimo taisykles.
Per *tris taškus, nesančius vienoje tiesėje*, per *tiesę ir tašką, nesantį joje*, per *dvi susikertančias tieses*, per *dvi lygiagrečias tieses* galima nubrėžti *plokštumą* ir tik vieną

Per tašką, nesantį duotoje tiesėje, galima nubrėžti tik *vieną tiesę, lygiagrečią su duotąja tiese*

Per tašką, nesantį duotoje plokštumoje, galima nubrėžti be galo daug *tiesių, lygiagrečių* su duotąja plokštuma

$M \notin \alpha$
$a_1 \cap a_2 \cap a_3 = M$
$a_1 \parallel \alpha$, $a_2 \parallel \alpha$, $a_3 \parallel \alpha$

14. Pagrindiniai brėžimo erdvėje uždaviniai

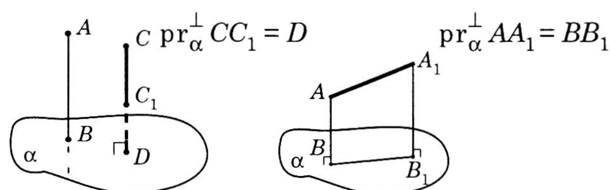
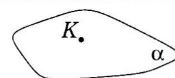
Per tašką, nesantį duotoje tiesėje, galima nubrėžti be galo daug *plokštumų, lygiagrečių su ta tiese*	$M \notin a,\ m \parallel a$ $\alpha_1 \parallel a,\ \alpha_2 \parallel a,\ \alpha_3 \parallel a$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 = m$
Per tašką, nesantį duotoje plokštumoje, galima nubrėžti *plokštumą*, ir tik vieną, *lygiagrečią su duotąja*	$M \notin \alpha$ $a \parallel \alpha;\ b \parallel \alpha;\ a \cap b = M$ $a \subset \beta;\ b \subset \beta; \Rightarrow \beta \parallel \alpha$
Per tašką galima nubrėžti *plokštumą*, ir tik vieną, *statmeną duotajai tiesei*	$M \in \alpha,\ a \subset \alpha$ $X \in \beta;\ a \subset \beta$ $MT \perp a;\ TX \perp a \Rightarrow$ $\Rightarrow (MTX) = \gamma \perp a$
Per tašką galima nubrėžti *tiesę*, ir tik vieną, *statmeną duotajai plokštumai*	$M \notin \alpha,\ a \subset \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow$ egzistuoja plokštuma $\beta \ni M,\ \beta \perp a \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta \cap \alpha = c$ $MK \perp c \Rightarrow MK \perp \alpha$
Per tašką galima nubrėžti be galo daug *plokštumų, statmenų duotajai plokštumai*	$MK \perp \alpha$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 = MK$ $\alpha_1 \perp \alpha;\ \alpha_2 \perp \alpha;\ \alpha_3 \perp \alpha$
Per vieną iš prasilenkiančių tiesių galima nubrėžti vienintelę *plokštumą, lygiagrečią su kita tiese*	$a \dot{-} b;\ m \parallel b \Rightarrow \alpha \parallel b$

15. Kubo pjūvio braižymas

Nubraižyti kubo pjūvį, einantį per taškus M, N, L.

$(MNL) = \alpha$	$\alpha \cap (AA_1D_1D) = ML$	$ML \cap (A_1B_1C_1D_1) = ML \cap A_1D_1 = X_1$	$\alpha \cap (A_1B_1C_1D_1) = KN$
$\alpha \cap (AA_1B_1B) = MK$	$ML \cap (DD_1C_1C) = ML \cap DD_1 = X_2$	$KN \cap (DD_1C_1C) = KN \cap D_1C_1 = X_3$	$\alpha \cap (DD_1C_1C) = TP$
$\alpha \cap (BB_1C_1C) = NT$	$\alpha \cap (ABCD) = LP$	$LMKNTP$ – ieškomasis pjūvis	$MK \parallel TP$, $KN \parallel LP$, $NT \parallel ML$

16. Statmenoji projekcija

Taško statmenąja projekcija (sakysime, tiesiog projekcija) *plokštumoje* vadinamas statmens, nuleisto iš to taško į plokštumą, ir projekcijų plokštumos susikirtimo taškas. Žymėsime: $\text{pr}_\alpha^\perp A = B$	
Statmenosios projekcijos savybės Jeigu taškas yra plokštumoje, tai $\text{pr}_\alpha^\perp K = K$. Tiesės projekcija yra tiesė (arba taškas). Atkarpos projekcija yra atkarpa (arba taškas)	

16. Statmenoji projekcija

Pasvirosios projekcija Jeigu iš vieno taško į plokštumą nuleista keletas pasvirųjų, tai lygių pasvirųjų projekcijos yra lygios; lygias projekcijas atitinka lygios pasvirosios, didesnės pasvirosios projekcija yra didesnė, didesnę projekciją atitinka didesnė pasviroji	$M_0 = \text{pr}_\alpha^\perp M$ $(MA = MB) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (M_0A = M_0B)$ $(MC > MA) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (M_0C > M_0A)$
Atkarpų, esančių lygiagrečiose tiesėse (arba vienoje tiesėje), projekcijų ilgiai proporcingi atkarpų ilgiams	$a \parallel b;\ a_1 = \text{pr}_\alpha^\perp a;$ $b_1 = \text{pr}_\alpha^\perp b \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 \parallel b_1;$ $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC};$ $\frac{B_1C_1}{E_1F_1} = \frac{BC}{EF}$
Atkarpos projekcijos ilgis lygus atkarpos ilgio ir kosinuso kampo tarp projekcijų plokštumos ir tiesės, kurioje yra atkarpa, sandaugai	$A_1B_1 = \text{pr}_\alpha^\perp AB = AB \cos \varphi$ $\varphi = \angle (AB, \alpha)$
Daugiakampio projekcijos plotas lygus daugiakampio ploto ir kosinuso kampo tarp projekcijų plokštumos ir daugiakampio plokštumos sandaugai	$P_1'P_2'P_3'P_4'P_5' =$ $= \text{pr}_\alpha^\perp (P_1P_2P_3P_4P_5)$ $S' = S \cdot \cos \varphi$ $\varphi = \angle ((P_1P_2P_3), \alpha)$
Lygiagrečioji projekcija Taško *lygiagrečiąja projekcija* į plokštumą tiesės l, nelygiagrečios plokštumai, kryptimi vadinamas tiesės, einančios per tašką ir lygiagrečios arba sutampančios su l, ir projekcijų plokštumos susikirtimo taškas. Žymėsime: $\text{pr}_\alpha^l A = B$. Statmenoji projekcija yra atskiras lygiagrečiosios projekcijos atvejis. Lygiagrečioji projekcija pasižymi *statmenosios projekcijos savybėmis*	$AB \parallel l,\ B \in \alpha$ $B = \text{pr}_\alpha^l A$

17. Prizmė

n-kampe prizme vadinamas briaunainis, kurio dvi sienos (*pagrindai*) yra lygūs n-kampiai su atitinkamai lygiagrečiomis kraštinėmis, o likusios n sienų (*šoninės sienos*) – lygiagretainiai.
n-kampė prizmė turi: $n + 2$ sienų, $3n$ briaunų, $2n$ viršūnių

Prizmės *aukštine* vadinamas atstumas tarp pagrindų plokštumų. (Statmens, nuleisto į pagrindų plokštumas, atkarpa tarp tų plokštumų.)

Prizmės įstrižainė – atkarpa, jungianti dvi viršūnes, nesančias vienoje sienoje.
n-kampė prizmė turi $n(n - 3)$ įstrižainių

viršutinis pagrindas

apatinis pagrindas

$\alpha \parallel \beta$; $A, B, C, D \in \beta$;
$A_1, B_1, C_1, D_1 \in \alpha$
$AB \parallel A_1B_1$;
$BC \parallel B_1C_1$;
$CD \parallel C_1D_1$;
$DA \parallel D_1A_1$

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$
$AA_1 = l$ – šoninė briauna
BD_1 – įstrižainė

Prizminiu paviršiumi vadinamas paviršius, kurį sudaro šoninių prizmės briaunų tiesės ir šoninių prizmės sienų plokštumų dalys, apribotos tomis tiesėmis

$a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel a_4$

Keturkampis prizminis paviršius

Prizmės statmenuoju pjūviu vadinamas prizmės paviršiaus pjūvis plokštuma, statmena šoninei briaunai.
Kampas tarp prizmės stamenojo pjūvio plokštumos ir pagrindo plokštumos yra lygus kampui tarp prizmės šoninės briaunos ir aukštinės

$MN \perp AA_1$, $NP \perp BB_1$ $\Rightarrow (MNP) \perp BB_1$
$\Delta\, MNP$ – statmenasis pjūvis

$AG \perp ABC$
$\angle (AA_1, AG) = \angle ((MNP), (ABC))$

Prizmės šoninio ir viso paviršiaus plotai

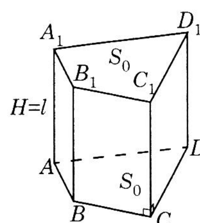
$S_{\text{šon}} = P_\perp \cdot l$
$S_{\text{visas}} = 2S_0 + P_\perp \cdot l$

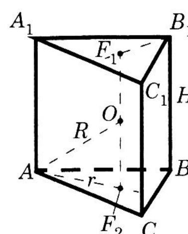
Prizmės tūris

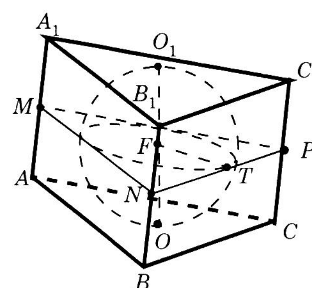
$V = S_0 \cdot H$
$V = S_\perp \cdot l$

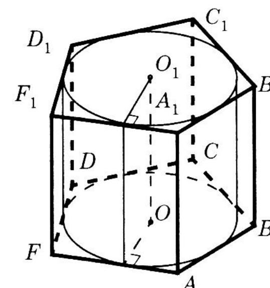
$P_\perp$ – statmenojo pjūvio perimetras,
l – šoninės briaunos ilgis,
S_0 – pagrindo plotas,
H – prizmės aukštis,
$S_\perp$ – statmenojo pjūvio plotas

17. Prizmė

<table>
<tr><td colspan="2">Stačioji prizmė</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stačiąja vadinama prizmė, kurios šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai</td></tr>
<tr><td>Stačiosios prizmės visos šoninės sienos – stačiakampiai.
Stačiosios prizmės visi dvisieniai kampai prie pagrindo briaunų yra statūs.
Stačiosios prizmės dvisienių kampų prie šoninių briaunų tiesiniai kampai lygūs atitinkamiems pagrindo kampams.
Stačiosios prizmės aukštinė lygi jos šoninei briaunai</td><td>

$AA_1 \perp (ABC)$,
$\angle ABC = \angle (A, BB_1, C)$
P_0 – pagrindo perimetras
S_0 – pagrindo plotas</td></tr>
<tr><td>Stačiosios prizmės tūris
$V = S_0 \cdot H$</td><td>Stačiosios prizmės šoninio ir viso paviršiaus plotai
$S_{šon} = P_0 \cdot H$
$S_{visas} = S_{šon} + 2 \cdot S_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stačioji prizmė, kurios pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, vadinama taisyklingąja prizme</td></tr>
<tr><td>Apie prizmę galima apibrėžti rutulį tada ir tik tada, kai ji stačioji ir kai apie jos pagrindą galima apibrėžti apskritimą.
$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$,
čia R – apibrėžtinio rutulio spindulys,
r – apibrėžtinio apskritimo spindulys</td><td>

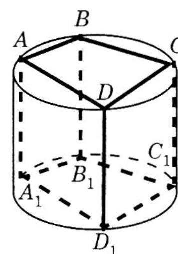
$OA = OB = OC = OA_1 =$
$= OB_1 = OC_1$
$OF_1 = OF_2 = \frac{1}{2} H; AA_1 \perp (ABC)$</td></tr>
<tr><td>Į prizmę galima įbrėžti rutulį tada ir tik tada, kai į jo statmenąjį pjūvį galima įbrėžti apskritimą, kurio skersmuo lygus prizmės aukštinei.
$R = r = 0{,}5H; R = \frac{2S_\perp}{P_\perp}$,
čia R – įbrėžtinio rutulio spindulys,
r – įbrėžtinio apskritimo spindulys</td><td>

$(MNP) \perp AA_1$
$FO_1 = FT = R$
$O_1O = H$</td></tr>
<tr><td>Į stačiąją prizmę galima įbrėžti cilindrą, jeigu į jo pagrindą galima įbrėžti apskritimą</td><td>
</td></tr>
</table>

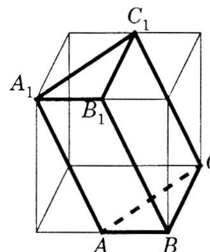
17. Prizmė

Stačioji prizmė (tęsinys)

Apie stačiąją prizmę galima *apibrėžti cilindrą*, jeigu apie jos pagrindą galima apibrėžti apskritimą

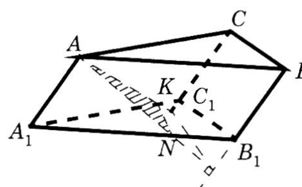


Prizmės, kurios viena siena statmena pagrindui, pavyzdys



$(ABB_1) \perp (ABC)$

Prizmės, kurios viduje negalima nubrėžti statmenojo pjūvio, pavyzdys.
Šiuo atveju, skaičiuojant tūrį nagrinėjamas prizminio paviršiaus statmenasis pjūvis (Visos formulės teisingos)



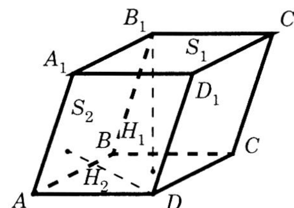
$(NKL) \perp AA_1$

Gretasienis

Gretasieniu vadinama prizmė, kurios pagrindas yra lygiagretainis.
Visos gretasienio sienos – lygiagretainiai.
Priešingos gretasienio sienos lygios ir lygiagrečios

Gretasienių, ir tik jų, bet kurią porą lygiagrečių sienų galima laikyti pagrindais.
Priklausomai nuo to, kaip pasirinkome pagrindus, galima nagrinėti tris aukštines

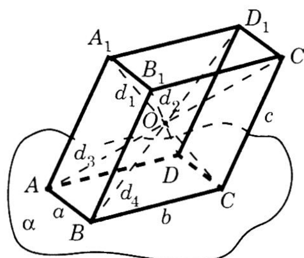
Gretasienio tūris
$V = H_1S_1 = H_2S_2 = H_3S_3$



Gretasienio įstrižainių savybės

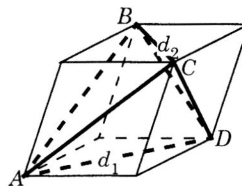
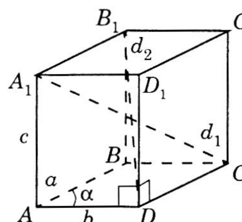
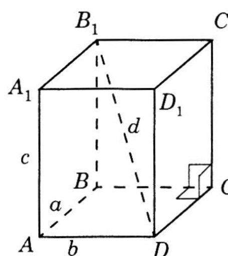
Gretasienio įstrižainės kertasi viename taške, kuris kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.
Gretasienio įstrižainių kvadratų suma lygi visų briaunų kvadratų sumai:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

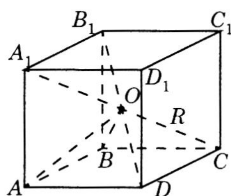
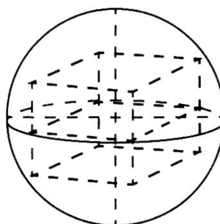
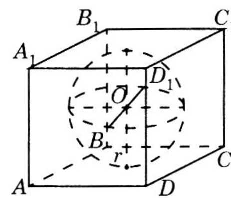


$A_1C = d_1$; $B_1D = d_2$;
$AC_1 = d_3$;
$BD_1 = d_4$

Gretasienis (tęsinys)

Į gretasienį galima įbrėžt *tetraedrą*. Tokio tetraedro tūris lygus $\frac{1}{3}$ daliai gretasienio tūrio: $V = \frac{1}{6} d_1 d_2 \rho(d_1; d_2) \sin\angle(d_1; d_2)$	 $AD = d_1$; $BC = d_2$
Stačiuoju vadinamas gretasienis, kurio šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai. Stačiojo gretasienio įstrižainės skaičiuojamos pagal formules: $d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha$, $d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$	 $ABCD$ – lygiagretainis ($\alpha \neq 90°$) $AA_1 \perp (ABC)$ $AC_1 = A_1C = d_1$; $BD_1 = B_1D = d_2$; $d_1 \neq d_2$
Stačiakampiu vadinamas statusis gretasienis, kurio pagrindai – stačiakampiai. Stačiakampio gretasienio visos įstrižainės lygios: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$	 $ABCD$ – stačiakampis $AA_1 \perp (ABC)$, $AB \perp AD$

Kubas

Kubu vadinamas stačiakampis gretasienis, kurio briaunos lygios. Kubo įstrižainės kertasi viename taške – įbrėžtinės ir apibrėžtinės sferos centre  $AB = a$ $OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 =$ $= OC_1 = OD_1 = R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	*Kubas, įbrėžtas į sferą* $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, čia R – apibrėžtinės sferos spindulys, a – kubo briauna 	*Sfera, įbrėžta į kubą* $r = \frac{1}{2}a$, čia r – įbrėžtinės sferos spindulys, a – kubo briauna  $AB = a$ Sferos centras – taškas O – vienodai nutolęs nuo visų kubo briaunų

18. Piramidė

Piramide vadinamas briaunainis, kurio viena siena – bet kuris daugiakampis, o likusios sienos – trikampiai, turintys bendrą viršūnę

M – *piramidės viršūnė,* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – pagrindo *viršūnės.* Iš viso $n + 1$ viršūnių.
MA_1 – *šoninė briauna,* A_1A_2 – *pagrindo briauna.* Iš viso $2n$ briaunų.
Daugiakampis $A_1A_2 \ldots A_n$ – piramidės *pagrindas.*
Trikampis MA_1A_2 – *šoninė siena.* Piramidėje yra $n + 1$ sienų, iš jų n šoninių

Kampas A_1MA_2 – *plokščiasis kampas* prie piramidės viršūnės.
Dvisienis kampas $M(A_1A_2)A_k$ – *kampas prie pagrindo briaunos* A_1A_2 (šoninės sienos posvyrio kampas į pagrindą).
Dvisienis kampas $A_1(MA_2)A_3$ – *kampas prie šoninės briaunos* MA_2.
Piramidės *aukštine* vadinamas atstumas nuo piramidės viršūnės iki pagrindo plokštumos. $MK = H$ – piramidės aukštinė

Pjūvis, lygiagretus su piramidės pagrindu, yra daugiakampis, panašus į pagrindą.
Tokio pjūvio plokštuma dalija šonines piramidės briaunas ir aukštinę į proporcingas atkarpas.
Pjūvio ir pagrindo plotai sutinka kaip jų atstumų iki piramidės viršūnės kvadratai.
Piramidės pjūvis atkerta piramidę, panašią į duotąją

$$(A_1A_2A_3) \parallel (A'_1A'_2A'_3)$$
$$\rho(M, (A_1A_2A_3)) = H$$
$$\rho(M, (A'_1A'_2A'_3)) = H'$$
$$A_1A_2 \ldots A_n \backsim A'_1A'_2 \ldots A'_n$$
$$\frac{MA_1}{MA'_1} = \frac{MA_2}{MA'_2} = \ldots = \frac{MA_n}{MA'_n} = \frac{H}{H'}$$
$$\frac{S_{A_1A_2 \ldots A_n}}{S_{A'_1A'_2 \ldots A'_n}} = \left(\frac{H}{H'}\right)^2$$
$$MA_1A_2 \ldots A_n \backsim MA'_1A'_2 \ldots A'_n$$

Piramidės šoninio paviršiaus plotas

$S_{šon} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$,
čia $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – šoninių piramidės sienų plotai

Piramidės viso paviršiaus plotas

$S_{visas} = S_{šon} + S_0$,
čia S_0 – pagrindo plotas

Piramidės tūris

$V = \frac{1}{3} HS_0$

Tetraedras

Tetraedras – tai trikampė piramidė. Visos keturios sienos – trikampiai ir bet kuris iš jų gali būti laikomas piramidės pagrindu (galima nagrinėti keturias aukštines).
Tetraedro šoninių sienų plotai atvirkščiai proporcingi šoninių sienų aukštinėms

Atkarpos, jungiančios prasilenkiančių tetraedro briaunų vidurio taškus, kertasi viename taške ir tas taškas dalija jas pusiau

Atkarpos, jungiančios tetraedro viršūnes ir priešinių sienų pusiaukraštinių (*tetraedro pusiaukraštinių*) susikirtimo taškus, kertasi viename taške ir tas taškas dalija jas santykiu 3 : 1 (nuo viršūnės)

Jeigu du tetraedrai turi bendrą trisienį kampą (du lygius trisienius kampus), tai jų tūriai sutinka kaip sandaugos briaunų, sudarančių tą kampą

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}$$

Taisyklingasis tetraedras

Taisyklinguoju vadinamas tetraedras, kurio visos sienos yra taisyklingieji trikampiai

Pagrindinės formulės

$R = \frac{3}{4}H \qquad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

$r = \frac{1}{4}H \qquad R + r = H$

R – apibrėžtinio rutulio spindulys
r – įbrėžtinio rutulio spindulys

Taisyklingojo tetraedro paviršiaus plotas

$S_{\text{visas}} = a^2\sqrt{3}$

Taisyklingojo tetraedro tūris

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$AB = AC = BC = AD = BD = CD = a$

$DO = H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $FO = r = \frac{1}{4}H$;

$r = \rho(F, (ABC)) = \rho(F, (ABD)) = \rho(F, (ACD)) =$
$= \rho(F, (BCD))$

$FD = R = \frac{3}{4}H$;

$FA = FB = FC = FD = R$

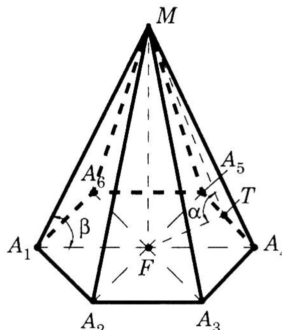
$S = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}$

18. Piramidė

Taisyklingoji piramidė

Taisyklingąja vadinama piramidė, kurios pagrindas – taisyklingasis daugiakampis, o viršūnės projekcija yra pagrindo centre

Visos piramidės briaunos yra lygios.
Visos šoninės sienos – lygūs lygiašoniai trikampiai.
Visi dvisieniai kampai prie pagrindo briaunų yra lygūs (šoninės sienos vienodai pasvirusios į pagrindą).
Visi plokštieji kampai prie viršūnės lygūs.
Visi dvisieniai kampai prie šoninių briaunų lygūs.
Visos šoninių sienų aukštinės, nuleistos į pagrindo briaunas (*apotemos*), lygios



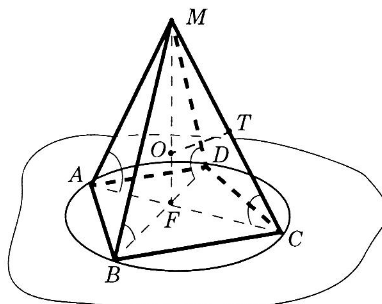
$MF \perp (A_1A_2A_3)$
$FA_1 = FA_2 = ... = FA_6$
MT – piramidės apotema

Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas

$S = kp$,
čia k – apotema,
p – pagrindo pusperimetris

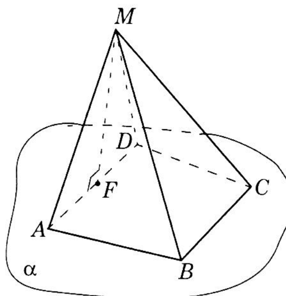
$S = \dfrac{S_{pag}}{\cos\alpha}$, čia S_{pag} – pagrindo plotas,
α – dvisienis kampas prie pagrindo briaunos

Piramidė, kurios visos šoninės briaunos lygios
Apie pagrindą galima apibrėžti apskritimą; viršūnės projekcija yra apskritimo centro taškas.
Visos briaunos vienodai pasvirusios į pagrindą.
Apie tokią piramidę *galima apibrėžti rutulį*. Apibrėžtinio rutulio centras yra piramidės aukštinės tiesėje



$MA = MB = MC = MD \Rightarrow FA = FB = FC = FD$,
$MF \perp (ABC)$
$MT = TC,\ OT \perp MC \Rightarrow OA = OB = OC =$
$= OD = OM = R$
R – apibrėžtinio rutulio centras
$(H - R)^2 + FC^2 = R^2$

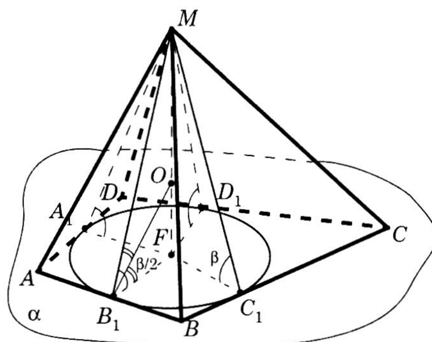
Piramidė, kurios viena šoninė siena statmena pagrindui
Piramidės aukštinė yra sienoje, statmenoje pagrindui



$F \in \alpha,\ MF \perp (ABC)$
$MF \subset (AMD)$

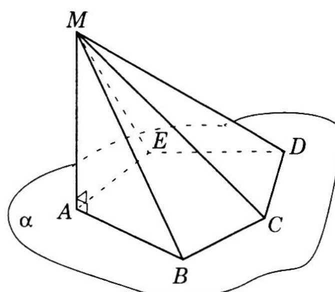
18. Piramidė

Piramidė, kurios visi dvisieniai kampai prie pagrindo briaunų yra lygūs
Į pagrindą galima įbrėžti apskritimą, viršūnės projekcija yra apskritimo centro taškas.
Šoninio paviršiaus plotas skaičiuojamas pagal tas pačias formules kaip ir taisyklingosios piramidės.
Aukštinė skaičiuojamas pagal formulę:
$H = r \tan \beta$, čia r – įbrėžto į pagrindą apskritimo spindulys, β – dvisienis kampas prie pagrindo briaunos.
Į tokią piramidę *galima įbrėžti rutulį*, kurio centras yra aukštinėje.
$R = r \cdot \tan \frac{\beta}{2}$, čia R – įbrėžtinio rutulio spindulys, r – įbrėžto į pagrindą apskritimo spindulys



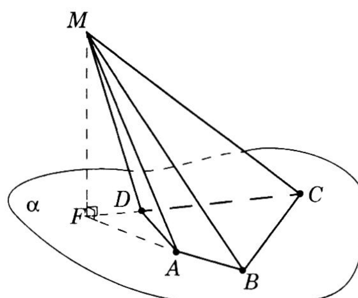
$F \in \alpha$, $MF \perp (ABC) \Rightarrow FA_1 \perp AD$, $FB_1 \perp AB$,
$FC_1 \perp BC$, $FD_1 \perp CD$,
$FA_1 = FD_1 = FC_1 = FB_1 = r$ – įbrėžto į pagrindą apskritimo spindulys
$OF = R$ – įbrėžto į piramidę rutulio spindulys
B_1O – $\angle MB_1F$ pusiaukampinė

Piramidė, kurios dvi gretimos šoninės sienos statmenos pagrindui
Aukštinė yra šių sienų bendra briauna



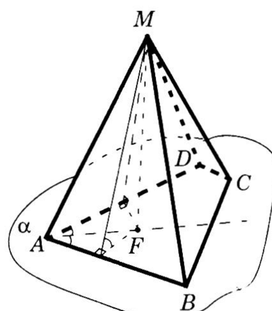
$\left.\begin{array}{l}(MAB) \perp \alpha \\ (MAE) \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow MA \perp \alpha$

Piramidė, kurios dvi šalia nesančios šoninės sienos statmenos pagrindui
Piramidės išorėje esanti aukštinė yra plokštumų, kuriose yra pagrindui statmenų sienų, susikirtimo tiesėje



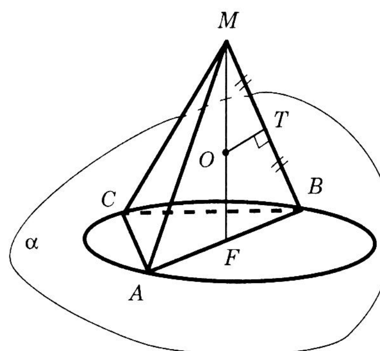
$F \in \alpha$, $MF \perp \alpha$
$(MAB) \perp \alpha$, $(MDC) \perp \alpha$
$(ABM) \cap (DCM) = MF$

Piramidė, kurios du dvisieniai kampai prie šalia esančių pagrindo briaunų yra lygūs
Aukštinės projekcija yra kampo tarp duotųjų briaunų pusiaukampinėje

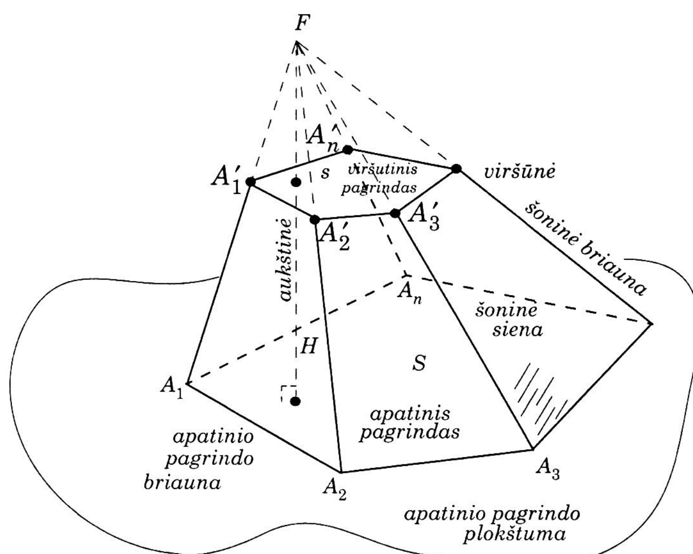


$\angle (M, (AB), C) = \angle (M, (AD), C)$
$F \in \alpha$, $MF \perp \alpha$
AF — $\angle BAD$ pusiaukampinė

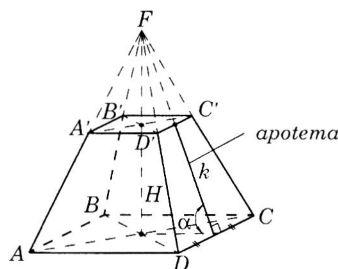
18. Piramidė

Piramidė, kurios pagrindas statusis trikampis ir visos šoninės briaunos lygios	 $F \in \alpha$, $MF \perp \alpha$, $(MAB) \perp (ABC)$, $FA = FB = FC$, O – apibrėžtinio rutulio centras, $MT = TB$, $O \in MF$, $OM = OA = OB = OC = R$

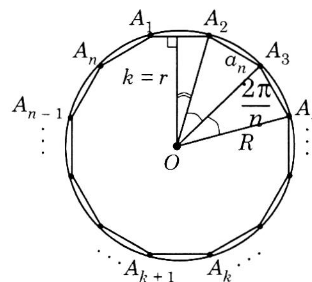
19. Nupjautinė piramidė

Nupjautine piramide vadinama *piramidės dalis* nuo pagrindo iki lygiagretaus su juo pjūvio.	
Pjūvis vadinamas *viršutiniu* nupjautinės piramidės *pagrindu*, o piramidės pagrindas – apatiniu nupjautinės piramidės pagrindu (pagrindai panašūs). Nupjautinės piramidės šoninės sienos – trapecijos. Nupjautinė piramidė turi $3n$ briaunas, $2n$ viršūnes, $n + 2$ sienas, $n(n - 3)$ įstrižaines. Atstumas nuo viršutinio iki apatinio pagrindo – nupjautinės piramidės *aukštinė* (atkarpa, atkirsta nuo piramidės aukštinės)	
Nupjautinės piramidės tūris $V = \frac{1}{3}H(S + \sqrt{S \cdot s} + s)$, čia S ir s – pagrindų plotai, H – aukštinė	*Nupjautinės piramidės viso paviršiaus plotas lygus jo sienų plotų sumai*
Taisyklingąja nupjautine piramide vadinama dalis taisyklingosios piramidės	
Taisyklingosios piramidės apotemos dalis vadinama taisyklingosios nupjautinės piramidės apotema	

19. Nupjautinė piramidė

Taisyklingoji nupjautinė piramidė (tęsinys)	
Taisyklingajai nupjautinei piramidei (taip pat piramidei, kurios visi dvisieniai kampai prie apatinio pagrindo lygūs) yra teisingos formulės: $S_{šon} = k(P + p)$, čia P ir p – pagrindų pusperimetriai, k – apotema; $S_{šon} = (S - s) : \cos\alpha$, čia α – dvisienis kampas prie apatinio pagrindo briaunos, S ir s – pagrindų plotai	 $ABCDA'B'C'D'$ – taisyklingoji nupjautinė piramidė $ABCD$, $A'B'C'D'$ – kvadratai
Jeigu į nupjautinę piramidę galima įbrėžti rutulį, tai jo spindulys lygus pusei piramidės aukštinės	

20. Taisyklingieji daugiakampiai ir briaunainiai

Daugiakampis vadinamas iškiluoju, jeigu jis yra vienoje pusplokštumėje bet kurios tiesės, kurioje yra daugiakampio kraštinė, atžvilgiu. *Taisyklinguoju daugiakampiu* vadinamas iškilasis daugiakampis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs	Kiekvienas taisyklingasis daugiakampis gali būti įbrėžtinis ir apibrėžtinis, apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų centrai sutampa su daugiakampio centru (kraštinių vidurio statmenų ir kampų pusiaukampinių susikirtimo tašku)
a_n – kraštinė, r_n – įbrėžtinio apskritimo spindulys, R_n – apibrėžtinio apskritimo spindulys, k_n – apotema, P_n – perimetras, S_n – plotas	

Bendrosios formulės

$$\alpha_n = \frac{180°(n - 2)}{n}$$

$$r_n = k_n = \frac{a_n}{2} \cot \frac{180°}{n} = R_n \cos \frac{180°}{n}; \quad R_n = \frac{r_n}{\cos \frac{180°}{n}} = \frac{a_n}{2 \cdot \sin \frac{180°}{n}}$$

$$S_n = \frac{n}{2} R_n^2 \sin \frac{360°}{n} = \frac{n}{4} a_n^2 \cot \frac{180°}{n} = \frac{1}{2} r_n P_n$$

20. Taisyklingieji daugiakampiai ir briaunainiai

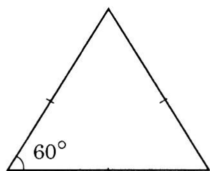
Daugiakampių, turinčių n = 3, 4, 6, 8, 12 kraštinių, formulės

n	α	r	R	S	r ir R ryšys
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = 2r$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2	$R = r\sqrt{2}$
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3} = 2r$
8	135°	$\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2(1+\sqrt{2})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
12	150°	$\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$	$a \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$3a^2(2+\sqrt{3})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Briaunainis vadinamas *iškiluoju*, jeigu jis yra kiekvienos savo paviršiaus plokščiojo daugiakampio plokštumos vienoje pusėje

Taisyklinguoju briaunainiu vadinamas iškilasis briaunainis, kurio visos sienos yra lygūs *taisyklingieji daugiakampiai* ir į kiekvieną jo viršūnę sueina *tiek pat briaunų*

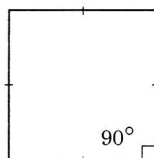
Sienos – taisyklingieji trikampiai



Taisyklingasis trikampis

Trys briaunos sueina į vieną viršūnę 3 · 60° < 360° – *tetraedras.*
Keturios briaunos sueina į vieną viršūnę 4 · 60° < 360° – *oktaedras.*
Penkios briaunos sueina į vieną viršūnę 5 · 60° < 360° – *ikosaedras.*
Šešios (ir daugiau) briaunų sueiti į vieną viršūnę negali: 6 · 60° = 360°

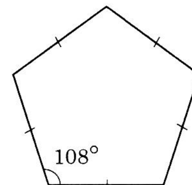
Sienos – taisyklingieji keturkampiai



Kvadratas

Trys briaunos sueina į vieną viršūnę 3 · 90° < 360° – *kubas* (*heksaedras*).
Keturios (ir daugiau) briaunų sueiti į vieną viršūnę negali: 4 · 90° = 360°

Sienos – taisyklingieji penkiakampiai



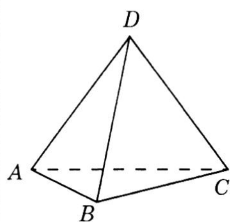
Taisyklingasis penkiakampis

Trys briaunos sueina į vieną viršūnę 3 · 108° < 360° – *dodekaedras.*
Keturios (ir daugiau) briaunų sueiti į vieną viršūnę negali 4 · 108° > 360°

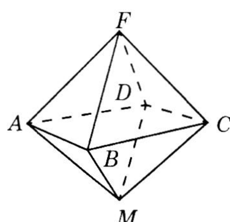
Taisyklingieji daugiakampiai, turintys daugiau kaip penkias kraštines, negali būti taisyklingojo briaunainio sienomis (jau šešiakampiui: 3 · 120° = 360°)

20. Taisyklingieji daugiakampiai ir briaunainiai

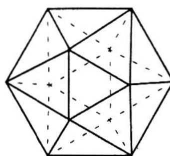
Bendras vaizdas

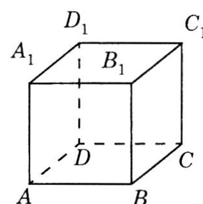


Tetraedras

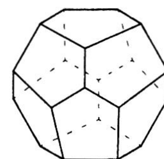


Oktaedras


Ikosaedras



Kubas

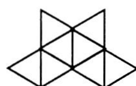

Dodekaedras

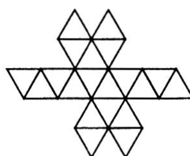
Briaunainio tipas	Skaičius			Paviršiaus plotas	Tūris
	briaunų	sienų	viršūnių		
Tetraedras	6	4	4	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Oktaedras	12	8	6	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Ikosaedras	30	20	12	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3-\sqrt{5})$
Kubas (heksaedras)	12	6	8	$6a^2$	a^3
Dodekaedras	30	12	20	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

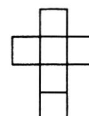
Visiems iškiliesiems briaunainiams yra teisinga *Oilerio* (*Euler*) *formulė* (teorema): $B + 2 = V + S$, čia B – briaunų, V – viršūnių skaičius, S – sienų skaičius

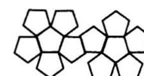
Išklotinių pavyzdžiai


Tetraedras

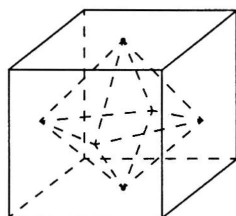

Oktaedras

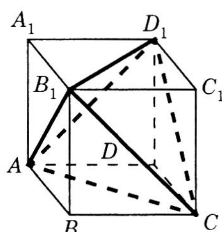

Ikosaedras


Kubas


Dodekaedras

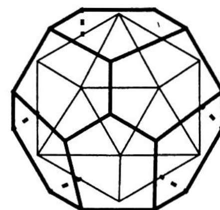
Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai


Kubas ir oktaedras

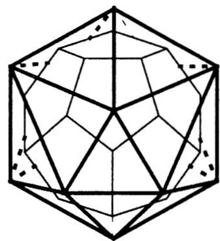
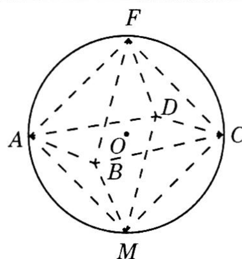
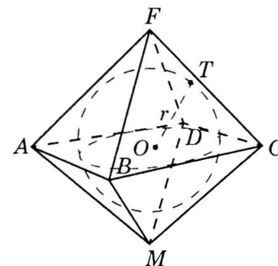


Kubas ir tetraedras

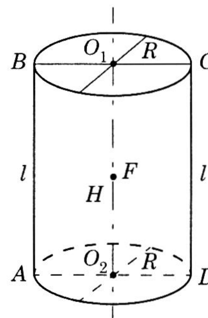
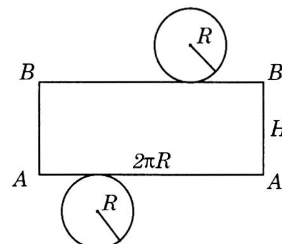
$A_1B_1 = a\sqrt{2}$; $AB = a$


Dodekaedras ir ikosaedras

20. Taisyklingieji daugiakampiai ir briaunainiai

Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai (tęsinys)		
 *Ikosaedras ir dodekaedras*	 *Rutulys ir oktaedras* $AB = a$ $OA = OB = OF = OM = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $FO + OM = FM = AC =$ $= BD = a\sqrt{2}$	 *Oktaedras ir rutulys* $AB = a$ $OT = r = \frac{a}{\sqrt{6}}$

21. Ritinys

Ritiniu (stačiuoju, apskrituoju) vadinamas kūnas, gaunamas sukant stačiakampį apie tiesę, kurioje yra jo kraštinė. Skrituliai, kurių centrai O_1 ir O_2 – *ritinio pagrindai*, atkarpa AB – *sudaromoji* ($AB = l$), atkarpa $O_2A = O_1B$ – *pagrindo spindulys*, atkarpa O_1O_2 (atstumas tarp pagrindų plokštumų) – *cilindro aukštis* ($H = l$), stačiakampis $ABCD$ – *ašinis pjūvis*, atkarpa AC – *ašinio pjūvio įstrižainė*, tiesė O_1O_2 – *sukimosi ašis*, taškas F (atkarpos O_1O_2 vidurys) – *simetrijos centras*	
Ritinio išklotinė – stačiakampis ir du skrituliai	
Ritinio šoninio paviršiaus plotas $S_{\check{s}on} = 2\pi RH = 2\pi Rl$ **Ritinio viso paviršiaus plotas** (išklotinės plotas) $S_v = 2\pi R^2 + S_{\check{s}on} = 2\pi(R + H)R$	**Ritinio tūris** $V = S_0 \cdot H = \pi R^2 H$

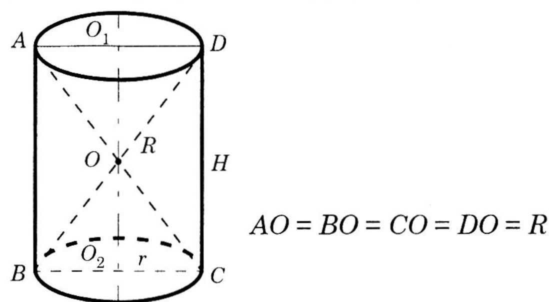
21. Ritinys

Apie ritinį galima *apibrėžti rutulį*. Jo centras yra aukštinės vidurio taške.

$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$,

čia R – rutulio spindulys,

r – ritinio pagrindo spindulys

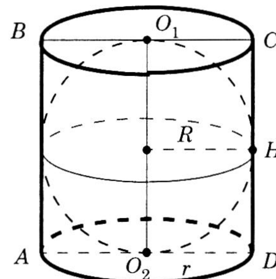


Į ritinį galima *įbrėžti rutulį*, jeigu ritinio pagrindo skersmuo lygus jo aukštinei.

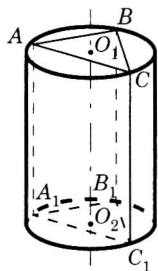
$R = r = 0{,}5H$,

čia R – rutulio spindulys,

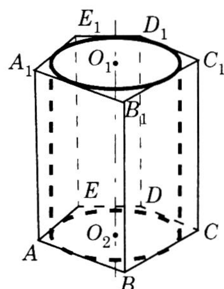
r – ritinio pagrindo spindulys



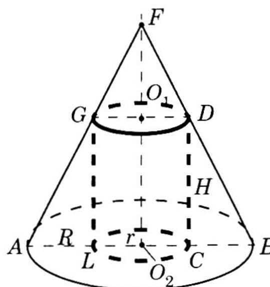
Prizmė, įbrėžta į ritinį



Prizmė, apibrėžta apie ritinį



Ritinys, įbrėžtas į kūgį



$AO_2 = O_2B = R$

$CD = GL = H;\ O_1G = r$

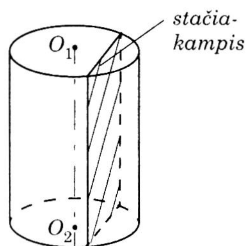
$$\frac{R - r}{H} = \frac{R}{FO_2} = \frac{r}{FO_2 - H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H_k}{H_k - H}$$

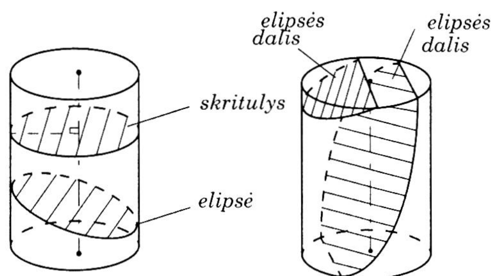
H_k – kūgio aukštinė

Ritinio kirtimas plokštumomis

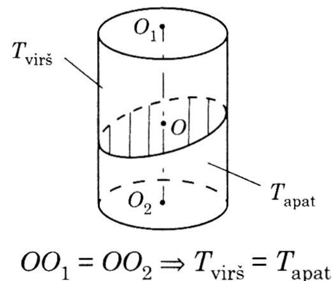
Pjūvis, gautas perkirtus ritinį plokštuma, lygiagrečia su ritinio ašimi, yra stačiakampis.



Pjūvis, gautas perkirtus ritinį plokštuma, statmena ritinio ašiai, yra skritulys



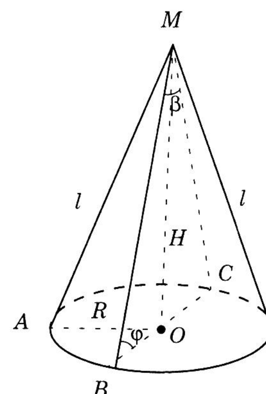
Pjūvis, einantis per O_1O_2 vidurio tašką, dalija ritinį į du lygius kūnus



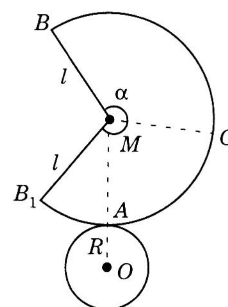
$OO_1 = OO_2 \Rightarrow T_{\text{virš}} = T_{\text{apat}}$

22. Kūgis

Kūgiu (stačiuoju, apskrituoju) vadinamas kūnas, gaunamas sukant statųjį trikampį apie tiesę, kurioje yra statinys.
Taškas M – kūgio *viršūnė*,
skritulys, kurio centras O – kūgio *pagrindas*,
atkarpa $MA = l$ – *sudaromoji*,
atkarpa $MA = H$ – kūgio *aukštinė*,
atkarpa $OA = R$ – pagrindo *spindulys*,
atkarpa $BC = 2R$ – pagrindo *skersmuo*,
trikampis MBC – *ašinis pjūvis*,
$\angle BMC = \beta$ – kampas prie ašinio pjūvio viršūnės,
$\angle MBO = \varphi$ – posvyrio kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos



Kūgio išklotinė – skritulio išpjova ir skritulys.
$\angle BMB_1 = \alpha$ – išklotinės kampas.
Išklotinės lanko ilgis $B\breve{C}B_1 = 2\pi R = l\alpha$ (α – radianų)



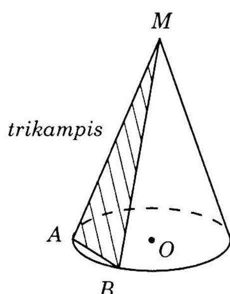
Šoninio paviršiaus plotas
$S_{\text{šon}} = \pi Rl$
Viso paviršiaus plotas (išklotinės plotas)
$S_{\text{v}} = \pi R(l + R)$

Kūgio tūris

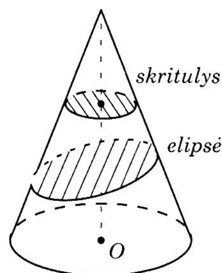
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Ryšys tarp išklotinės kampo α ir kampo prie ašinio pjūvio viršūnės β: $\alpha = 2\pi \sin \frac{\beta}{2}$

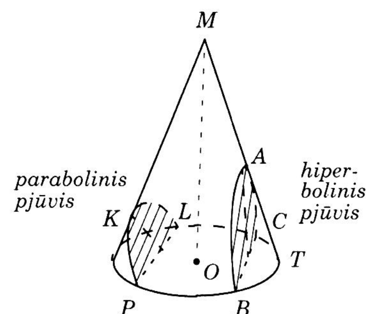
Kūgio kirtimas plokštumomis



Pjūvis, gautas perkirtus kūgį plokštuma, einančia per kūgio viršūnę, yra lygiašonis trikampis



Pjūvis, gautas perkirtus kūgį plokštuma, statmena kūgio ašiai, yra skritulys



$(ABC) \parallel MO$ $(KPL) \parallel MT$
MO – kūgio aukštinė,
MT – sudaromoji

22. Kūgis

Į kūgį visada galima įbrėžti rutulį. Jo centras yra kūgio ašyje ir sutampa su centru apskritimo, įbrėžto į trikampį, kuris yra kūgio ašinis pjūvis	$R_r = R_k \tan\frac{\varphi}{2}$; $R_r = \frac{HR_k}{R_k + l}$; $R_{bendr} = R_r \sin\varphi$
Apie kūgį visada galima apibrėžti rutulį. Jo centras yra kūgio ašyje ir sutampa su centru apskritimo, apibrėžto apie trikampį, kuris yra kūgio ašinis pjūvis	$R_r = \frac{R_k}{\sin\beta}$; $R_r^2 = (H - R_r)^2 + R_k^2$; $R_r = \frac{l^2}{2H}$; $(2R_r - H_k)H_k = R_k^2$

23. Nupjautinis kūgis

Nupjautiniu kūgiu vadinama kūgio dalis nuo pagrindo iki lygiagretaus su pagrindu kūgio pjūvio	
Skrituliai, kurių centrai O_1 ir O_2 – *viršutinis ir apatinis nupjautinio kūgio pagrindai*, r ir R – pagrindų spinduliai, atkarpa $AB = l$ – *sudaromoji*, α – posvyrio kampas tarp sudaromosios ir apatinio pagrindo, atkarpa O_1O_2 – *aukštinė* (atstumas tarp pagrindų plokštumų), trapecija $ABCD$ – *ašinis pjūvis* $H = l \sin\alpha$ $H^2 + (R - r)^2 = l^2$	
Į nupjautinį kūgį galima įbrėžti rutulį tada ir tik tada, kai sudaromoji lygi sumai pagrindų spindulių $R_r = 0{,}5H$	$l = R + r \Leftrightarrow$ egzistuoja įbrėžtinis rutulys

23. Nupjautinis kūgis

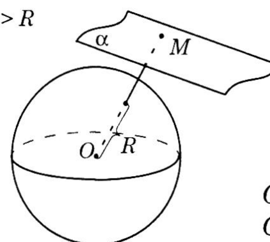
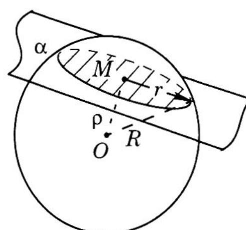
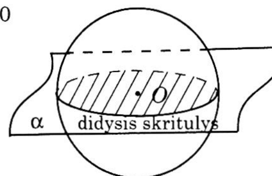
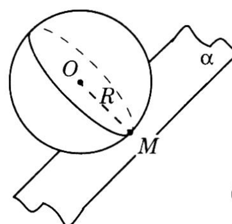
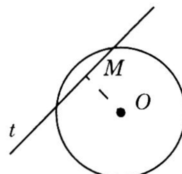
Nupjautinio kūgio išklotinė – dalis skritulinio žiedo ir du skrituliai	
Nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = \pi l(r + R)$ **Nupjautinio kūgio viso paviršiaus plotas** $S_v = S_1 + S_2 + S_{šon} = \pi l(r + R) + \pi R^2 + \pi r^2$	
Nupjautinio kūgio tūris $V = \frac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + rR + r^2)$	$\angle MFK = \frac{2\pi(R - r)}{l} = \varphi$ φ – išklotinės kampas
Apie nupjautinį kūgį visada galima apibrėžti rutulį. Jo centras yra tiesėje O_1O_2	$CF = FD$; $OF \perp CD \Rightarrow O$ – apibrėžtinio rutulys centras, R – apibrėžtinio rutulio spindulys, lygus apibrėžto apie ΔACD apskritimo spinduliui

24. Sfera ir rutulys

Sfera vadinama aibė erdvės taškų, nutolusių nuo duotojo taško (sferos centro) duotu atstumu $R > 0$ (sferos spindulys) (Sfera vadinama figūra, gaunama sukant pusapskritimį apie jo skersmenį)	
Rutuliu vadinama aibė erdvės taškų, esančių nuo duotojo taško (rutulio centro) atstumu, ne didesniu už duotąjį ($R > 0$ – rutulio spindulys). (Rutuliu vadiname sferos ribojamą erdvės dalį. Rutuliu vadiname figūrą, gaunamą sukant pusskritulį apie jo skersmenį)	
Skersmuo, einantis per stygos (ne skersmens) vidurio tašką, statmenas tai stygai.	CD – sferos skersmuo; $A, B \in S$ $AM = MB \Rightarrow OM \perp AB$
Sferos paviršiaus plotas $S = 4\pi R^2$	**Rutulio tūris** $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

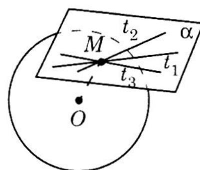
Rutulys (sfera) ir plokštuma

Plokštuma, turinti su sfera (rutuliu) vieną bendrą tašką, vadinama *liečiamąja plokštuma*, daugiau bendrų taškų – *kertančiąja plokštuma.*
Tiesė, turinti su sfera vieną bendrą tašką, vadinama *liečiamąja* tiese, du bendrus taškus – kertančiąja tiese

Tarkime, kad $\rho(O;\ \alpha)$ – atstumas nuo rutulio (sferos), kurio centras O ir spindulys R, centro iki plokštumos α. Jeigu $\rho > R$, tai rutulys (sfera) ir plokštuma bendrų taškų neturi	$\rho > R$  $OM \perp \alpha$; $OM = \rho\ (O;\ \alpha)$; $\rho > R$
Jeigu $\rho < R$, tai rutulio (sferos) ir plokštumos sankirta yra skritulys (apskritimas), kurio spindulys r: $r = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ Bet kuris rutulio (sferos) pjūvis plokštuma yra skritulys (apskritimas)	$\rho < R$ 
Rutulio pjūvis plokštuma, einančia per rutulio centrą ($\rho = 0$;), vadinamas *rutulio didžiuoju skrituliu.* Ši plokštuma yra rutulio simetrijos plokštuma ir dalija jį į dvi lygias dalis (du pusrutulius)	$\rho = 0$ 
Liečiamosios plokštumos požymis Jeigu plokštuma yra statmena sferos skersmeniui ir eina per jo galą, tai ta plokštuma yra sferos liečiamoji plokštuma. Jeigu $\rho = R$, plokštuma ir rutulys (sfera) turi vieną bendrą tašką. Plokštuma liečia rutulį (sferą)	$\rho = R$  $OM \perp \alpha$
Liečiamosios plokštumos savybė Plokštuma, liečianti sferą, statmena skersmeniui (spinduliui), einančiam per lietimosi tašką	
Liečiamosios tiesės požymis Jeigu tiesė eina per sferos skersmens galą ir yra statmena jam, tai ta tiesė yra sferos liečiamoji tiesė	 $OM \cap t = M$; $OM \perp t \Rightarrow t$ – liečiamoji

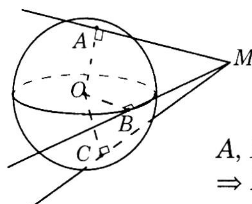
Rutulys (sfera) ir plokštuma (tęsinys)

Visos liečiamosios tiesės, einančios per vieną sferos tašką, yra vienoje plokštumoje, sferos liečiamojoje plokštumoje



$t_1 \perp OM$; $t_2 \perp OM$, $t_3 \perp OM \Rightarrow$
$\Rightarrow t_1, t_2, t_3 \subset \alpha$, $\alpha \perp OM$

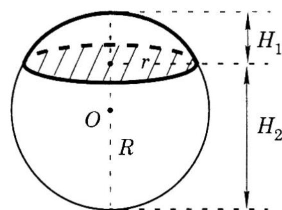
Liečiamųjų tiesių, nuleistų iš vieno taško (nesančio sferoje), atkarpos iki sferos yra lygios



A, B, C – lietimosi taškai $\Rightarrow$
$\Rightarrow MA = MB = MC$

Rutulio nuopjova

Kertančioji plokštuma dalija rutulį į dvi *rutulio nuopjovas.*
H – nuopjovos aukštinė, $0 < H < 2R$,
r – nuopjovos pagrindo spindulys:
$r = \sqrt{H(2R - H)}$



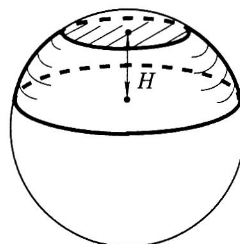
Rutulio nuopjovos tūris

$V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$

Rutulio nuopjovos sferinio paviršiaus plotas
$S = 2\pi RH$

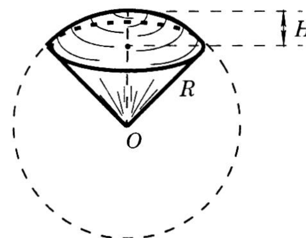
Rutulio sluoksnis

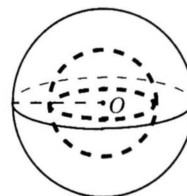
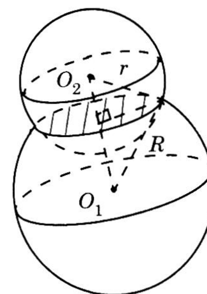
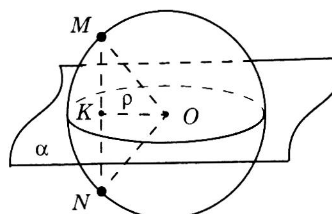
Rutulio sluoksniu vadinama rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių kertančiųjų plokštumų. Atstumas (H) tarp kertančiųjų plokštumų vadinamas rutulio *sluoksnio aukštine*, o pjūviai – *sluoksnio pagrindais. Rutulio sluoksnio sferinio paviršiaus plotą* (*tūrį*) galima apskaičiuoti kaip dviejų rutulio nuopjovų sferinių paviršiaus plotų (tūrių) skirtumą



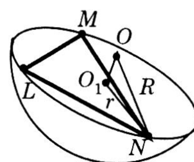
Rutulio išpjova

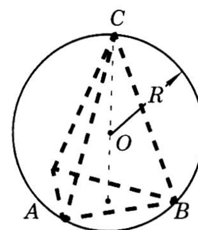
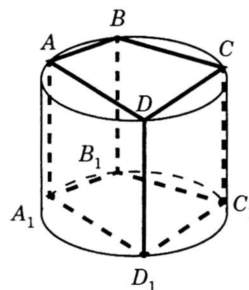
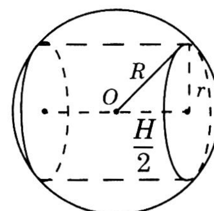
Rutulio išpjova vadinama figūra, gaunama sukant skritulio išpjovą apie skritulio skersmenį, neturintį bendrų vidinių taškų su skritulio išpjova

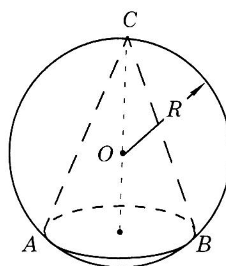
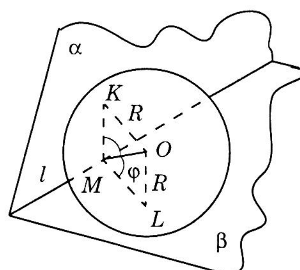
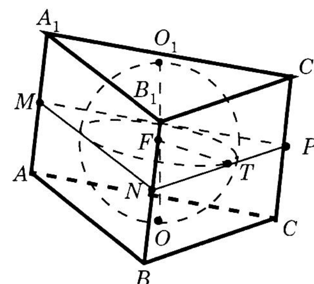
Rutulio išpjova (tęsinys)	
Rutulio išpjovos tūris $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$	
Rutulio išpjovos sferinio paviršiaus plotas lygus atitinkamos rutulio nuopjovos sferinio paviršiaus plotui	
Rutulio išpjovos pilnojo paviršiaus plotas $S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$	

Dvi sferos	
Dvi *sferos*, turinčios bendrą centrą, vadinamos *koncentrinėmis*	
Dvi *sferos*, turinčios vieną bendrą tašką, liečia viena kitą. $O_1O_2 = R + r$ (išorinis lietimasis) $O_1O_2 = \mid R - r \mid$ (vidinis lietimasis)	
Jeigu $\mid R - r \mid < O_1O_2 < R + r$, tai sferos kertasi apskritimu, kurio spindulys gali būti apskaičiuotas kaip trikampio, kurio kraštinės R, r ir O_1O_2, aukštinė, nuleista į kraštinę O_1O_2	
Per du erdvės taškus gali būti nubrėžta be galo daug sferų. Jų centrai yra plokštumoje, einančioje per atkarpos vidurį, statmenai tiesei, kurioje yra ta atkarpa. $R^2 = \rho^2 + 0{,}25a^2$	 $MN = a$ $\rho = \rho\ (O, MN)$

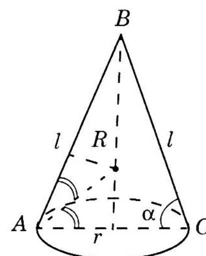
24. Sfera ir rutulys

Dvi sferos (tęsinys)	
Per tris trikampio viršūnes galima nubrėžti be galo daug sferų. Jų centrai yra tiesėje, statmenoje trikampio plokštumai ir einančioje per apibrėžto apie trikampį apskritimo centrą. $R^2 = \rho^2 + r^2$	 $\rho = \rho\,(O, (MLN))$
Per keturis taškus, nesančius vienoje plokštumoje, galima nubrėžti sferą ir tik vieną	

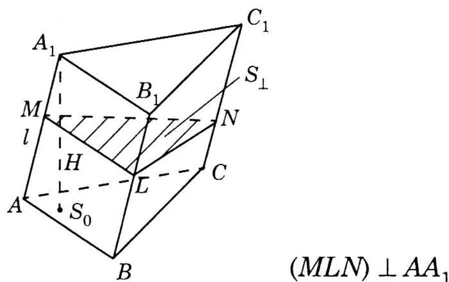
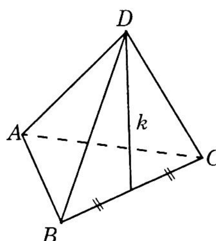
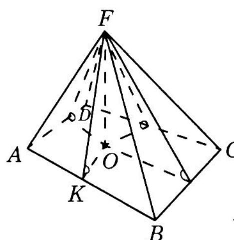
Apibrėžtoji sfera	
Sfera vadinama *apibrėžtąja apie briaunainį*, jeigu ji eina per visas jo viršūnes	Kad apie briaunainį apibrėžtume sferą, būtina (bet nepakankama), kad apie kiekvieną jo sieną būtų galima apibrėžti apskritimą
Apibrėžtosios sferos (jeigu tokia yra) centras yra plokštumose, statmenose braunainio briaunoms ir einančiose per jų vidurio taškus; taip pat tiesėse, statmenose briaunainio sienoms ir einančiose per apibrėžtų apie briaunainio sienas apskritimų centrus	Apibrėžtosios sferos spindulys lygus spinduliui sferos, einančios per bet kurias keturias briaunainio viršūnes, nesančias vienoje plokštumoje
Apie bet kurią trikampę piramidę galima apibrėžti sferą. Apie n-kampę piramidę galima apirėžti sferą tada ir tik tada, kai apie jos pagrindą galima apibrėžti apskritimą	
Apie prizmę galima apibrėžti sferą tada ir tik tada, kai prizmė yra stačioji ir apie jos pagrindą galima apibrėžti apskritimą	
Sfera vadinama apibrėžtąja apie cilindrą, jei joje yra cilindro pagrindų apskritimai. Apie cilindrą visada galima apibrėžti sferą. $R^2 = 0{,}25H^2 + r^2$	

Apibrėžtoji sfera (tęsinys)	
Sfera vadinama *apibrėžtąja apie kūgį*, jeigu joje yra kūgio viršūnė ir pagrindo apskritimas. Apie kūgį visada galima apibrėžti sferą, jos spindulys lygus apskritimo, apibrėžto apie kūgio ašinį pjūvį, spinduliui	
Jeigu sfera liečia dvisienio kampo sienas, tai jos centras yra pusplokštumėje, dalijančioje dvisienį kampą į du lygius dvisienius kampus. $R = OM \sin \varphi = ML \cdot \tan \varphi = m$, čia 2φ – dvisienio kampo didumas, OM – atstumas nuo sferos centro iki briaunos, m – atstumas nuo sferos centro iki sienos	 $MK \perp l$; $ML \perp l$ $OK \perp \alpha$; $OL \perp \beta$
Įbrėžtinė sfera	
Sfera vadinama *įbrėžtąja į briaunainį*, jei ji liečia visas briaunainio sienų plokštumas vidiniuose taškuose	Į trikampę piramidę visada galima įbrėžti sferą. Į n-kampę piramidę galima įbrėžti sferą tada ir tik tada, kai visų piramidės dvisienių kampų pusiaukampinės plokštumos turi bendrą tašką
Į stačiąją prizmę galima įbrėžti sferą tada ir tik tada, kai prizmės aukštinė lygi įbrėžto į jos pagrindą apskritimo skersmeniui	Į prizmę galima įbrėžti sferą tada ir tik tada, kai prizmės aukštinė lygi įbrėžto į jos statmenąjį pjūvį apskritimo skersmeniui
Jeigu į briaunainį galima įbrėžti sferą, tai $V = \frac{1}{3} R S_v$, čia V – briaunainio tūris, S_v – visas briaunainio paviršius	
Sfera vadinama įbrėžtąja į cilindrą, jeigu ji liečia cilindrų pagrindus ir cilindrinį paviršių	Į cilindrą galima įbrėžti sferą tada ir tik tada, jeigu jo aukštinė (sudaromoji) lygi pagrindo skersmeniui. $R = 0{,}5H = R_{sf}$

24. Sfera ir rutulys

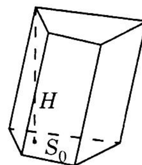
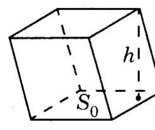
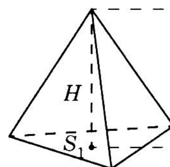
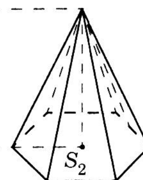
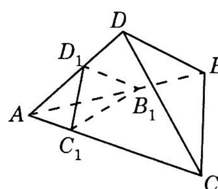
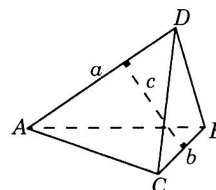
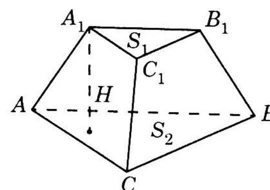
Įbrėžtoji sfera (tęsinys)	
Sfera vadinama įbrėžtąja į kūgį, jeigu ji liečia kūgio pagrindą ir kūginį paviršių. Į kūgį visada galima įbrėžti sferą. $R = r \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = S_{ABC} : (r + l)$	

25. Paviršiai ir tūriai

Briaunainio viso paviršiaus plotas lygus jo sienų plotų sumai.	
Prizmės šoninio paviršiaus plotą galima skaičiuoti kaip: šoninių sienų plotų sumą; pjūvio, statmeno prizmės paviršiaus šoninei briaunai, perimetro ir šoninės briaunos ilgio sandaugą: $S_{šon} = P_{\perp} \cdot l$ *Prizmės viso paviršiaus plotas*: $S_{v} = 2S_0 + S_{šon}$	 $(MLN) \perp AA_1$
Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus jos šoninių sienų plotų sumai.	
Taisyklingosios piramidės plotas: $S_{šon} = \frac{1}{2} Pk$, čia P – perimetras, k – apotema	 $S_{šon} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BDC}$
Jei visi dvisieniai piramidės kampai prie pagrindo tarpusavyje lygūs (visos šoninių sienų aukštinės, išvestos į pagrindo briaunas lygios), tai: $S_{šon} = \frac{S_0}{\cos \varphi}$ $S_0 = S_{ABCD}$	 $\angle (F, AB, C) = \angle FKO = \varphi$

25. Paviršiai ir tūriai

Piramidės viso paviršiaus plotas $S_v = S_0 + S_{šon}$	
Ritinio šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = 2\pi RH$ *Ritinio viso paviršiaus plotas* $S_v = 2\pi R(R + H) = 2S_0 + S_{šon}$	H R
Kūgio šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = \pi Rl$ *Kūgio viso paviršiaus plotas* $S_v = \pi R(R + l) = S_0 + S_{šon}$	l R
Nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = \pi(R + r)l$ *Nupjautinio kūgio viso paviršiaus plotas* $S_v = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi(R + r)l$	r l R
Sferos paviršiaus plotas $S = 4\pi R^2$ *Sferos nuopjovos sferinio paviršiaus plotas* $S_{šon} = 2\pi RH$ *Sferos nuopjovos viso paviršiaus plotas* $S_v = S_{šon} + \pi r^2 = 2\pi RH + \pi r^2$	H r R O $r^2 = R^2 - (R - H)^2 = (2R - H) \cdot H$
Atkarpos AB, neturinčios su ašimi l bendrų vidinių taškų, sūkio paviršius lygus tos atkarpos projekcijos ašyje ir apskritimo, kurio spindulys lygus atkarpos vidurio statmeniui, nuleistam į ašį, ilgio sandaugai	l A_1 A M H B_1 B R O $S = A_1B_1 \cdot 2\pi MO = 2\pi RH$
Panašių kūnų plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui	
Įvairių figūrų tūriai lygūs Jeigu kūnas suskaidytas į keletą kūnų, neturinčių bendrų vidinių taškų, tai jo tūris lygus tų kūnų tūrių sumai	

Kūnų tūriai (tęsinys)	
Prizmės tūris lygus: jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai $V = S_0H$; jos statmenojo pjūvio ploto ir šoninės briaunos sandaugai $V = S_{\perp}l$	  $V_1 = S_o \cdot H$ $V_2 = S_o \cdot h$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}$
Piramidės plotas lygus vienai trečiajai jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos: $V = \frac{1}{3} S_0H$	  $V_1 = \frac{1}{3} S_1H$; $V_2 = \frac{1}{3} S_2H$; $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$
Prizmių (piramidžių), kurių pagrindai lygiapločiai, tūrių santykis lygus jų aukštinių santykiui. Prizmių (piramidžių), kurių lygios aukštinės, tūrių santykis lygus jų pagrindų plotų santykiui	
Tetraedrų, turinčių bendrą trisienį kampą, *tūrių santykis* lygus briaunų, sudarančių tą kampą, sandaugų santykiui	 $\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD}$
Tetraedro tūrį galima skaičiuoti pagal formulę: $V = \frac{1}{6} abc \sin \varphi$, čia a ir b – prasilenkiančių briaunų ilgiai, c – atstumas tarp jų, φ – kampas tarp jų	
Nupjautinės piramidės tūris $V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$	
Briaunainio tūrį galima skaičiuoti skaidant jį į neturinčius bendrų vidinių taškų tetraedrus (*trianguliacija*) ir sumuojant jų tūrius	Jei į briaunainį galima įbrėžti rutulį, tai briaunainio tūris lygus: $V = \frac{1}{3} RS_v$, čia R – įbrėžtinio rutulio spindulys, S_v – briaunainio paviršiaus plotas

25. Paviršiai ir tūriai

Kūnų tūriai (tęsinys)		
Ritinio tūris $V = \pi R^2 H$	*Kūgio tūris* $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	*Nupjautinio kūgio tūris* $V = \frac{\pi}{3} H(R^2 + Rr + r^2)$
Rutulio tūris $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	*Rutulio nuopjovos tūris* $V = \pi H^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3}H\right)$	*Rutulio išpjovos tūris* $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$
Sukinio tūrio skaičiavimas naudojant integralus $V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$	y, y = f (x), x, a, 0, b	
Panašiųjų kūnų tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui		

26. Koordinačių metodas

Taško koordinatės tiesėje	
Atkarpos vidurio koordinatės: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ Atkarpos tarp dviejų koordinačių ilgis (atstumas tarp dviejų taškų): $MN = \mid x_1 - x_2 \mid$ $M(x_1)$, $N(x_2)$, 0, $C(x_v)$	Taškas M atkarpą AB dalija santykiu λ (skaičiuojant nuo A), jeigu $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ ($\lambda \neq -1$). Taško, dalijančio atkarpą AB santykiu λ, koordinatės: $x_m = \frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda}$ $A(x_a)$, $B(x_b)$, $M(x_m)$
Taško koordinatės plokštumoje. Stačiakampė koordinačių sistema	
Atkarpos vidurio koordinatės: $AC = CB \Rightarrow C\left(\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}\right)$ Atkarpos ilgis: $AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	y, A, y_a, C, M, y_b, B, x, x_a, 0, x_b
Taško, dalijančio atkarpą AB santykiu λ ($\lambda \neq -1$), koordinatės : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Rightarrow M\left(\frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda}; \frac{y_a + \lambda y_b}{1 + \lambda}\right)$	

26. Koordinačių metodas

Tiesės lygtis

Bendroji tiesės l lygtis: $ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

$abc \neq 0$	$a = 0$ $l \parallel 0x$	$b = 0$ $l \parallel 0y$	$c = 0$ $0 \in l$
$ax + by + c = 0$	$by + c = 0$	$ax + c = 0$	$ax + by = 0$

Kryptinė tiesės lygtis ($b \neq 0$): $y = kx + p$ $k = \tan \alpha$	Ašinė tiesės lygtis ($c \neq 0$): $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$
Tiesės, einančios per tašką $M(x_0, y_0)$ duotąja kryptimi k, lygtis	$y = y_0 + k \cdot (x - x_0)$
Dviejų tiesių lygiagretumo sąlyga	$k_1 = k_2$
Dviejų tiesių statmenumo sąlyga	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Kampas tarp dviejų (nestatmenų) tiesių	$\tan \varphi = \left\lvert \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right\rvert$
Atstumas tarp taško $M(x_0, y_0)$ ir tiesės $ax + by + c = 0$	$\frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \rho(M, l)$
Tiesių pluošto (visų tiesių, einančių per tašką $M(x_0, y_0)$ statmenų vektoriui $\vec{n}\ (a; b)$) lygtis	$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

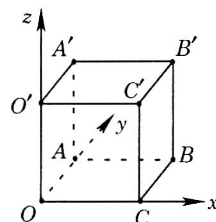
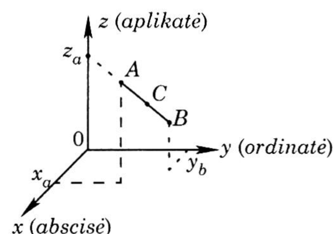
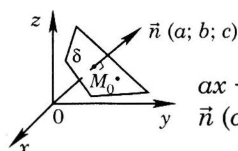
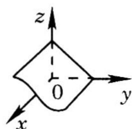
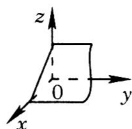
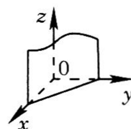
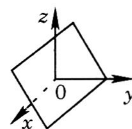
Apskritimo lygtis

Kai centras yra koordinačių pradžia	$x^2 + y^2 = r^2,\ r > 0$
Kai centras yra taškas $M(x_0, y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,\ r > 0$

Bet kuri $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ pavidalo lygtis plokštumoje apibrėžia arba apskritimą, arba tašką, arba tuščią aibę.

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c$$

26. Koordinačių metodas

<table>
<tr><th colspan="4">Taško koordinatės erdvėje. Stačiakampė koordinačių sistema erdvėje</th></tr>
<tr><td colspan="2">Taško koordinatės kube:
$O\ (0;\ 0;\ 0)$ $A\ (0;\ a;\ 0)$
$B\ (a;\ a;\ 0)$ $C\ (a;\ 0;\ 0)$
$O'\ (0;\ 0;\ a)$ $A'\ (0;\ a;\ a)$
$B'\ (a;\ a;\ a)$ $C'\ (a;\ 0;\ a)$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Atkarpos vidurio koordinatės: $AC = CB \Rightarrow$
$\Rightarrow C\ \frac{x_a + x_b}{2};\ \frac{y_a + y_b}{2};\ \frac{z_a + z_b}{2}$</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Atkarpos ilgis:
$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Taško M, dalijančio atkarpą AB santykiu λ, $(\lambda \neq -1)$, koordinatės:
$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow M\ \frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda};\ \frac{y_a + \lambda y_b}{1 + \lambda};\ \frac{z_a + \lambda z_b}{1 + \lambda}$</td></tr>
<tr><th colspan="4">Plokštumos lygtis</th></tr>
<tr><td colspan="2">Bendroji plokštumos lygtis:
$ax + by + cz + d = 0\ \ (a^2 + b^2 \neq 0)$</td><td colspan="2" rowspan="2">
$ax + by + cz + d = 0$
$\vec{n}\ (a;b;c) \perp \delta$ (normalės vektorius)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Koordinatinių plokštumų lygtys.
$x = 0$ – plokštuma $y0z$
$y = 0$ – plokštuma $x0z$
$z = 0$ – plokštuma $x0y$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Dalinės plokštumos lygtys</td></tr>
<tr><td>$a = 0$
$\delta \parallel 0x$</td><td>$b = 0$
$\delta \parallel 0y$</td><td>$c = 0$
$\delta \parallel 0z$</td><td>$d = 0$
$0 \in l$</td></tr>
<tr><td>
$by + cz + d = 0$</td><td>
$ax + cz + d = 0$</td><td>
$ax + by + c = 0$</td><td>
$ax + by + cz = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plokštumos, einančios per tašką $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}\ (a;\ b;\ c)$, lygtis</td><td colspan="2">$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$</td></tr>
</table>

26. Koordinačių metodas

Plokštumos lygtis (tęsinys)	
Ašinė plokštumos lygtis ($d \neq 0$)	$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$
Kampas tarp dviejų plokštumų $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{\lvert a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$
Plokštumų lygiagretumo sąlyga	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$
Plokštumų statmenumo sąlyga	$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
Atstumas nuo taško $M(x_0, y_0, z_0)$ iki plokštumos $ax + by + cz + d = 0$	$\rho = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Parametrinė tiesės (einančio per tašką M_0 ir lygiagrečios su vektoriumi $\vec{s}$) lygtis: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$	$\vec{s} \parallel l$ $\vec{s}$ – tiesės krypties vektorius $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ $\vec{s}(\alpha; \beta; \gamma) \parallel l$
Tiesės, einančios per du taškus $M(x_1, y_1, z_1)$ ir $N(x_2, y_2, z_2)$ lygtis	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
Kampas tarp dviejų tiesių, išreikštų parametrinėmis lygtimis	$\cos\varphi = \frac{\lvert\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2\rvert}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$
Tiesių, išreikštų parametrinėmis lygtimis, lygiagretumo sąlyga	$\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2 = \gamma_1 : \gamma_2$
Kampas tarp tiesės ir plokštumos	$\sin\varphi = \frac{\lvert a\alpha + b\beta + c\gamma\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$

26. Koordinačių metodas

Sferos lygtis	
Kai centras yra koordinačių pradžia	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; $r > 0$
Kai centras yra taškas $M(x_0, y_0, z_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, $r > 0$
Lygtis $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ ervėje apibrėžia arba sferą, arba tašką, arba tuščią aibę. $\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}c\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$	

27. Vektoriai ir koordinatės

Vektoriumi vadinama kryptinė atkarpa. Vektorius apibūdinamas *kryptimi* ir *ilgiu*. *Kryptis* – vienakrypčių spindulių aibė. *Vektoriaus ilgis* $\lvert \vec{a} \rvert$ – *atstumas* nuo jo pradžios iki pabaigos.	A, B, $\vec{a}$ $AB = \lvert \vec{a} \rvert = \lvert \overrightarrow{AB} \rvert$
Kolinearieji vektoriai. Vienakrypčiai ir priešpriešiniai vektoriai	$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ – kolinearieji vektoriai $(\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \vec{a}_3 \parallel \vec{a}_4)$ $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ – vienakrypčiai vektoriai $\vec{a}_3 \downarrow\uparrow \vec{a}_4$ – priešpriešiniai vektoriai
Vektorių lygumas	$\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ \lvert \vec{a} \rvert = \lvert \end{cases}$
Kampas tarp vektorių	B, C, A, D, 72° $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 108°$ $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 72°$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 72°$

27. Vektoriai ir koordinatės

Ortogonalieji vektoriai. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$	$\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{a} \perp \vec{b}$ – ortogonalieji vektoriai
Komplanarieji vektoriai – tai vektoriai, esantys vienoje arba lygiagrečiose plokštumose	B_1, C_1, A_1, D_1, B, C, A, D $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1B}$ – komplanarieji $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$ – komplanarieji $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ – nekomplanarieji
1 pavyzdys (kampo tarp dviejų vektorių plokštumoje radimas).	*2 pavyzdys* (kampo tarp dviejų vektorių erdvėje, radimas).
$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 135°$; $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = 45°$ Jeigu $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 2$; $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = 1$, tai $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{GD}) = \arctan 2$; $\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) =$ $= \pi - \angle BDC$. Pagal kosinusų teoremą: $BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC \cdot \cos\angle BDC$. $1 = 13 + 8 - 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos\angle BDC$. $\angle BDC = \arccos\frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) =$ $= \pi - \arccos\frac{5\sqrt{26}}{26}$. B, C, A, G, D, 45°	$\angle(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{DC_1}) = 90°$; $\angle(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{DB_1}) = 90°$; $\angle(\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CA}) = \angle(\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{C_1A_1}) = 120°$, nes $\Delta\, DC_1A_1$ – lygiašonis. $\angle(\overrightarrow{DB_1}; \overrightarrow{DC}) = \angle D$ yra $\Delta\, DB_1C \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle(\overrightarrow{DB_1}; \overrightarrow{DC}) = \text{Arctan}\,\sqrt{2}$. B_1, C_1, A_1, D_1, B, C, A, D
Vekorių sudėtis	
Laužtės taisyklė $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, čia $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$	$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; C, $\vec{c}$, $\vec{b}$, A, B, $\vec{a}$, O
Lygiagretainio taisyklė $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF}$ F, A, $\vec{a}$, B, $\vec{b}$, O $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $OBFA$ – lygiagretainis $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b}$	Gretasienio taisyklė F, C, $\vec{c}$, A, $\vec{a}$, O, $\vec{b}$, B $\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

27. Vektoriai ir koordinatės

Vektorių sudėtis (tęsinys)	
Sudėties taisyklės	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
Priešingi vektoriai $\left.\begin{array}{l}\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert\\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}=-\vec{b};\ \vec{b}=-\vec{a};\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$	**Vektorių atimtis** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ $\overrightarrow{AG}=-\vec{b};\ \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}$ $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$
Vektoriaus daugyba iš skaičiaus Vektoriaus daugybos iš skaičiaus (skaliaro) taisyklės. $\alpha\cdot(\lambda\vec{a})=(\alpha\lambda)\cdot\vec{a}$ $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$ $(\alpha+\lambda)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\lambda\vec{a}$ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$	$\overrightarrow{OA}=\vec{a};\ \overrightarrow{OA'}=\lambda\cdot\vec{a}\ (\lambda>0)$ $\lvert\overrightarrow{OA'}\rvert=\lambda\cdot\lvert\vec{a}\rvert$ $\overrightarrow{OB}=\vec{b};\ \overrightarrow{OB'}=\mu\cdot\vec{b},\ (\mu<0)$ $\lvert\overrightarrow{OB'}\rvert=-\mu\cdot\lvert\vec{b}\rvert$ $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$
Vektoriaus $\vec{c}$ reiškimas plokštumoje dviem jam nekolineariais vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ($\vec{a}\nparallel\vec{b}$)	$\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=x\vec{a}+y\vec{b}$ vektoriaus $\vec{c}$ reiškimas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kai $\vec{a}\nparallel\vec{b}$
Vektoriaus $\vec{r}$ reiškimas erdvėje trimis nekomplanariaisiais vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$	$\vec{r}=\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$ $=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ – vektoriaus $\vec{r}$ reiškimas vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, kai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nekomplanarūs

Vektoriaus reiškimo pavyzdžiai

1 pavyzdys.

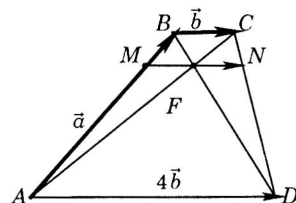
$\overrightarrow{AB}=\vec{a};\ \overrightarrow{AD}=\vec{b};\ BG:GC=2;\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+\left(-\frac{1}{3}\right)\vec{b}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b};\quad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

27. Vektoriai ir koordinatės

Vektorių reiškimo pavyzdžiai (tęsinys)

2 pavyzdys.

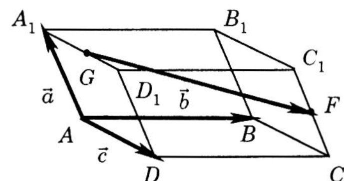


$\overrightarrow{AB}=\vec a$; $\overrightarrow{BC}=\vec b$; $AD=4BC \Rightarrow \overrightarrow{AD}=4\vec b$; $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}(\vec a+\vec b)=\frac{4}{5}\vec a+\frac{4}{5}\vec b$

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=4\vec b-\left(\frac{4}{5}\vec a+\frac{4}{5}\vec b\right)=-\frac{4}{5}\vec a+\frac{16}{5}\vec b$

$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{FN}=2\cdot\left(\frac{4}{5}b\right)=\frac{8}{5}\vec b=0\cdot\vec a+\frac{8}{5}\vec b$

3 pavyzdys.

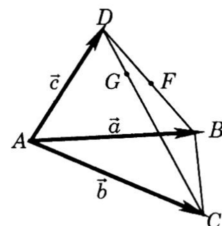


$\overrightarrow{AA_1}=\vec a$; $\overrightarrow{AB}=\vec b$; $\overrightarrow{AD}=\vec c$; $A_1G=GD_1$; $C_1F=FC$

$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\left(-\frac{1}{2}\vec c\right)+(-\vec a)+(\vec b+\vec c)+\left(\frac{1}{2}\vec a\right)=$

$=-\frac{1}{2}\vec c-\vec a+\vec b+\vec c+\frac{1}{2}\vec a=-\frac{1}{2}\vec a+\vec b+\frac{1}{2}\vec c$

4 pavyzdys.



$\overrightarrow{AB}=\vec a$; $\overrightarrow{AC}=\vec b$; $\overrightarrow{AD}=\vec c$; $DG=\frac{1}{4}CD$; $DF=FB$

$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2}\vec a-\frac{1}{2}\vec c\right)+\vec b=-\frac{1}{2}\vec a+\vec b-\frac{1}{2}\vec c$

$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{4}(\vec c-\vec b)+\frac{1}{2}(\vec a-\vec c)=\frac{1}{2}\vec a-\frac{1}{4}\vec b-\frac{1}{4}\vec c$

Dviejų vektorių kolinearumo sąlyga	$\vec a \parallel \vec b \Leftrightarrow \begin{cases} x\vec a + y\vec b = \vec 0 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$ $\vec a \parallel \vec b \Leftrightarrow \vec a=\lambda\vec b$ arba $\vec b=\mu\vec a$, jeigu $\vec a\neq\vec 0$; $\vec b\neq\vec 0$
Trijų vektorių komplanarumo sąlyga	$\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ – komplanarieji vektoriai $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\vec a+y\vec b+z\vec c=\vec 0 \\ x^2+y^2+z^2\neq 0 \end{cases}$ $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ – nenuliniai komplanarieji vektoriai, tai $\vec a=\alpha\vec b+\beta\vec c$
Vektorių skaliarinė sandauga	$\vec a\cdot\vec b=\lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert\cdot\cos\angle(\vec a,\vec b)$
Skaliarinės daugybos taisyklės	$\vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a$ $\vec a\cdot\vec a\geqslant 0$; $\vec a\cdot\vec a=\lvert\vec a\rvert^2$ $-\lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert\leqslant\vec a\cdot\vec b\leqslant\lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert$ $\vec a\cdot(\vec b+\vec c)=\vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec c$ $\vec a\cdot\vec b=0\Leftrightarrow\vec a\perp\vec b$ $\vec a\cdot\vec b=\lvert\vec a\rvert\cdot\mathrm{pr}_a\vec b=\lvert\vec b\rvert\cdot\mathrm{pr}_b\vec a$

27. Vektoriai ir koordinatės

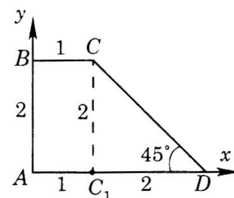
Vektorių skaliarinė sandauga (tęsinys)	
Skaliarinės sandaugos formulės taikymas sprendžiant uždavinius	$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $\quad \text{pr}_b\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$

1 pavyzdys.

Rasti kampą tarp $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{DC}$. Braižome koordinačių sistemą. Tada $B(0; 2)$; $C(1; 2)$; $D(3; 0)$, $\overrightarrow{BD}(3; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 2)$.

$$\cos\angle(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}}{\lvert\overrightarrow{BD}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{DC}\rvert} = \frac{3\cdot(-2) + (-2)\cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{26}} =$$

$$= -\frac{5\sqrt{26}}{26} \quad \angle(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DC}) = \pi - \arccos\frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

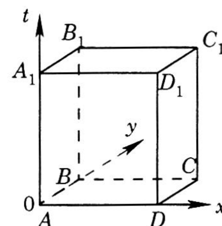


2 pavyzdys.

Rasti $\angle(\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CA}) = \alpha$. Brėžiame koordinačių sistemą. Tada $A(0; 0; 0)$; $C(a; a; 0)$; $D(a; 0; 0)$; $C_1(a; a; a)$; $\overrightarrow{DC_1}(0; a; a)$; $\overrightarrow{CA}(-a; -a; 0)$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{CA}}{\lvert\overrightarrow{DC_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CA}\rvert} = \frac{0\cdot(-a) + a\cdot(-a) + a\cdot 0}{0^2 + a^2 + a^2\cdot\sqrt{(-a)^2 + (-a)^2 + 0}} = \frac{-a^2}{2a^2} = \frac{-1}{2}.$$

Taigi $\alpha = \angle(\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CA}) = 120°$.



Vektoriaus koordinatės plokštumoje. Pagrindinės formulės	
Jeigu *plokštumos* vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės (x_1, y_1), o vektoriaus $\vec{b}$ koordinatės (x_2, y_2), tai:	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ $k\vec{a} = (kx_1; ky_1),\ k \in \mathbf{R}$ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
Vektoriaus, esančio plokštumoje, ilgis koordinatėmis	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, čia $\vec{a}(x_1, y_1)$
Kampas tarp dviejų plokštumos vektorių	$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Arccos}\,\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, čia $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2)$
Vektorių $\vec{a}(x_1, y_1)$ ir $\vec{b}(x_2, y_2)$, esančių plokštumoje, kolinearumo sąlyga	$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ arba $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$, arba $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases}$

27. Vektoriai ir koordinatės

Vektorių koordinatės plokštumoje. Pagrindinės formulės (tęsinys)	
Plokštumos vektorių $\vec{a}(x_1, y_1)$ ir $\vec{b}(x_2, y_2)$ ortogonalumo sąlyga	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
Vektoriaus koordinatės erdvėje. Pagrindinės formulės	
Jeigu *erdvės* vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės (x_1, y_1, z_1), o vektoriaus $\vec{b}$ koordinatės (x_2, y_2, z_2), tai:	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$ $k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$, $k \in \mathbf{R}$ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2; \alpha z_1 + \beta z_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
Erdvės vektoriaus ilgis koordinatėmis	$\vert\vec{a}\vert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$
Kampas tarp dviejų erdvės vektorių	$\angle(\vec{a}, \vec{b}) =$ $= \operatorname{Arccos} \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$
Erdvės vektorių $\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1)$ ir $\vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$ komplanarumo sąlyga	$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2$ arba $\left.\begin{matrix} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{matrix}\right\}$, arba $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases}$
Erdvės vektorių $\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1)$ ir $\vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$ ortogonalumo sąlyga	$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Matematika

ARITMETIKA

Aritmetinių veiksmų dėsniai
perstatomumo:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

jungiamumo:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

skirstomumo:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ženklai dauginant (dalijant) skaičius

Dauginamieji (dalinys ir daliklis)		Rezultatas
+	+	+
+	–	–
–	–	+

Veiksmų su racionaliaisiais skaičiais (trupmenomis) atlikimo taisyklės

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Aritmetinė progresija
n-tojo nario formulė:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

pirmųjų n narių suma:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

savybė:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_k + a_{n-k}$$

Geometrinė progresija
n-tojo nario formulė:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

pirmųjų n narių suma:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

savybė:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ... = b_k \cdot b_{n-k}$$

nykstamosios geometrinės progresijos ($0 < | q | < 1$) pirmųjų n narių sumos formulė:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Kai kurios skaičių eilutės (baigtinės)

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + ... + (2n - 2) + 2n = n\,(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n - 1)^2 + n^2 =$$

$$= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1)$$

Proporcija

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ekvivalenti šioms lygybėms:

$$ad = bc; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Aritmetinis vidurkis

dviejų dydžių:

$$\frac{a+b}{2}$$

n dydžių:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Kvadratinis vidurkis
dviejų dydžių:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

n dydžių:

$$\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}$$

Geometrinis vidurkis *(proporcinis vidurkis)*
dviejų dydžių:

$$\sqrt{ab}$$

n dydžių:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$

Aukso pjūvis
Dydis a dalijasi į dalis x ir $a-x$ taip, kad

$$x=\sqrt{a(a-x)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a\approx 0{,}618\,a$$

ALGEBRA

Laipsnio savybės

$$a^0=1$$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\qquad (a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$a^m:a^n=a^{m-n}\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}\qquad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}\qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Kvadratinės šaknies savybės

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\qquad \sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}\qquad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt{a})^m=\sqrt{a^m}\qquad \sqrt{a^m}=(\sqrt{|a|})^m\qquad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$$

Trumposios daugybos formulės

sumos kvadratas:	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
skirtumo kvadratas:	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
sumos kubas:	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
skirtumo kubas:	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
kvadratų skirtumas:	$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)$
kubų suma:	$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$
kubų skirtumas:	$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

Niutono (Newton) binomas

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+$$
$$+\ldots+b^n$$

$$C_n^1=n;\quad C_n^2=\frac{n(n-1)}{2};\quad C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Dvinario kvadrato išskyrimas iš kvadratinio trinario

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left(\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Vieto (Viète) teorema (*šaknų savybė*)
kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

redukuotosios kvadratinės lygties
$x^2+px+q=0$:

$$x_1+x_2=-p;\quad x_1\cdot x_2=q$$

Vieto teorema (šaknų savybė)
redukuotosios kubinės lygties $x^3 + px^2 + qx + r = 0$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q$$
$$x_1x_2x_3 = -r$$

Kvadratinės lygies šaknų formulė
$ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

redukuotosios kvadratinės lygties
$x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

kvadratinės lygties su lyginiu antruoju koeficientu
$ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Kardano (Cardano) formulė – nepilnosios kubinės lygties $y^3 + py + q = 0$ šaknų formulė

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Parabolės $ax^2 + bx + c$ viršūnės koordinatės

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Logaritmo apibrėžimas
Skaičiaus b *logaritmu* duotuoju pagrindu a vadinamas laipsnio rodiklis, kuriuo reikia pakelti a, kad gautume b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Logaritmo savybės

$$b^{\log_b a} = a \qquad \log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1 \qquad \log_a a^m = m$$

Veiksmai su logaritmais
sandaugos logaritmas:

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

dalmens logaritmas:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

Veiksmai su logaritmais
laipsnio logaritmas:

$$\log_c a^k = k \log_c a$$

šaknies logaritmas:

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$$

pagrindo keitimas:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Papildomos formulės

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c \qquad a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

Faktorialas $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Pagrindinė faktorialo savybė $n! = n \cdot (n-1)!$

Stirlingo (Stirling) formulė (didelių skaičių faktorialai)

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots\right)$$

$$\ln (n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}$$

Junginiai
Gretiniai iš n elementų po m yra tokie junginiai, kurie skiriasi pačiais elementais arba jų išdėstymo tvarka:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Kėliniai – tai junginiai, kurie skiriasi tik elementų tvarka:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$P_n = A_n^n$$

Deriniai iš n po m elementų – junginiai, kurie skiriasi tik pačiais elementais:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}$$

Junginiai

Derinių savybės:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ $\qquad$ $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

Nelygybės

$|a+b| \leqslant |a| + |b|$ $\quad$ $|a-b| \geqslant ||a| - |b||$ $\quad$ $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \quad (ab > 0)$ $\qquad$ $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$

Kompleksiniai skaičiai

$$z = x + iy \qquad (i^2 = -1)$$

Re $z = x$ – *realioji* kompleksinio skaičiaus dalis,
Im $z = y$ – *menamoji* kompleksinio skaičiaus dalis.

Kompleksiškai jungtiniai skaičiai

$$z = a + ib \quad \text{ir} \quad \bar{z} = a - ib$$

Veiksmai su kompleksiniais skaičiais

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0)$

Kompleksinių skaičių užrašymas trigonometrine forma

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Kompleksinio skaičiaus modulis

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Kompleksinio skaičiaus argumentas

Arg z = arg $z + 2\pi k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

čia arg $z = \varphi$ – pagrindinė argumento reikšmė.

Kompleksinio skaičiaus rodiklinė forma

$z = re^{i\varphi}$

Oilerio (Euleri) lygtis

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Kompleksinių skaičių daugyba ir dalyba

$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$
$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} =$

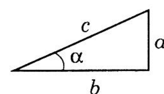
$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (z_2 \neq 0)$

TRIGONOMETRIJA

Trigonometrinės funkcijos stačiajame trikampyje

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{b}{a}$



Trigonometrinės tapatybės

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\qquad$ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Trigonometrinių funkcijų sudėties formulės

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\mp$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \cot\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

Kartotinių kampų trigonometrinės funkcijos

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Kartotinių kampų trigonometrinės funkcijos

$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha \sin\alpha - 4\cos\alpha \sin\alpha$

$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$ $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

$\tan 4\alpha = \frac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}$

$\cot 4\alpha = \frac{\cot^4\alpha - 6\cot^2\alpha + 1}{4\cot^3\alpha - 4\cot\alpha}$

Pusės kampo trigonometrinės funkcijos

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Trigonometrinių funkcijų suma

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\cot\alpha \pm \cot\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$

$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$

$\tan\alpha + \cot\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

$\tan\alpha - \cot\beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

$\tan\alpha - \cot\alpha = -2\cot 2\alpha$

Trigonometrinių funkcijų suma

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

Trigonometrinių funkcijų laipsnio mažinimas

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$

$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$

$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$

$\cos 4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$

Trigonometrinių funkcijų daugyba

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$

Trigonometrinių funkcijų redukcijos formulės

$\sin(\pm\alpha + \pi n) = \pm(-1)^n \sin\alpha$

$\cos(\pm\alpha + \pi n) = (-1)^n \cos\alpha$

$\sin\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n \cos\alpha$

$\cos\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \mp(-1)^n \sin\alpha$

$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\cot\alpha$

$\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\tan\alpha$

Ryšys tarp atvirkštinių trigonometrinių funkcijų

$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x =$

$= \arctan\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Ryšys tarp atvirkštinių trigonometrinių funkcijų

$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x =$

$= \text{arccot}\ \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arctan x = -\arctan(-x) = \frac{\pi}{2} - \text{arccot}\ x =$

$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$\text{arccot}\ x = \pi - \text{arccot}(-x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x =$

$= \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

ANALIZĖS PRADMENYS

Funkcijos riba. Savybės

$\lim\limits_{x \to a} c = c$

$\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

$\lim\limits_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Kai kurių sekų ribos

$a > 0$, $b > 1$, $\alpha > 0$, p – natūralusis skaičius

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p + 1}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n - 1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p + 1}$

Kai kurių sekų ribos

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0$ $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

$\lim\limits_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$

Išvestinė

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

antroji išvestinė:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

aukštesnės eilės išvestinės:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Kai kurių funkcijų išvestinės

$(C)' = 0$ (C – konstanta) $\qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(x)' = 1$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$

$(x^2)' = 2x$ $\qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $\qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\qquad (\text{arccot}\ x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad (e^x)' = e^x$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės

$(u = u(x),\ v = v(x))$

$(u + v)' = u' + v'$ $\quad$ $(u - v)' = u' - v'$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\quad$ $(cu)' = cu'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad$ $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$,

Sudėtinės funkcijos išvestinė

$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ $\quad$ $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $\quad$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ $\quad$ $(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ $\quad$ $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $\quad$ $(e^u)' = e^u \cdot u$

Atvirkštinės funkcijos išvestinė

$f(x)$ ir $g(x)$ – atvirkštinės;
jeigu egzistuoja $f'(x_0)$ ir $g'(x_0)$, tai

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Aukštesnės eilės išvestinių savybės

$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$ $\quad$ $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

Pirmykštė $\quad$ $F(x)$ funkcijos $f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

Neapibrėžtinis integralas – tai bendra išraiška $F(x) + c$ visoms duotosios funkcijos $f(x)$ pirmykštėms funkcijoms:

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx$$

Pagrindinė integralo savybė

$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

Kai kurių funkcijų integralai

$\int k\,dx = kx + C$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

Kai kurių funkcijų integralai

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\text{cotan}\,x + C$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

Pagrindinės integravimo taisyklės

$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Niutono ir Leibnico (Newton-Leibnitz) formulė

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Apibrėžtinio integralo savybės

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\quad$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b f(px + q)\,dx = \frac{1}{p}\int_{pa+q}^{pb+q} f(t)\,dt$

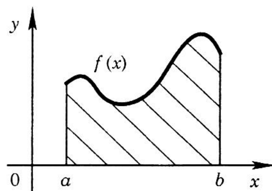
Jeigu $f(x)$ lyginė, tai $\quad$ $\int_{Pa}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Jeigu $f(x)$ nelyginė, tai $\quad$ $\int_{Pa}^{a} f(x)\,dx = 0$

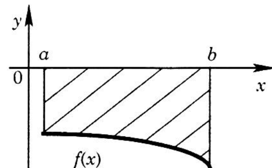
$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a)$, čia M ir m – didžiausia ir mažiausia $f(x)$ reikšmė intervale $[a; b]$

Kreivinės trapecijos plotas

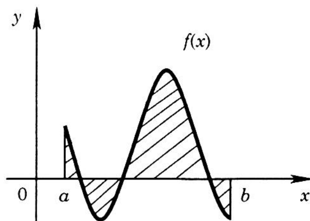
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



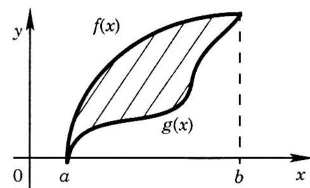
$$S = \mathrm{P}\int_a^b f(x)dx$$



$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

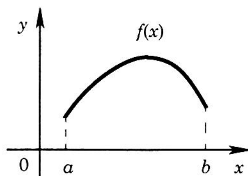


$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



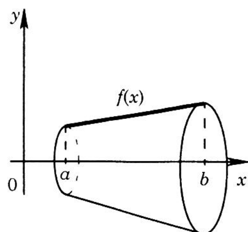
Kreivės ilgis

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



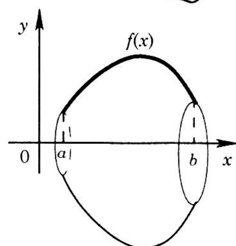
Sukinio paviršiaus plotas

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



Sukinio tūris

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$



Netiesioginiai integralai – integralai su begalinėmis ribomis ir trūkiųjų funkcijų integralai.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{\mathrm{P}\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to \mathrm{P}\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{\mathrm{P}\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to \mathrm{P}\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

Kai kurių netiesioginių integralų reikšmės

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\mathrm{P}\infty}^{+\infty}\sin(x^2)dx = \int_{\mathrm{P}\infty}^{\infty}\cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

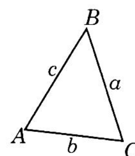
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

GEOMETRIJA

DAUGIAKAMPIAI

Trikampis

Žymėjimas:
A, B, C – viršūnės, o taip pat kampai prie tų viršūnių;
a, b, c – kraštinės, esančios prieš atitinkamus kampus A, B, C;
h_a, h_b, h_c – aukštinės, nuleistos į atitinkamas kraštines a, b, c;
m_a, m_b, m_c – pusiaukraštinės;
l_a, l_b, l_c – pusiaukampinės;
R – apibrėžtinio apskritimo spindulys;
r – įbrėžtinio apskritimo spindulys



Trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

$$S = rp \qquad S = \frac{abc}{4R}$$

Pusiaukraštinė, pusiaukampinė, aukštinė

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \qquad l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

Trikampio aukštinės ir kraštinės

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Kosinusų teorema

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Sinusų teorema

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

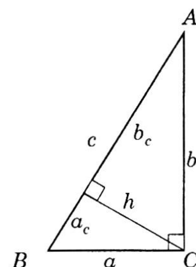
Tangentų teorema

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Statusis trikampis



$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} hc \quad (\angle C = 90^\circ)$$

Pitagoro teorema

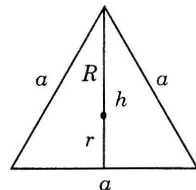
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\angle C = 90^\circ)$$

$$R = \frac{c}{2} = m_c$$

$$a_c : a = a : c \qquad b_c : b = b : c$$

$$b_c : h = h : a_c$$

Lygiakraštis trikampis

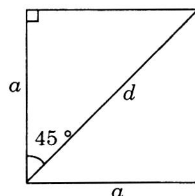


$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad R = 2r$$

Kvadratas



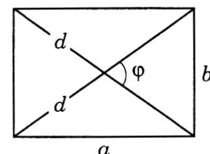
$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$$

$$P = 4a$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$R = \frac{1}{2} d = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad r = \frac{1}{2} a$$

Stačiakampis

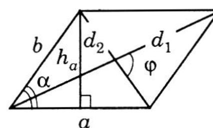


$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

$$R = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$P = 2(a+b)$$

Lygiagretainis



$$S = a h_a = b h_b$$

$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

$$P = 2(a+b)$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Rombas

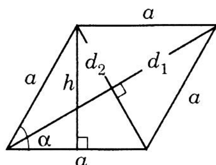
$S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$

$d_1 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$ $\quad d_2 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

$r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} a \sin \alpha$

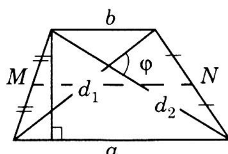
$P = 4a$



Trapecija

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$

vidurinė linija $MN = \frac{1}{2}(a+b)$



Bet kuris iškilasis keturkampis

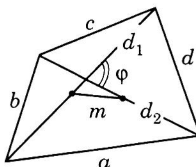
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – keturkampio vidiniai kampai)

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$

(m – atkarpa, jungianti įstrižainių vidurius)

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$



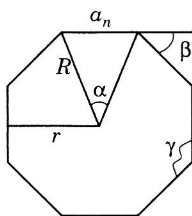
Taisyklingasis daugiakampis (n kraštinių)

centrinis kampas $\alpha = 360^\circ : n$
išorinis kampas $\beta = 360^\circ : n$
vidinis kampas $\gamma = 180^\circ - \beta$

$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} =$

$= 2r \tan \frac{\alpha}{2}$

$R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ $\quad r = \frac{a_n}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$



$S = \frac{1}{2} n a_n r = n r^2 \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} n R^2 \sin \alpha = \frac{1}{4} n a_n^2 \cot \frac{\alpha}{2}$

APSKRITIMAS IR SKRITULYS

Apskritimo ilgis

$C = 2\pi r$

lanko, atitinkančio centrinį kampą n°, *ilgis*:

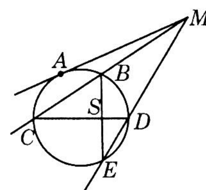
$L = \frac{\pi r}{180^\circ} \cdot n^\circ$

Stygų, kirstinių ir liestinės savybės

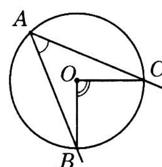
$BS \cdot ES = CS \cdot DS$

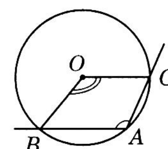
$MB \cdot MC = MD \cdot ME$

$MA^2 = MB \cdot MC = MD \cdot ME$



Kampai apskritime





$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ $\qquad \angle BAC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC$

Skritulio plotas

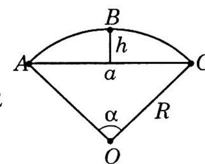
$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{Cd}{4}$$

Nuopjova ir išpjova

$a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ $\qquad h = \frac{a}{2} \tan \frac{\alpha}{4}$

išpjovos plotas: $\quad S_{OABC} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$

nuopjovos plotas:
$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC}$



BRIAUNAINIAI

Žymėjimas:

V – tūris;
S_v – viso paviršiaus plotas;
$S_{šon}$ – šoninio paviršiaus plotas;
S_0 – pagrindo plotas;
P_0 – pagrindo perimetras;
$P_\perp$ – statmenojo pjūvio perimetras;
l – briaunos ilgis; H(arba h) – aukštinė

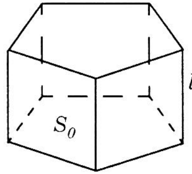
Prizmė

$S_{šon} = P_{\perp}l.$ $S_v = 2S_0 + S_{šon}$

$V = S_0 \cdot h$

Stačioji prizmė:

$S_{šon} = P_0 l.$ $(l = H)$

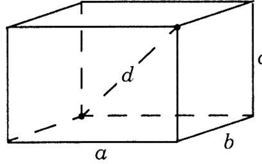


Gretasienis

$S_v = 2\,(ab + bc + ac)$

$V = abc$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

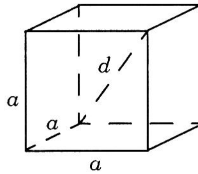


Kubas

$S_v = 6a^2$

$V = a^3$

$d^2 = 3a^2$



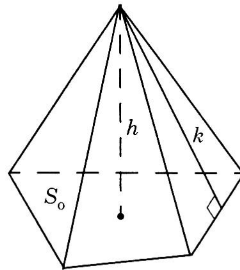
Piramidė

$V = \frac{1}{3} S_0 \cdot H$

taisyklingoji piramidė:

$S_{šon} = \frac{1}{2} P_0 \cdot k$

(P_0 – pagrindo perimetras,
k – apotema)



taisyklingasis tetraedras:

$S_v = a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{3}{4} H$ (R – apibrėžtosios sferos spindulys)

$r = \frac{1}{4} H$ (r – įbrėžtosios sferos spindulys)

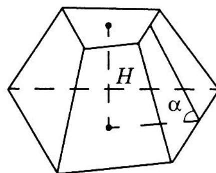
nupjautinė piramidė:

$V = \frac{1}{3} H\,(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

(S_1 ir S_2 – pagrindų plotai)

$S_{šon} = (S_1 - S_2) : \cos\alpha$

(α – dvisienis kampas, esantis prie apatinio pagrindo briaunos)



Oilerio formulė

$$N - L + F = 2$$

(N – viršūnių skaičius, L – briaunų skaičius, F – iškilojo briaunainio sienų skaičius)

TAISYKLINGIEJI BRIAUNAINIAI

Žymėjimas:
a – briauna,
V – tūris,
S – šoninio paviršiaus plotas,
R – apibrėžtosios sferos spindulys,
r – įbrėžtosios sferos spindulys,
H – aukštinė

Kubas

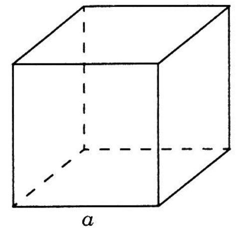
$V = a^3$

$S = 6a^2$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{a}{2}$

$H = a$



Tetraedras

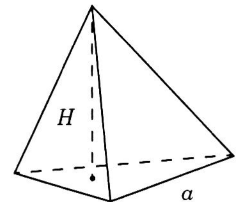
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$S = a^2\sqrt{3}$

$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

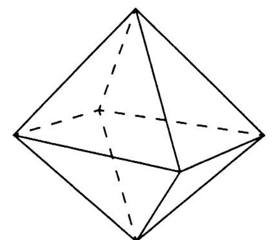


Oktaedras

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$S = 2a^2\sqrt{3}$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$



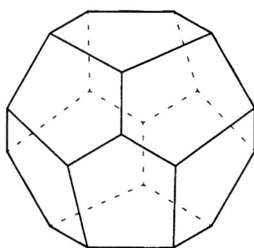
Dodekaedras

$V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}$

$S = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$

$R = \frac{a\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20}$



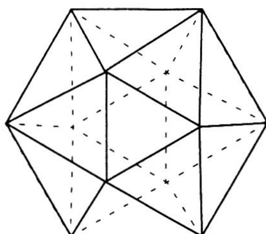
Ikosaedras

$V = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}$

$S = 5a^2\sqrt{3}$

$R = \frac{a\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$



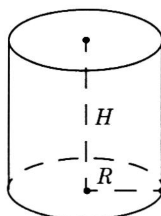
SUKINIAI

Ritinys

$S_{šon} = 2\pi RH$

$S_v = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

$V = \pi R^2 H$

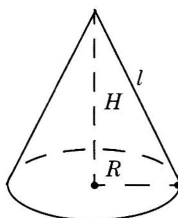


Kūgis

$S_{šon} = \pi Rl$

$S_v = \pi R(R + l)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$



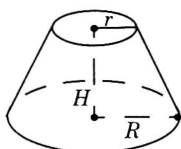
nupjautinis kūgis:

$S_{šon} = \pi l(R + r)$

$S_v = S_{šon} + \pi(R^2 + r^2)$

$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$

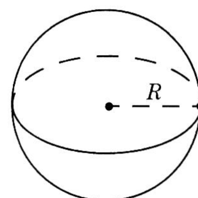
(R ir r – pagrindų spinduliai)



Rutulys

$S_{sf} = 4\pi R^2 = \pi d^2$

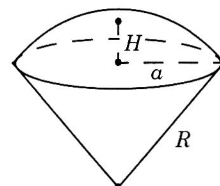
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}$



Rutulio išpjova

$S = \pi R(2H + a)$

$V = \frac{2\pi R^2 H}{3}$



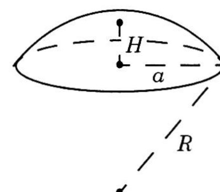
Rutulio nuopjova

$a^2 = H(2R - H)$

$S_{šon} = 2\pi RH = \pi(a^2 + H^2)$

$S_v = \pi(2RH + a^2) = \pi(H^2 + 2a^2)$

$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$



DEKARTO KOORDINATĖS PLOKŠTUMOJE

Atstumas tarp dviejų taškų $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Atkarpos dalijimas duotu santykiu

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$,

($A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ – atkarpos galai,

taškas $C(x, y)$ dalija AB santykiu $\frac{AC}{CB} = \lambda$)

Atkarpos vidurio koordinatės

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

($A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ – atkarpos galai)

Tiesės lygtis plokštumoje

bendroji lygtis: $ax + by + c = 0$;
jeigu $a = 0$, tiesė lygiagreti su $0x$;
jeigu $b = 0$, tiesė lygiagreti su $0y$;
jeigu $c = 0$, tiesė eina per koordinačių pradžią;

Kryptinė tiesės, esančios plokštumoje, lygtis:
$y = kx + b$
(k – kampo tarp tiesės ir ašies $0x$ tangentas);
tiesės, einančios per duotąjį tašką $A(x_0, y_0)$, lygtis:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

(k – krypties koeficientas);

ašinė tiesės lygtis: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
(a, b – atkarpos, kurias tiesė atkerta ašyse);
tiesės, einančios per du duotus taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$, lygtis:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Atstumas nuo taško (x_0, y_0) iki tiesės $ax + by + c = 0$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Tiesių $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ tarpusavio padėtis:
lygiagretumo sąlyga:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

statmenumo sąlyga:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

susikirtimo taško koordinatės:

$$x_0 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

kampas α tarp tiesių:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Tiesių $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ tarpusavio padėtis
lygiagretumo sąlyga:

$$k_1 = k_2$$

statmenumo sąlyga:

$$k_1k_2 = -1$$

Tiesių $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ tarpusavio padėtis
susikirtimo taško koordinatės:

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}; \qquad y_0 = \frac{k_1b_2 - b_1k_2}{k_1 - k_2}$$

kampas α tarp tiesių:

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$$

Kreivių plokštumoje lygtis

parabolė: $y = ax^2 + bx + c$
$y^2 = 2px$

hiperbolė: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

apskritimas, kurio centras yra koordinačių pradžia:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

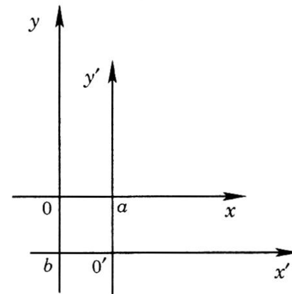
apskritimas, kurio centras yra taškas $(a; b)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

elipsė: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b – elipsės pusašės)

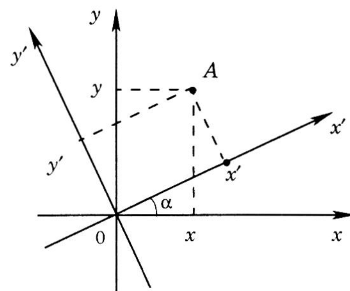
Dekarto koordinačių transformacijos formulės

lygiagretusis postūmis:
$x = x' + a \qquad y = y' + b$
arba
$x' = x - a \qquad y' = y - b$



sukant kampu α aplink koordinačių pradžią:

$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$
$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$
arba
$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$
$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$

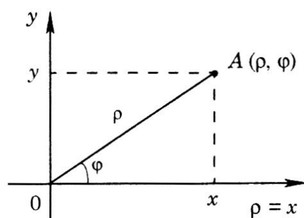


Polinės koordinatės

$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan \varphi = \frac{y}{x}$



DEKARTO KOORDINATĖS ERDVĖJE

Plokštumos lygtis
bendroji lygtis:

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ kai:}$$

$a = 0$, plokštuma lygiagreti su tiese $0x$;
$b = 0$, plokštuma lygiagreti su tiese $0y$;
$c = 0$, plokštuma lygiagreti su tiese $0z$;
$d = 0$, plokštuma eina per koordinačių pradžią;
$a = b = 0$, plokštuma, lygiagreti su plokštuma $x0y$;
$a = c = 0$, plokštuma, lygiagreti su plokštuma $x0z$;
$b = c = 0$, plokštuma, lygiagreti su plokštuma $y0z$;
ašinė tiesės lygtis (a, b, c – atkarpos, kurias ašyse atkerta plokštuma):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

einančios per tašką $A(x_0, y_0, z_0)$ statmenai vektoriui $\bar{n}(a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Kampas tarp plokštumų
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Dviejų plokštumų lygiagretumo sąlyga

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dviejų plokštumų statmenumo sąlyga

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

Atstumas nuo taško M_0 (x_0, y_0, z_0) iki plokštumos $ax + by + cz + d = 0$

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Tiesės erdvėje lygtis
tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$ lygiagrečiai su vektoriumi $\bar{s}(l; m; n)$, kanoninė lygtis:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

tiesės, einančios per du taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $M_2(x_2, y_2, z_2)$ lygtis:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

tiesės – plokštumų susikirtimo linijos, lygtis:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Kampas tarp tiesių

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

ir $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$:

$$\cos \varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Dviejų tiesių lygiagretumo sąlyga

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Dviejų tiesių statmenumo sąlyga

$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

Kampas tarp tiesės $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ **ir plokštumos** $ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlyga

$al + bm + cn = 0$

Tiesės ir plokštumos statmenumo sąlyga

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

Tiesės priklausymo plokštumai sąlyga

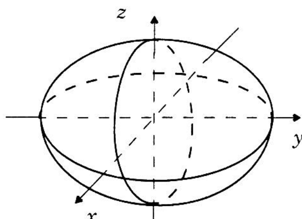
$al + bm + cn = 0,$

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

ANTROS EILĖS PAVIRŠIŲ LYGTYS

Elipsoidė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

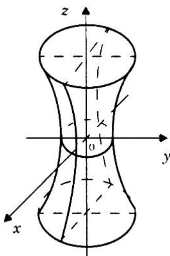


Sfera

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

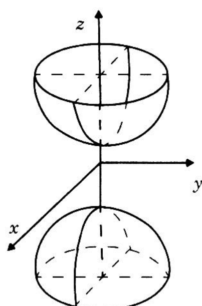
Vienašakis hiperboloidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



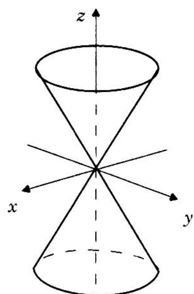
Dvišakis hiperboloidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



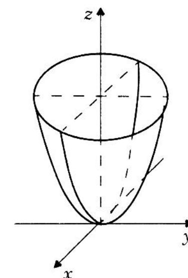
Kūgis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



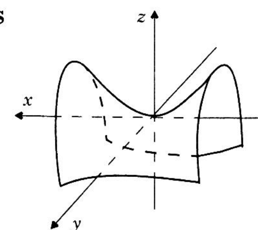
Elipsinis paraboloidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



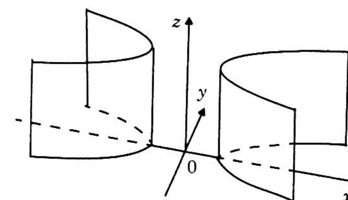
Hiperbolinis paraboloidas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



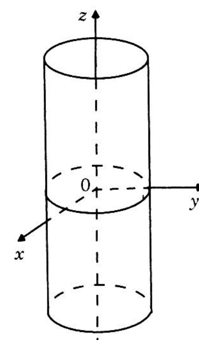
Hiperbolinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



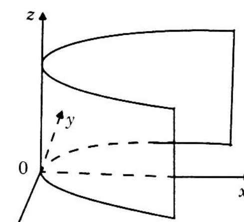
Elipsinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Parabolinis cilindras

$y^2 = 2px$



VEKTORIAI

Koordinatės vektoriaus, kurio pradžios taškas $A(x_1, y_1, z_1)$ ir pabaigos taškas $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overline{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Vektorių $\bar{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ ir $\bar{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ **suma:**

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}\,(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Vektorių sudėties savybės:

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ $\quad$ $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ $\quad$ $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus

$\lambda \cdot \bar{a}\,(x, y, z) = \bar{c}\,(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Daugybos savybės:

$(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$ $\quad$ $(\lambda + \mu) \cdot \bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$

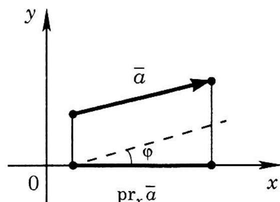
$\lambda\,(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ $\quad$ $\bar{0} \cdot \bar{a} = \lambda\bar{0} = \bar{0}$

Vektoriaus projekcijos ašyje savybės

$\text{pr}_x\,\bar{a} = |\,\bar{a}\,| \cdot \cos\varphi$

$\text{pr}_x\,(\bar{a} + \bar{b}) = \text{pr}_x\,\bar{a} + \text{pr}\,\bar{b}$

$\text{pr}_x\,(\lambda\bar{a}) = \lambda\text{pr}_x\,\bar{a}$



Vektorių $\bar{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ ir $\bar{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ **skaliarinė sandauga:**

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\,\bar{a}\,| \cdot |\,\bar{b}\,| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

Skaliarinės sandaugos savybės

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

$\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0 \quad \bar{a} \cdot \bar{a} = |\,\bar{a}\,|^2$

$\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

$(\lambda\bar{a})\,\bar{b} = \lambda\,(\bar{a}\,\bar{b})$

Vektoriaus $\bar{a}\,(x, y, z)$ **ilgis:**

$$|\,\bar{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Kampas tarp vektorių $\bar{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ ir $\bar{b}\,(x_2, y_2, z_2)$:

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Vektorių kolinearumo sąlyga

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2 \text{ arba } \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases}$$

Vektorių ortogonalumo sąlyga

$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ arba $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Vektorinė vektorių sandauga

$\bar{c} = [\bar{a}\,\bar{b}]$

$|\,\bar{c}\,| = |\,\bar{a}\,| \cdot |\,\bar{b}\,| \sin\varphi$

Vektorinės sandaugos savybės

$[\bar{a}\,\bar{b}] = -[\bar{b}\,\bar{a}]$

$[(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c}] = [\bar{a}\,\bar{c}] + [\bar{b}\,\bar{c}]$

$[(\lambda\bar{a})\,\bar{b}] = \lambda\,[\bar{a}\,\bar{b}]$

$[\bar{a}\,\bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$

Mišrioji vektorių sandauga
(vektorinė ir skaliarinė sandauga)

$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = [\bar{a}\,\bar{b}]\,\bar{c}$

DETERMINANTAI

Antros eilės determinantas

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Trečios eilės determinantas

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 -$$

$$- b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

Pagrindinės determinantų savybės

eilučių keitimas stulpeliais:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

dviejų eilučių perstatymas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

bendrojo eilutės dauginamojo iškėlimas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

nulinė eilutė (stulpelis):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

proporcingosios eilutės:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

stulpelio (eilutės) elementų suma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + b'_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + b'_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + b'_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b'_1 & c_1 \\ a_2 & b'_2 & c_2 \\ a_3 & b'_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pagrindinės determinantų savybės

eilučių sumavimas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \lambda a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \lambda a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \lambda a_3 \end{vmatrix}$$

eilutės (stulpelio) elementų ir jų adjunkto sandaugų suma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

suma sandaugų vienos determinanto eilutės (stulpelio) elementų iš atitinkamų kitos eilutės (stulpelio) elementų adjunktų:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dviejų tiesinių lygčių sistemų su dviem nežinomaisiais sprendimas

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

LENTELĖS

Natūraliųjų skaičių nuo 11 iki 99 kvadratai

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 10 kubai

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3	1	8	27	64	125	256	343	512	729	1000

Pirminiai skaičiai nuo 2 iki 997

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Skaičių 2, 3 ir 5 laipsniai

n	2^n	3^n	5^n	n	2^n	3^n	5^n
0	1	1	1	6	64	729	15 625
1	2	3	5	7	128	2187	78 125
2	4	9	25	8	256	6561	390 625
3	8	27	125	9	512	19 683	1 953 125
4	16	81	625	10	1024	59 049	9 765 625
5	32	243	3125	6	64	729	15 625

Skaičių nuo 0 iki 10 faktorialai

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	362880

Funkcijos $y = e^x$ reikšmės

x	–3	–2	–1	1	2	3	4	–0,5	0,5	1/3
e^x	0,05	0,14	0,37	2,72	7,39	20,09	54,60	0,61	1,65	1,40

Skaičių nuo 1 iki 10 dešimtainiai logaritmai

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg n \approx$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Skaičių nuo 1 iki 10 natūriniai logaritmai

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln n \approx$	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30

Kai kurios trigonometrinių funkcijų reikšmės

Argumentas	Funkcija			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\operatorname{cotan}\alpha$
$0°\ (0)$	0	1	0	neapibrėžta
$15°\ \left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°\ \left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30°\ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36°\ \left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45°\ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54°\ \left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60°\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72°\ \left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

Kai kurių trigonometrinių funkcijų reikšmės

Argumentas	Funkcija			
	sin α	cos α	tan α	cotan α
$75^\circ \left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	neapibrėžta	0

Taisyklingieji daugiakampiai

Kraštinių skaičius	Centrinis kampas	Spindulys		Plotas	Ryšys tarp r ir R
		įbrėžtinio apskritimo	apibrėžtinio apskritimo		
n	α	r	R	S	
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = 2r$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$ z	a^2	$R = r\sqrt{2}$
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	6	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8	135°	$\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2(1+\sqrt{2})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
12	150°	$\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$	$a \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$3a^2(2+\sqrt{3})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

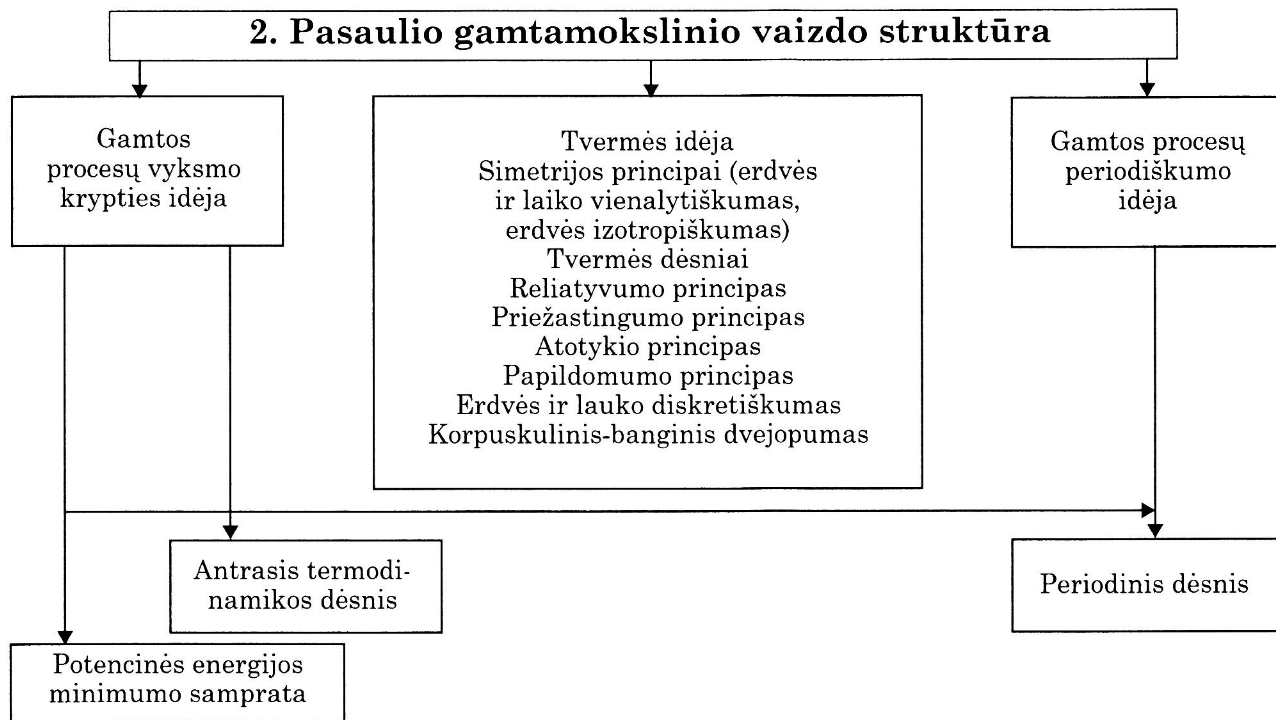
Taisyklingieji briaunainiai

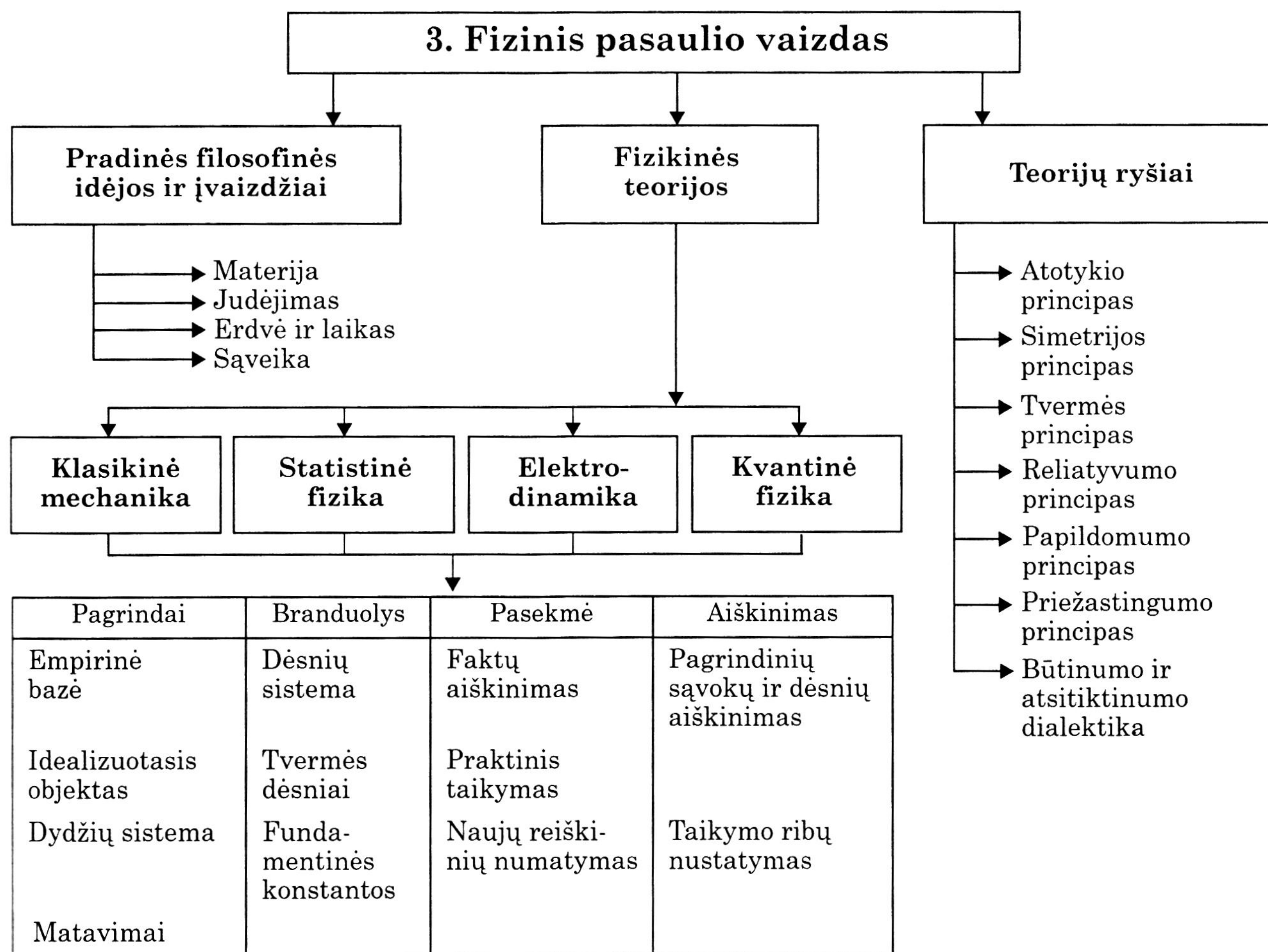
Pavadinimas	Skaičius			S	V
	briaunų	sienų	viršūnių		
Tetraedras	6	4	4	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Oktaedras	12	8	6	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Ikosaedras	30	20	12	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3-\sqrt{5})$
Kubas (heksaedras)	12	6	8	$6a^2$	a^3
Dodekaedras	30	12	20	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

Fizika

1. Materialusis pasaulis

	Erdviniai matmenys	Pagrindiniai struktūriniai elementai	Vyraujanti sąveika
Mikropasaulis	$< 10^{-8}$ m	Molekulės Atomai Elementariosios dalelės	Elektromagnetinė Stiprioji Silpnoji
Makropasaulis	$10^{-8} \div 10^{20}$ m	Žemės kūnai Žemė ir kitos planetos Žvaigždės Gravitaciniai ir elektromagnetiniai laukai	Gravitacinė Elektromagnetinė
Megapasaulis	$> 10^{20}$ m	Galaktikos Gravitaciniai ir elektromagnetiniai laukai	Gravitacinė Elektromagnetinė





4. Pagrindinės fizikos teorijos

Teorija	Erdvės sritis	Būdingieji objektai	Sąveikos tipas	Būdingieji reiškiniai
Mechanika	$10^{25} \div 10^{-8}$ m (sąlygiškai)	Žvaigždės, planetos, Žemės kūnai	Gravitacinė, elektromagnetinė	Makrokūnų (žvaigždžių, planetų, laivų, lėktuvų ir kt.) judėjimas
Elektrodinamika	$10^{25} \div 10^{-17}$ m (sąlygiškai)	Laukas, bangos, krūviai	Elektromagnetinė	Elektrinių laukų buvimas. Bangų sklidimas. Šviesa. Elektros srovės. Magnetiniai laukai
Kvantinė mechanika	$10^{-8} \div 10^{-13}$ m	Atomai, atomų ir molekulių elektronai	Elektromagnetinis laukas	Atominių sistemų energijos diskretiškumas (kvantuotumas). Šviesos spinduliavimas ir sugertis. Atomų sąveika

4. Pagrindinės fizikos teorijos

Teorija	Erdvės sritis	Būdingieji objektai	Sąveikos tipas	Būdingieji reiškiniai
Kvantinė elektrodinamika	$10^{-8} \div 10^{-18}$ m	Elektronai Fotonai	Elektromagnetinė	Fotonų ir elektronų sąveika: kūnų šiluminis spinduliavimas, stabdomasis spinduliavimas, Komptono (Compton) reiškinys ir kt.
Stipriosios ir silpnosios sąveikų teorija	$10^{-13} \div 10^{-18}$ m	Elementariosios dalelės	Stiprioji Silpnoji	Elementariųjų dalelių virsmai kitomis dalelėmis
Statistinė fizika	$10^{25} \div 10^{-17}$ m	Nuo elektronų sistemų iki žvaigždžių sistemų	Bet kuris	Molekulių judėjimas skysčiuose ir dujose, radioaktyvusis skilimas, plazma ir kt.
Termodinamika	$10^{25} \div 10^{-3}$ m (sąlygiškai)	Bet kurios makrosistemos	Elektromagnetinė	Šilumos perdavimas. Darbas

5. Mechanikos struktūra ir turinys



Sąvokos:
mechaninis judėjimas
makroskopinis kūnas
mechaninė būsena
materialusis taškas
atskaitos sistemos (inercinės ir neinercinės)
sąveika
judėjimo rūšys
pagrindiniai mechanikos dydžiai

↓

BRANDUOLYS

Principai:
toliveikos
superpozicijos
reliatyvumo
simetrijos
tvermės

Niutono dėsniai

Jėgų dėsniai:
visuotinės traukos
tamprumo
sausosios ir skysčio trinties

Tvermės dėsniai:
energijos
judėjimo kiekio
judėjimo kiekio momento

↓

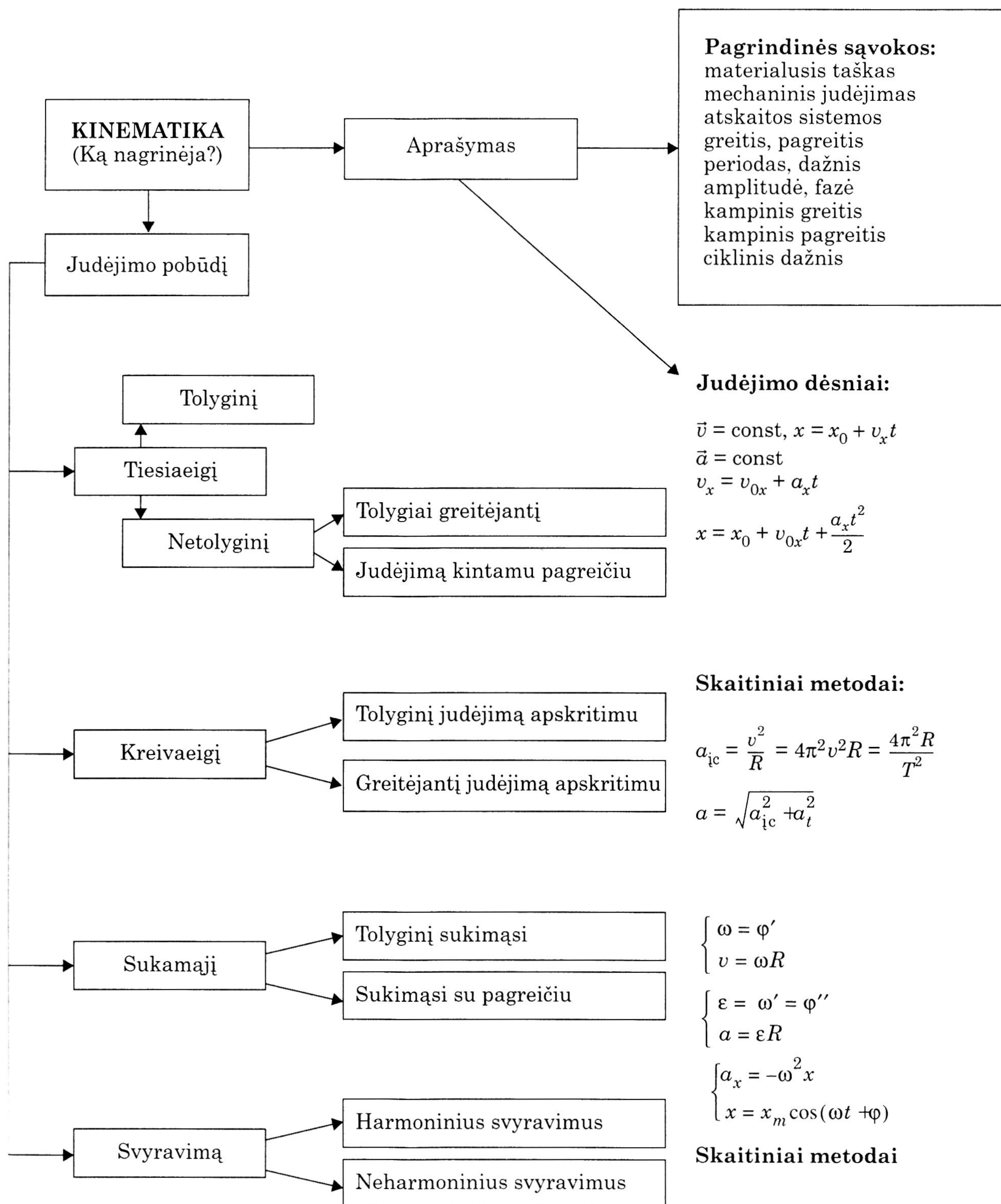
PASEKMĖS

Pagrindinės charakteristikos:
slenkamojo judėjimo
sukamojo judėjimo
svyruojamojo judėjimo

Gamtos reiškinių ir technikos aiškinimas:
kūnų pusiausvyros, nesvarumo, lėktuvo sparno keliamosios jėgos, reaktyvinio judėjimo ir kt.

Svyravimo ir sukamojo judėjimo panaudojimas technikoje

6. Kinematikos struktūra ir turinys



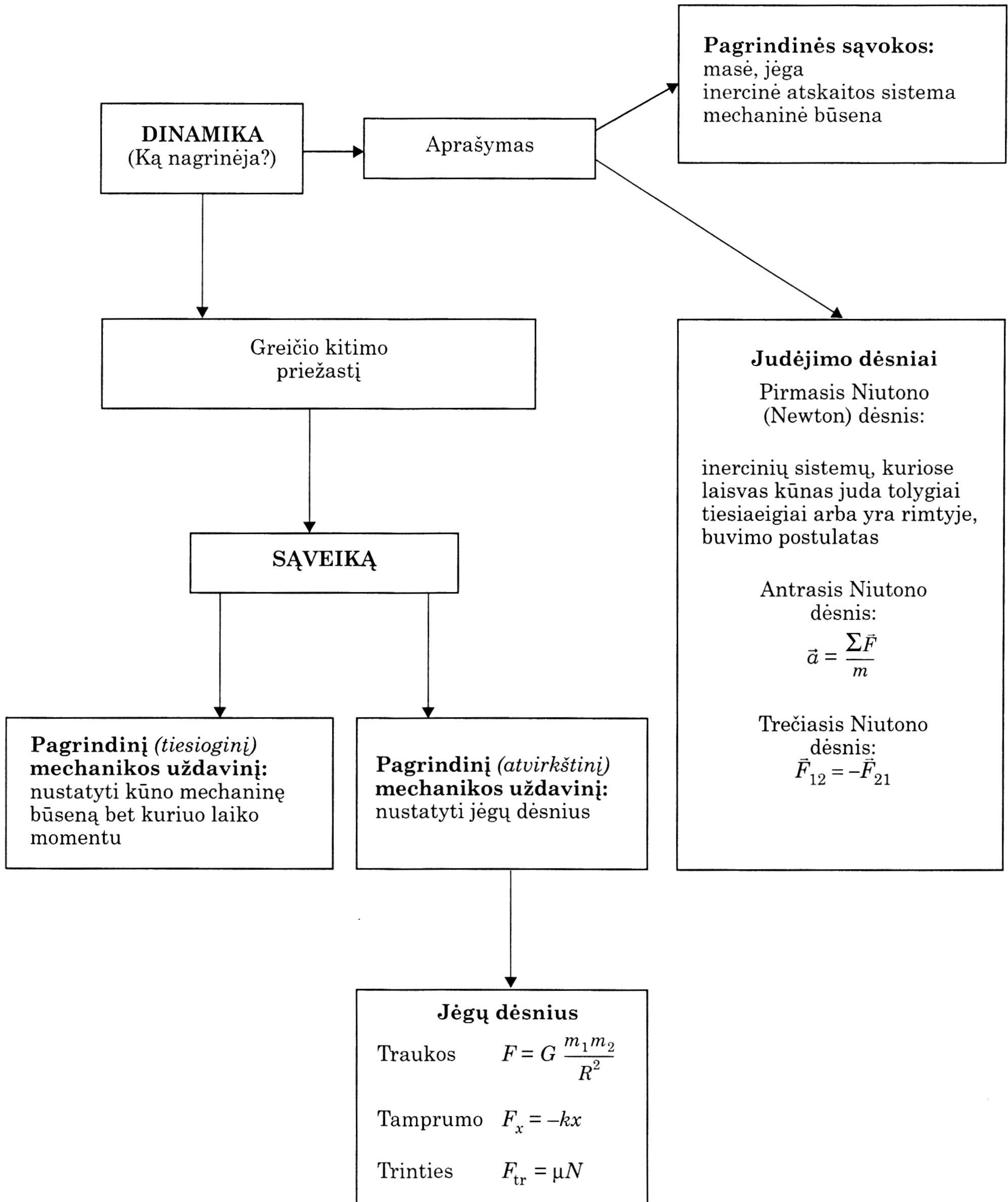
7. Judėjimo grafikai

	Tolyginis judėjimas		Tolygiai greitėjantis judėjimas		
	Formulė	Grafikas	Formulė	Grafikas $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}_0$	Grafikas $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}_0$
Greitis	$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$		$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$		
Pagreitis	$\vec{a} = \vec{0}$		$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$		
Poslinkis	$\vec{s} = \vec{v}t$		$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$		
Koordinatė	$x = x_0 + v_x t$		$x = x_0 + v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}$		

8. Judėjimas su pagreičiu

	Judėjimo pobūdis: Tiesiaeigis tolygiai greitėjantis judėjimas	Judėjimo pobūdis: Tolyginis judėjimas apskritimu
Pagreičio kryptis greičio atžvilgiu	Toje pat tiesėje (ta pačia arba priešinga kryptimi)	Statmena greičiui
Pagreičio pastovumas: a) pagal modulį b) pagal kryptį	a) pastovus b) pastovus	a) pastovus b) kintamas
Greičio formulė	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	$v = \frac{2\pi R}{T}$
Pagreičio formulė	$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$	$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 4v^2 v^2 R$
Koordinatės formulė	$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$x = R\sin\frac{2\pi}{T} t$ $y = R\cos\frac{2\pi}{T} t$

9. Dinamikos struktūra ir turinys



10. Niutono dėsniai

	Pirmasis dėsnis	Antrasis dėsnis	Trečiasis dėsnis
Fizikinė sistema	Makroskopinis kūnas		Dviejų kūnų sistema
Modelis	Materialusis taškas		Dviejų materialiųjų taškų sistema
Aprašomasis reiškinys	Rimtis arba tolyginis tiesiaeigis judėjimas	Judėjimas su pagreičiu	Kūnų sąveika
Dėsnio esmė	Inercinės atskaitos sistemos buvimas (jeigu $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, tai $\vec{v} = \text{const}$)	Sąveika lemia greičio pokytį, t. y. pagreitį $\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$	Veikimo ir atoveikio jėgų moduliai lygūs, jos priešingų krypčių, tos pačios prigimties ir veikia skirtingus kūnus $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
Pasireiškimo pavyzdžiai	Kosminio laivo judėjimas toli nuo traukiančių kūnų	Planetų judėjimas, kūnų kritimas ant Žemės, automobilio stabdymas ir įsibėgėjimas	Kūnų sąveika: Saulės ir Žemės, Žemės ir Mėnulio, automobilio ir Žemės paviršiaus, bilijardo rutulių
Taikymo ribos	Inercinės atskaitos sistemos Makropasaulis ir megapasaulis Judėjimas greičiais, daug mažesniais už šviesos greitį		

11. Sunkio jėgos veikiamų kūnų judėjimas

Pradinės sąlygos		Judėjimo aprašymas	
Pradinė koordinatė	Pradinis greitis	Formulės	Trajektorija
1	2	3	4
$y_0 = h$	Y, y_0, 0, X; $v_0 = 0$, $\vec{g}$	$v = -gt$ $y = h - \frac{gt^2}{2}$	Y, h, 0, X
$y_0 = h$	Y, y_0, 0, X; $\vec{v}_0$, $\vec{g}$	$v = -v_0 - gt$ $y = h - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$	Y, h, 0, X

11. Sunkio jėgos veikiamų kūnų judėjimas

1	2	3	4
$y_0 = 0$	Y, $\vec{v}_0$, $\vec{g}$, 0, X	$v = v_0 - gt$ $y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$	Y, y_{max}, 0, X
$y_0 = 0$	Y, $\vec{v}_0$, $\vec{g}$, α, 0, X	$v_x = v_0 \cos \alpha$ $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ $x = v_0 t \cos \alpha$ $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$	Y, 0, X
$y_0 = h$	Y, y_0, $\vec{v}_0$, $\vec{g}$, 0, X	$v_x = v_0$ $v_y = -gt$ $x = v_0 t$ $y = h - \frac{gt^2}{2}$	Y, h, $\vec{v}_0$, v_y, $\vec{v}$, v_x, 0, X
$y_0 = R_ž + h$ $x_0 = 0$ $v_0 = 8$ km/s	Y, y_0, $\vec{v}_0$, h, $R_з$, 0, X	$v_x = v_0 \cos \alpha$ $v_y = v_0 \sin \alpha$ $x = (R_ž + h) \sin \frac{2\pi}{T} t$ $y = (R_ž + h) \cos \frac{2\pi}{T} t$	$\vec{v}_0$, h, $R_ž$, α, 0, v_y, $\vec{v}_0$, v_x

12. Mechaninės jėgos

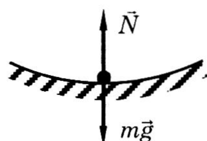
Jėgos pavadinimas	Sąveikos prigimtis	Jėgos formulė	Jėgos priklausomybė nuo atstumo arba santykinio greičio	Jėgos priklausomybė nuo sąveikaujančių kūnų masių	Jėgos kryptis	Jėgos kitimas pereinant nuo vienos inercinės atskaitos sistemos prie kitos	Formulės taikymo sąlygos
Visuotinės traukos jėga	Gravitacinė	$F_t = G\frac{mM}{R^2}$	Atstumo tarp sąveikaujančių kūnų funkcija	Tiesiog proporcinga sąveikaujančių kūnų masėms	Išilgai per kūnus einančios tiesės	Nekinta, nes atstumas R išlieka toks pat	Materialieji taškai arba sferiškai simetriški rutuliai
Tamprumo jėga	Elektromagnetinė	$F_x = -kx$	Atstumo (priklauso nuo deformacijos) funkcija	Nepriklauso	Nukreipta prieš dalelių poslinkį arba deformaciją	Nekinta, nes deformacija x išlieka tokia pat	Pakankamai maža deformacija x
Trinties jėga: a) sausosios b) skysčio	Elektromagnetinė	$F_{tr} = \mu N$ $F_{pasipr} = \alpha v_{sant}$ $F_{pasipr} = \beta v^2_{sant}$	Santykinio judėjimo greičio funkcija	Nepriklauso	Nukreipta priešinga santykiniam greičiui $\vec{v}_{sant}$ kryptimi	Nekinta, nes santykinis greitis $\vec{v}_{sant}$ išlieka toks pat	Formulė $F_{tr} = \mu N$ yra apytikslė, nes sausosios trinties jėga priklauso nuo greičio. Skysčio trinties jėgą iki tam tikro greičio reiškia formulė $F_{pasipr} = \alpha v_{sant}$, o esant didesniems greičiams – formulė $F_{pasipr} = \beta v^2_{sant}$

13. Statika

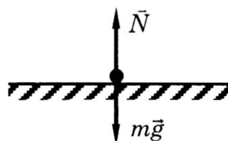
Nagrinėja kietųjų kūnų pusiausvyros sąlygas

PUSIAUSVYROS RŪŠYS

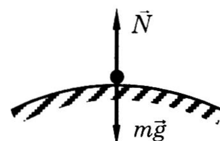
Pastovioji, arba stabilioji



Nepastovioji, arba nestabilioji

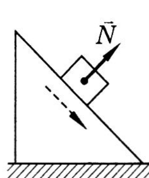


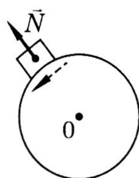
Beskirtė, arba neutralioji

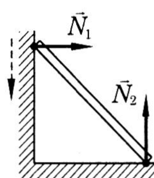


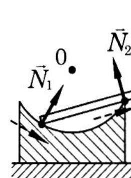
APRAŠYMAS

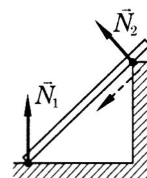
Kūno modelis statikoje – absoliučiai kietas kūnas
Ryšys – kūno judėjimo kliūtis: paviršius, virvelė ir t. t.
Ryšio reakcija – statmenai galimam poslinkiui kūną veikianti ryšio jėga.



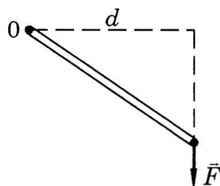




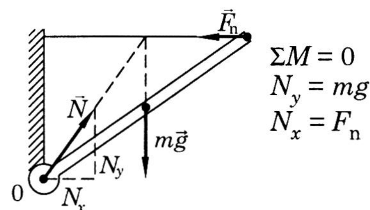




Jėgos momentas: $M = \pm Fd$;
čia d – jėgos petys.



Ypatingas atvejis:



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \vec{0}$ – pirmoji kūno pusiausvyros sąlyga
$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = 0$ – antroji kūno pusiausvyros sąlyga

Potencinės energijos minimumo principas → Pastovi ta kūno padėtis, kurioje kūno potencinė energija yra mažiausia iš visų galimų verčių

14. Jėga, darbas, energija

	Formulė	Grafikas		Formulė	Grafikas
Kūnas metamas vertikaliai aukštyn	**Sunkio jėga** $F_s = mg$	F_s, mg, 0, h	Tamprumo jėgos veikiamas kūnas svyruoja	**Tamprumo jėga** $F_x = -kx$	F_x, x_1, 0, x_2 X
	Sunkio jėgos darbas $A = FS\cos\alpha$ $F = mg;\ S = h$ $\alpha = 0;\ A = mgh$	F_s, mg, 0, h		Tamprumo jėgos darbas $A = \frac{kx_1}{2}x_1 - \frac{kx_2}{2}x_2$	F_x, x_1, 0, x_2 X
	Potencinė energija $E_p = mgh$	E_p, $mg{\cdot}H$, 0, H, h		Potencinė energija $E_p = \frac{kx^2}{2}$	E_p, x_1, 0, x_2 X
	Kinetinė energija $E_k = \frac{mv^2}{2} =$ $= mg(H-h)$	E_k, 0, H, h		Kinetinė energija $E_k = \frac{mv^2}{2} =$ $= \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$	E_k, x_1, 0, x_2 X
	Pilnoji energija $E = mgh + \frac{mv^2}{2} =$ $= mgH$	E, 0, H, h		Pilnoji energija $E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} =$ $= \frac{kx_1^2}{2}$	E, x_1, 0, x_2 X

15. Mechanikos tvermės dėsniai

Tvermės dėsnis	Dėsnio matematinė išraiška	Atskaitos sistemos, kuriose dėsnis galioja	Reikalavimai kūną veikiančioms išorinėms jėgoms	Kokios turi būti kūnų sistemoje veikiančios vidinės jėgos	Tvermės dėsnių negaliojimo atvejai
Judėjimo kiekio tvermės dėsnis	$\Sigma m\vec{v} = \text{const}$ $\begin{cases}\Sigma mv_x = \text{const}\\ \Sigma mv_y = \text{const}\\ \Sigma mv_z = \text{const}\end{cases}$	Inercinės	$\Sigma\vec{F} = 0$	Bet kokios	Nėra
Energijos tvermės dėsnis	$E_k + E_p = \text{const}$ $\begin{cases}\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}\\ \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}\end{cases}$	Inercinės	$\Sigma A = 0$	Konservatyviosios (potencialinės) { traukos jėgos; tamprumo jėgos	Nėra
Judėjimo kiekio momento tvermės dėsnis	$\vec{L} = \text{const}$ $I\omega = \text{const}$ $mvr = \text{const}$	Inercinės	$\Sigma M = 0$	Bet kokios	Nėra

16. Hidrostatika ir aerostatika

Skystųjų ir dujinių kūnų bendrosios savybės	**1.** Formos kitimas veikiant net ir nykstamosioms jėgoms **2.** Iš visų pusių spaudžiami arba tempiami skysčiai ir dujos reiškiasi kaip kietieji kūnai **3.** Kiekvieną plotelį skystyje veikia statmenasis slėgis $p = \frac{dF}{ds}$, vadinamas hidrostatiniu slėgiu **4.** Hidrostatinio slėgio vertė bet kuriame skysčio ir dujų taške nepriklauso nuo plotelio orientacijos	
Paskalio (Pascal) dėsnis (1663)	Skysčio paviršių veikiantis išorinių jėgų slėgis skystyje visomis kryptimis perduodamas vienodai	
Archimedo dėsnis (III a. pr. Kr.)	Kiekvieną skystyje arba dujose esantį kūną veikia keliamoji jėga, lygi kūno išstumto skysčio arba dujų svoriui. Ji nukreipta vertikaliai aukštyn veikia ten buvusio išstumto skysčio sunkio centrą	
	Pakibimo principas $F_A = F_T$	h_1 h_2 h ρ_0 $p_2 = p_1 + \rho_0 gh$ $F = (p_2 - p_1)S = \rho_0 ghS = \rho_0 Vg$
Pusiausvyros sąlyga $F_A = mg$	Pastovioji pusiausvyra $\vec{F}_A$ C 0 $m\vec{g}$	Nepastovioji pusiausvyra $\vec{F}_A$ C 0 $m\vec{g}$
Izoterminės atmosferos barometrinė formulė	h 0 p_0 p $p = p_0 e^{-\rho_0 gh/p_0}$	

17. Hidrodinamika ir aerodinamika

Hidrodinamikos ir aerodinamikos pagrindinės sąvokos	**Srovės linijos** – linijos, kurių liestinė kiekviename taške nurodo srauto greičio kryptį **Nuostovusis srautas** – srautas, kurio srovės linijos sutampa su atskirų dalelių trajektorijomis **Srovės vamzdelis** – srovės linijų sudarytas paviršius. Visuose to paties skerspjūvio taškuose skysčio (dujų) greitis vienodas	
Modelis	Skysčiams (ir netgi dujoms) nuostoviai tekant į juos galima žiūrėti kaip į nespūdžiuosius, t. y. atsižvelgiama į slėgio kitimą kintant suspaudimo laipsniui, bet neatsižvelgiama į tūrio kitimą	
	S_1 $\vec{v}_1$ S_2 $\vec{v}_2$ 1 2	$\Delta m = \text{const}$ $S_1 v_1 = S_2 v_2$
Bernulio (Bernoulli) dėsnis (1738)	$\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ h_1 h_2 p_1 p_2 $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$	$\rho g h + \rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const}$ $p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$
Reaktyvusis judėjimas	$-\mu\vec{u}$ $\vec{u}$ $\vec{v}$	$\vec{F}_r = -\mu\vec{u}$
Kūnų judėjimas skysčiuose ir dujose		
Trinties pasipriešinimas $F_p \sim rv$ Slėgio pasipriešinimas $F_p \sim r^2 v^2$	F_c O v_k v	Kai $v < v_k$, $F_p \sim v$ Kai $v > v_k$, $F_p \sim v^2$
Lėktuvo sparno keliamoji jėga	$\vec{R}_y$ $\vec{R}$ $\vec{R}_x$	R_y – keliamoji jėga R_x – priekinio pasipriešinimo jėga

18. Harmoniniai svyravimai (virpesiai)

Nr.	Formulės	Grafikai
1	$x = x_m \cos \omega t$ $q = q_m \cos \omega t$	
2	$x' = v = -x_m \omega \sin \omega t$ $q' = i = -q_m \omega \sin \omega t$	
3	$x'' = a = -x_m \omega^2 \cos \omega t$ $q'' = -q_m \omega^2 \cos \omega t$	
4	$E_k = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2} \sin^2 \omega t$ $E_{magn} = \frac{L\omega^2 q_m^2}{2} \sin^2 \omega t$	
5	$E_p = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2} \cos^2 \omega t$ $E_{el} = \frac{m\omega^2 q_m^2}{2} \cos^2 \omega t$	
6	$E = E_k + E_p = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}$ $E = E_{el} + E_{magn} = \frac{m\omega^2 q_m^2}{2}$	

19. Svyravimų (virpesių) klasifikavimas

Tipas	Kokios atsiradimo sąlygos	Nuo ko priklauso periodas	Nuo ko priklauso amplitudės
Laisvieji	Sistema, turinti pradinę energijos atsargą	Nuo savųjų parametrų $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $T = 2\pi\sqrt{LC}$	Nuo pradinių sąlygų
Priverstiniai	Bet kuri sistema, veikiama periodiškai kintančios išorinės jėgos	Nuo periodiškai kintančios išorinės jėgos dažnio	Nuo išorinio poveikio amplitudės, dažnių ryšio $\nu_{iš} = \nu_s$, energijos disipacijos
Savaiminiai	Savaiminių virpesių sistema (SAV) esant išoriniam energijos šaltiniui	Nuo sistemos savųjų parametrų	Nuo SAV parametrų (sistemos netiesiškumo)
Parametriniai	Virpesių sistema, kurios parametrai periodiškai kinta	Nuo sistemos savųjų parametrų	Nuo parametrų kitimo dažnio ir savojo dažnio santykio

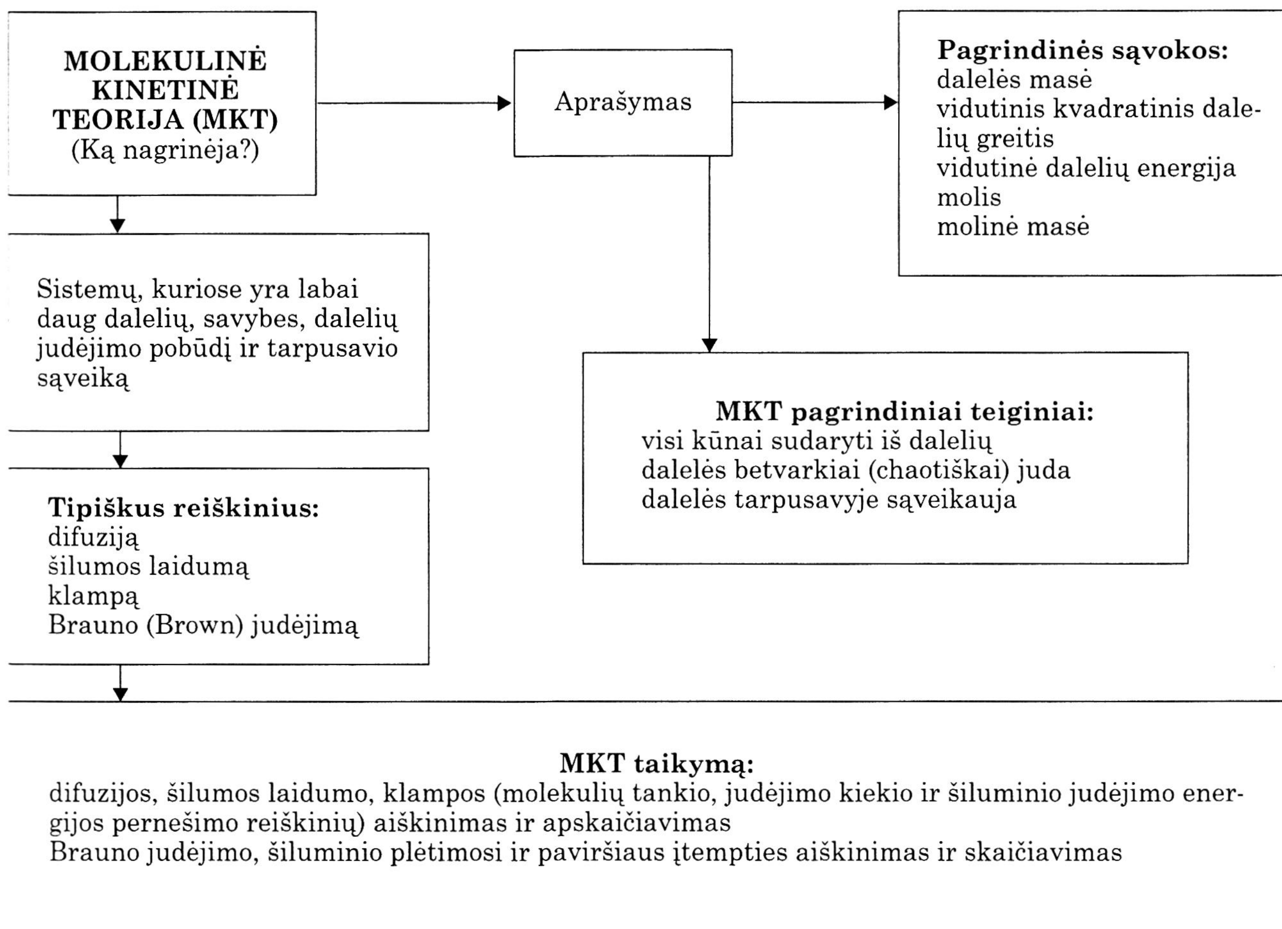
20. Klasikinė ir reliatyvistinė mechanika

Fizikinės idėjos, sąvokos, dėsniai	Klasikinė mechanika	Reliatyvistinė mechanika
Reliatyvumo principas	Visose inercinėse atskaitos sistemose mechaniniai reiškiniai vyksta vienodai (jeigu vienodos pradinės sąlygos)	Visose inercinėse atskaitos sistemose visi reiškiniai vyksta vienodai (jeigu vienodos pradinės sąlygos)
Greičių sudėties dėsnis	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$	$\vec{v} = \dfrac{\vec{v}_0 + \vec{v}'}{1 + \dfrac{v_0 v'}{c^2}}$
Ilgis	Absoliutus $l = l_0$	Reliatyvus $l = l_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$
Laiko tarpas	Absoliutus $\tau = \tau_0$	Reliatyvus $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$
Judėjimo kiekis	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

20. Klasikinė ir reliatyvistinė mechanika

Fizikinės idėjos, sąvokos, dėsniai	Klasikinė mechanika	Reliatyvistinė mechanika
Antrasis Niutono dėsnis	$\vec{F} = \vec{p}'$ $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{F} = \vec{p}'$ $\vec{F} \neq m\vec{a}$
Atskiro kūno energija	$E = U + \frac{mv^2}{2}$, čia U – vidinė energija	$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Kai $v << c$, $E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$
Kinetinė energija	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = E - E_0$ Kai $v << c$, $E_k = \frac{mv^2}{2}$

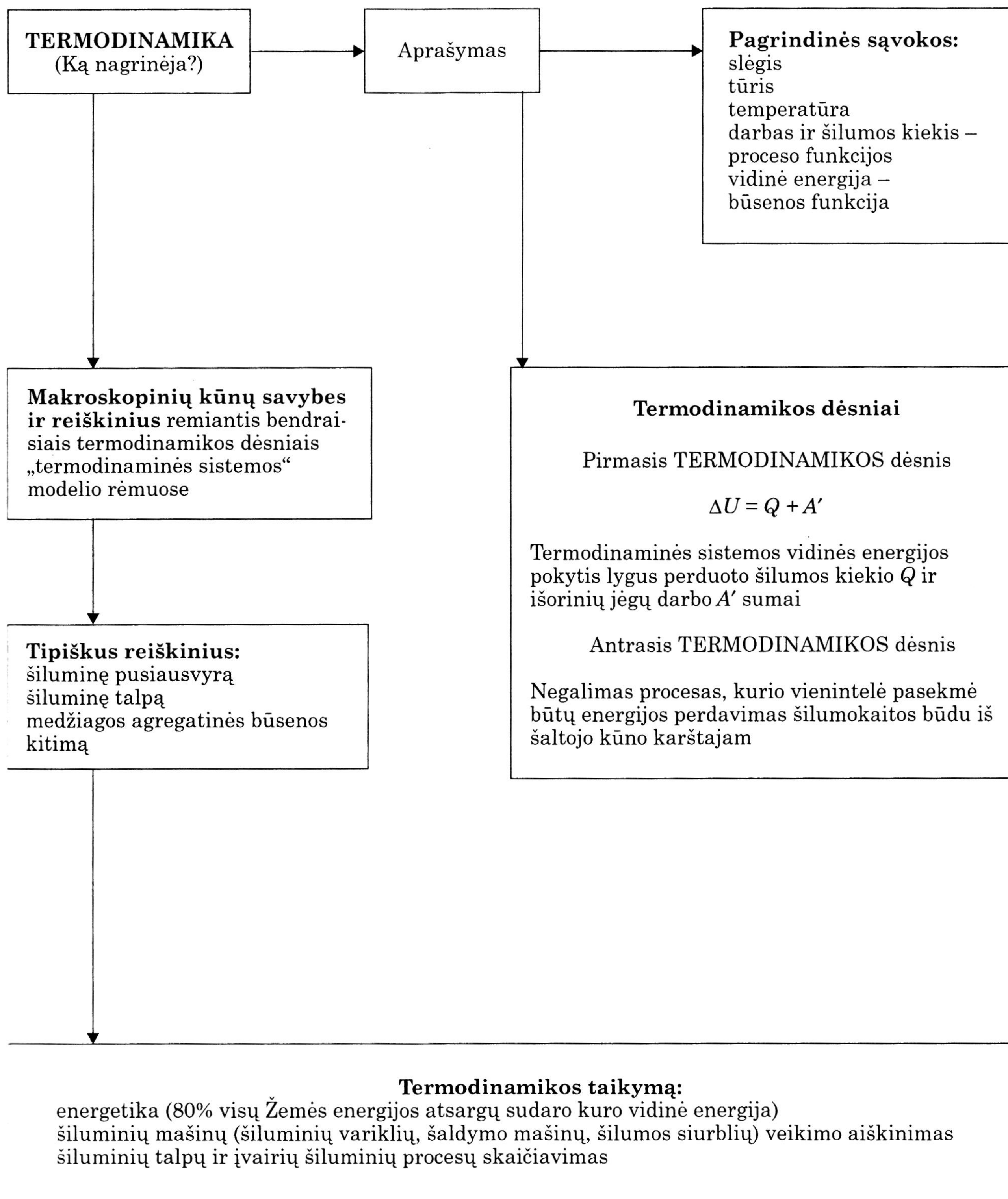
21. Molekulinės kinetinės teorijos struktūra ir turinys



22. Izoprocesai

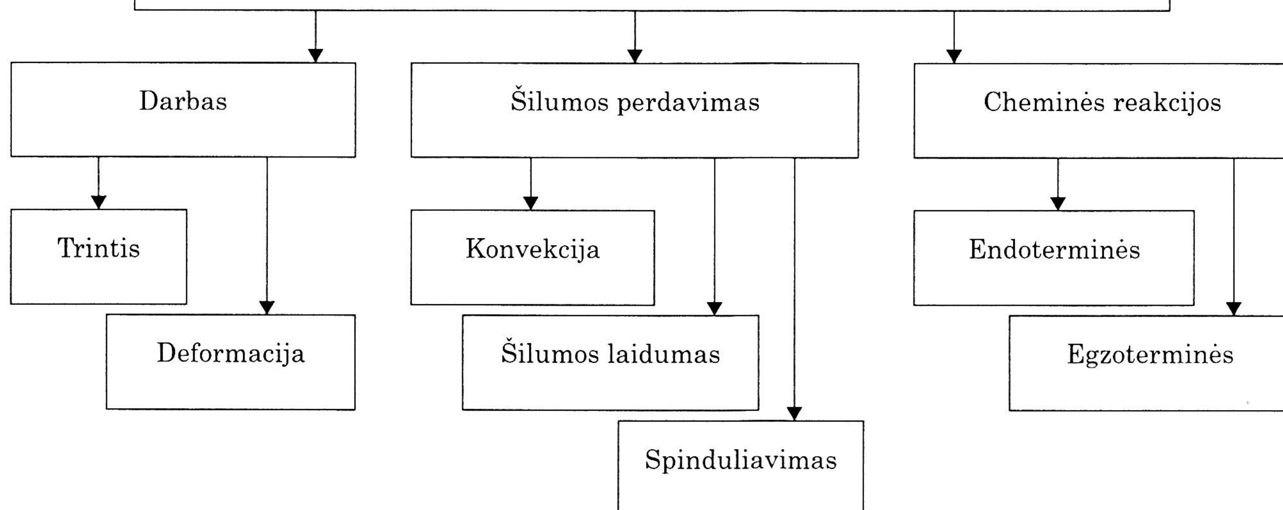
Procesai	Koordinačių sistema		
	$p - V$	$p - T$	$V - T$
Izoterminis $T = \text{const}$	$T_2 > T_1$	$T_2 > T_1$	$T_2 > T_1$
Izobarinis $p = \text{const}$	$p_2 > p_1$	$p_2 > p_1$	$p_2 < p_1$
Izochorinis $V = \text{const}$	$V_2 > V_1$	$V_2 < V_1$	$V_2 > V_1$
1 ciklas			
2 ciklas			

23. Termodinamikos struktūra ir turinys



24. Kūnų vidinė energija

- Molekulių betvarkio slenkamojo judėjimo kinetinė energija
- Molekulių sukimosi kinetinė energija
- Molekulių virpesių kinetinė ir potencinė energija
- Molekulių tarpusavio sąveikos potencinė energija
- Cheminė energija (molekulių vidinės sąveikos energija)
- Atomų ir jonų elektroninių apvalkalų energija
- Branduolių vidinė energija
- Gravitacinės sąveikos energija



26. Pirmojo termodinamikos dėsnio taikymas įvairiems dujų procesams

Proceso pavadinimas	Proceso lygtis (matematinė išraiška)	Tūrio pokytis (ΔV)	Gautas šilumos kiekis (Q)	Atliktas darbas (A)	Vidinės energijos pokytis (ΔU)	Temperatūros pokytis (ΔT)	Molinė šiluma $\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)$	Pirmojo termodinamikos dėsnio išraiška	Priklausomybės grafikai $p(V)$
Adiabatinis	$pV^{\gamma} = \text{const}$	> 0	0	> 0	< 0	< 0	0	$A' = \Delta U$	
		< 0	0	< 0	> 0	> 0			
Izochorinis	$\frac{p}{T} = \text{const}$	0	> 0	0	> 0	> 0	$\frac{3}{2}R$	$Q = \Delta U$	
		0	< 0	0	< 0	< 0			
Izoterminis	$pV = \text{const}$	> 0	> 0	> 0	0	0	∞	$Q = -A'$	
		< 0	< 0	< 0	0	0			
Izobarinis	$\frac{V}{T} = \text{const}$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	$\frac{5}{2}R$	$Q = \Delta U + A'$	
		< 0	< 0	< 0	< 0	< 0			

27. Idealiosios dujos

STATISTINIS METODAS

Dujos – mikrodalelių sistema
Modelis – idealiosios dujos

TERMODINAMINIS METODAS

Dujos – makroskopinė sistema
Modelis – termodinaminė sistema

PAGRINDINIAI DYDŽIAI

Molekulės masė m
Molekulių tankis n
Vidutinis kvadratinis greitis $v_{kv} = \sqrt{\overline{v^2}}$
Vidutinė kinetinė molekulių energija $\overline{E}$
Medžiagos kiekis ν
Molinė masė M
Bolcmano (Boltzmann) konstanta k

Dujų masė m
Slėgis p
Tūris V
Temperatūra T
Tankis ρ
Vidinė energija U
Molinė šiluma C
Universalioji (molinė) dujų konstanta R

PAGRINDINIŲ STATISTINĖS MECHANIKOS IR TERMODINAMIKOS DYDŽIŲ RYŠYS

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2} = \frac{1}{3} \rho\overline{v^2} = \frac{2}{3} n\overline{E} = nkT$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3k\frac{T}{m}} = \sqrt{3R\frac{T}{M}}$$

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M}RT$$

$$U = \frac{3}{2}\nu RT$$

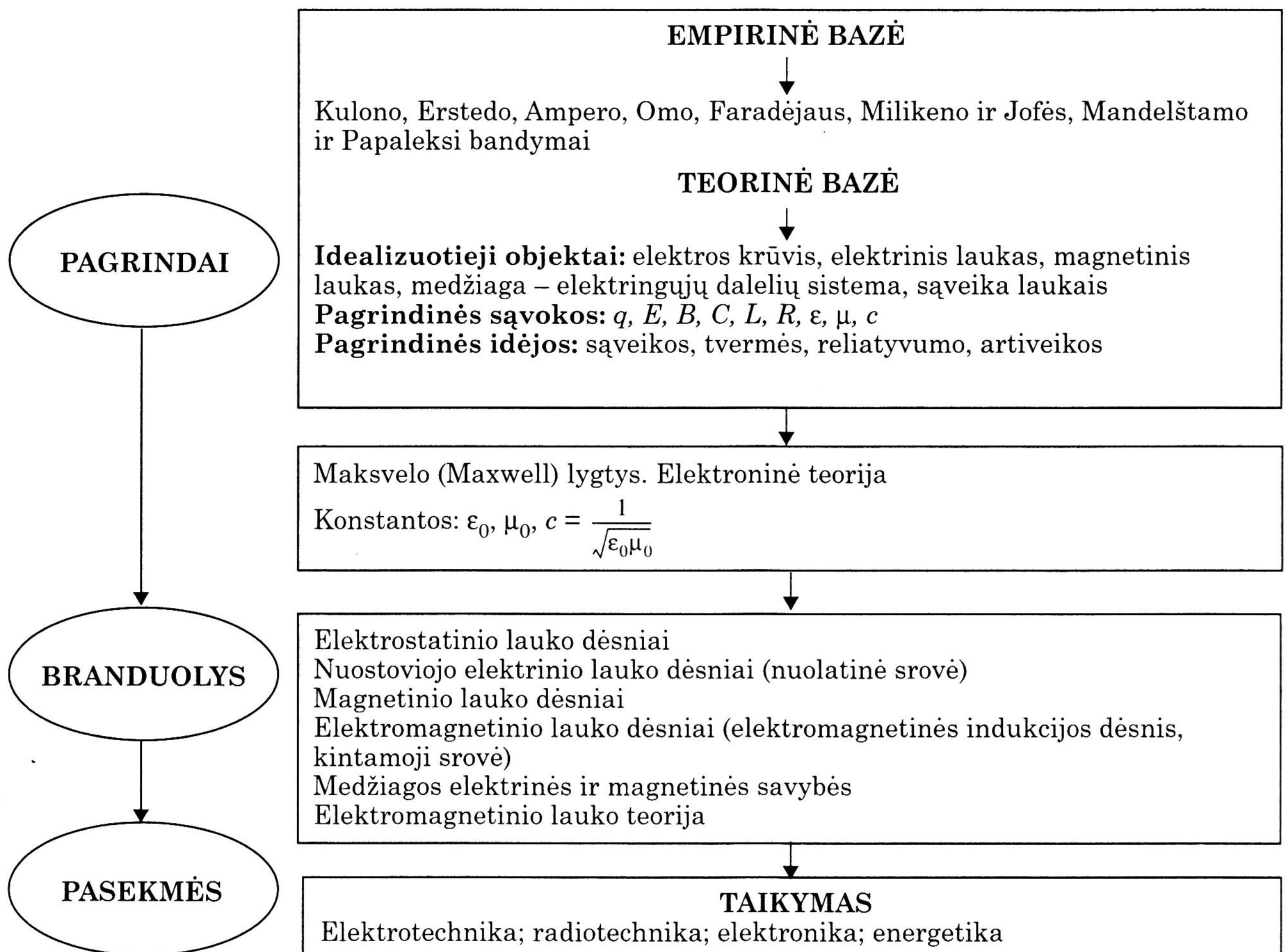
$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(pV)$$

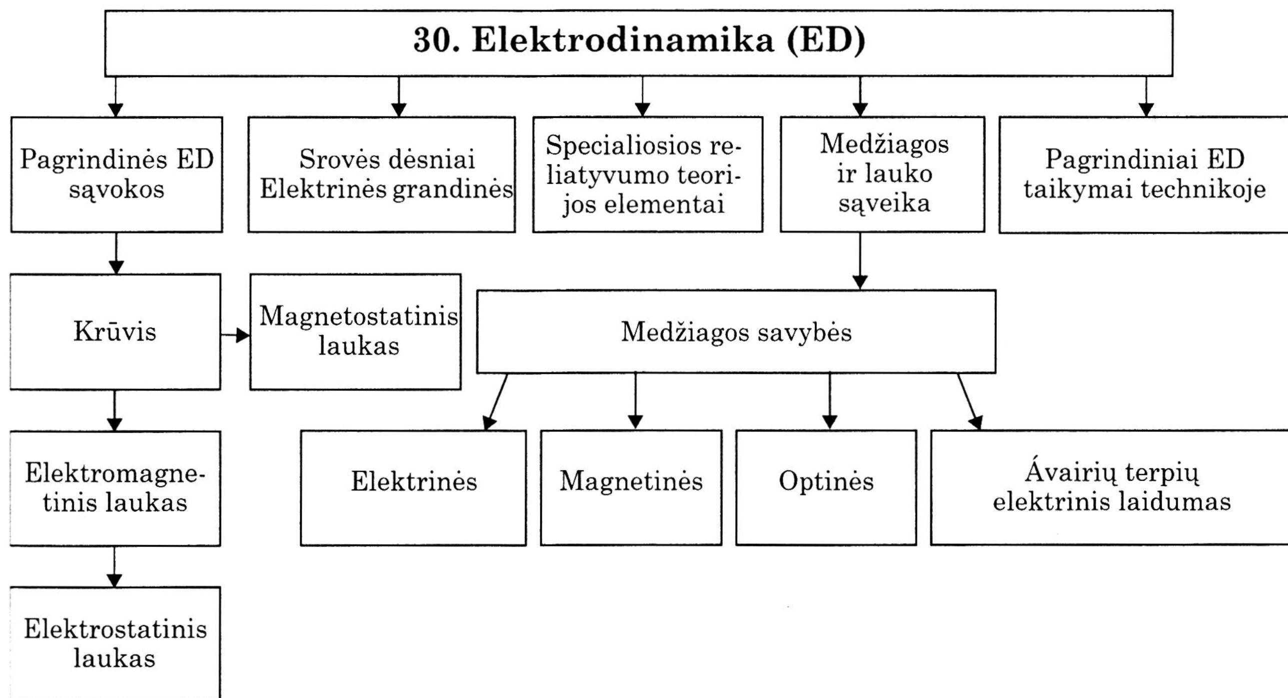
$$C_V = \frac{3}{2}R,\ C_p = \frac{5}{2}R,\ C_p - C_V = R$$

28. Simetrijos taikymas kietiesiems kristaliniams kūnams klasifikuoti

Kristalo tipas	Simetrijos centrai (gardelę sudarančios dalelės)	Sąveikos kristale jėgos	Pagrindinės savybės	Kristalų pavyzdžiai
Molekulinis	Molekulės	Van der Valso (Van der Waals), dipolių sąveika, vandeniliškieji ryšiai	Žema lydymosi temperatūra Nekieti	Naftalenas
Metališkasis	Teigiamieji jonai	Elektroninių dujų ir teigiamųjų jonų elektromagnetinė sąveika	Didelis elektrinis ir šilumos laidumas	Metalai
Kovalentinis	Atomai arba jų grupės	Kovalentiniai ryšiai	Labai aukšta lydymosi temperatūra. Labai kieti	Deimantas, silicis
Joninis	Jonai (teigiamieji ir neigiamieji)	Elektromagnetinės (tarp jonų)	Aukšta lydymosi temperatūra Trapūs	Valgomoji druska

29. Klasikinės elektrodinamikos struktūra ir turinys





31. Gravitacinio ir elektrinio lauko savybių palyginimas

Pagrindinės charakteristikos	Laukai	
	gravitacinis	elektrostatinis
Sąveikos objektai	Visi kūnai ir dalelės	Elektringieji kūnai ir dalelės
Jėgos formulė	$F = G \dfrac{m_1 m_2}{R^2}$	$F = k \dfrac{\lvert q_1\rvert \lvert q_2\rvert}{r^2}$
Stipris	$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m}$	$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$
Potencialų skirtumas	$\varphi_2 - \varphi_1 = g(h_2 - h_1)$	$\varphi_2 - \varphi_1 = E(d_2 - d_1)$
Kūno arba krūvio perkėlimo darbas	$A = mg(h_1 - h_2)$ $A = mgh$	$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ $A = qEd$
Uždaroje trajektorijoje atliktas darbas	$A = 0$	$A = 0$

32. Kintamosios elektros srovės grandinės elementų jungimas

Nr.	Elektrinės grandinės schema	Srovės stiprio priklausomybė nuo dažnio
1	R	I, 0, ω
2	C	I, 0, ω
3	L	I, 0, ω
4	C, R	I, 0, ω
5	R, C	I, 0, ω
6	R, L	I, 0, ω
7	L, R	I, 0, ω
8	R, L, C	I, 0, ω_0, ω; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
9	C, L, R	I, 0, ω_0, ω; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
10	C_1, C_2, L, R	I, 0, ω_1, ω_2, ω; $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$; $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$

33. Nuolatinės elektros srovės grandinės elementų jungimas

Nr.	Elektrinės grandinės schema	Omo dėsnis	Nr.	Elektrinės grandinės schema	Omo dėsnis
1	b, R, a	$I = \frac{U_{ab}}{R}$	5	n, ℰ, r, R	$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}$
2	b, R1, R2, a	$I = \frac{U_{ab}}{R_1 + R_2}$	6	ℰ, r	$I = \frac{\mathcal{E} - U_{ab}}{r}$
3	b, R1, R2, a	$I = \frac{U_{ab}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$	7	ℰ, r; ℰ, r; n; ℰ, r; R	$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}$
4	ℰ, r, R	$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$			

34. Elektromechaninė analogija

Slenkamasis judėjimas	Sukamasis judėjimas	Elektromagnetiniai dydžiai
Poslinkis x	Kampinis poslinkis α	Krūvis q
Greitis x'	Kampinis greitis α'	Srovės stipris q'
Pagreitis x''	Kampinis pagreitis α''	Srovės stiprio kitimo greitis q''
Masė m	Inercijos momentas I	Induktyvumas L
Tempimo standumas k	Sukimo standumas k	Elektrinei talpai atvirkščias dydis $\frac{1}{C}$
Jėga F	Jėgos momentas M	Įtampa U
Skysčio trinties koeficientas r	Skysčio trinties koeficientas r	Varža R
Judesio kiekis $p = mv$	Judesio kiekio momentas $I\omega$	Magnetinės indukcijos srautas Li
Darbas $dA = Fx'dt$	Darbas $dA = M\alpha'dt$	Darbas $dA = Uq'dt$
Galia $P = F\tilde{o}'$	Galia $P = M\alpha'$	Galia $P = Uq'$
Kinetinė energija $E_k = m\frac{x'^2}{2}$	Kinetinė energija $I\frac{\alpha'^2}{2}$	Magnetinio lauko energija $L\frac{q'^2}{2}$
Potencinė energija $E_p = k\frac{x^2}{2}$	Potencinė energija $k\frac{\alpha^2}{2}$	Elektrostatinio lauko energija $\frac{q^2}{2C}$
Laisvųjų virpesių periodas $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Laisvųjų virpesių periodas $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$	Laisvųjų virpesių periodas $T = 2\pi\sqrt{LC}$
Banginė varža $\rho = \sqrt{km}$	Banginė varža $\rho = \sqrt{kI}$	Banginė varža $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

35. Elektrinių ir magnetinių laukų palyginimas

Elektriniai laukai		Magnetiniai laukai	
pavadinimas	formulės	pavadinimas	formulės
Taškinis krūvis	q	Srovės stipris, srovės elementas	I, $I\Delta l$
Krūvių sąveika Kulono (Coulomb) dėsnis	$F = k\frac{\lvert q_1\rvert\lvert q_2\rvert}{r^2}$ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	Srovių sąveika Ampero (Amper) dėsnis	$F = k'\frac{I_1 I_2 \Delta l}{r}$ $k' = \frac{\mu}{2\pi}$
Elektrinė konstanta	ε_0	Magnetinė konstanta	μ_0
Elektrinio lauko jėgos charakteristika – lauko stipris	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	Magnetinio lauko jėgos charakteristika – lauko indukcija	$B = \frac{F}{I\Delta l}$
Elektrinių laukų superpozicija	$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$	Magnetinių laukų superpozicija	$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_n$
Lauko stiprio linijos		Lauko indukcijos linijos	
Taškinio krūvio, įelektrintos plokštumos, plokščiojo kondensatoriaus laukas	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ $E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$	Tiesiosios, žiedinės srovės, solenoido laukas	$B = \mu_0\frac{I}{2\pi R}$ $B = \mu_0\frac{I}{2R}$ $B = \mu_0 nI$
Vienalytis elektrinis laukas	$\vec{E} = \text{const}$	Vienalytis magnetinis laukas	$\vec{B} = \text{const}$
Taškinį krūvį veikianti jėga	$\vec{F} = \vec{E}q$	Srovės elementą veikianti jėga Judantį krūvį veikianti jėga	$F = BI\Delta l \sin\alpha$ $F = \lvert q \rvert vB \sin\alpha$
Kondensatoriaus elektrinė talpa	$C = \frac{q}{U}$	Ritės induktyvumas	$L = \frac{\Phi}{I}$
Ákrauto kondensatoriaus energija	$W = \frac{CU^2}{2}$	Ritės, kuria teka srovė, energija	$W = \frac{LI^2}{2}$
Dielektrinė skvarba	$\varepsilon = \frac{E_0}{E}$	Magnetinė skvarba	$\mu = \frac{B}{B_0}$

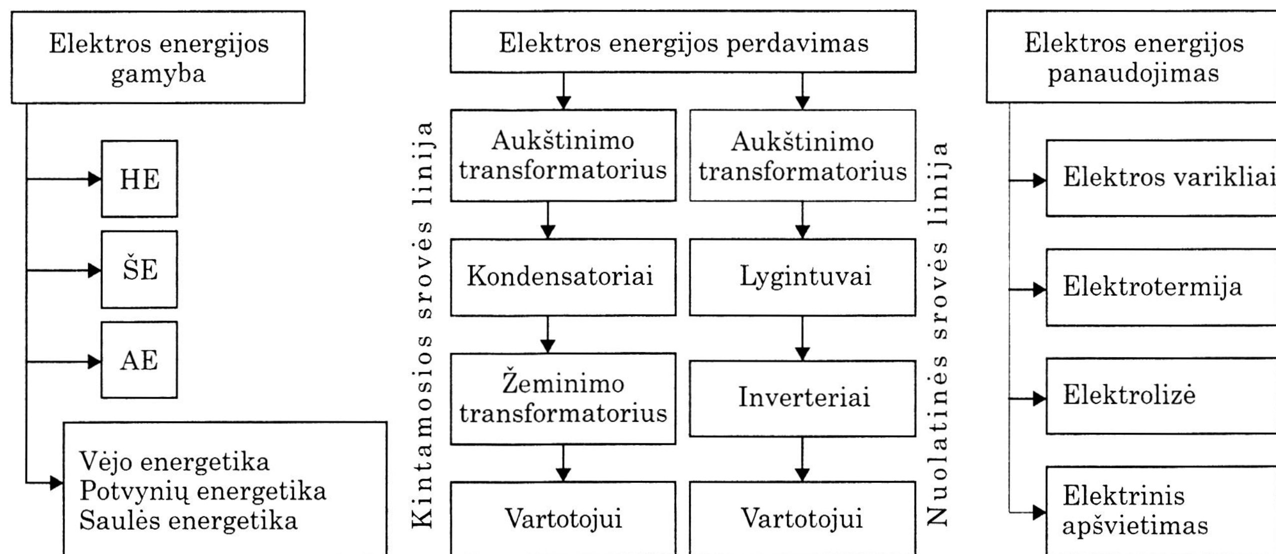
36. Elektromagnetinės prigimties jėgos

	Jėgos pavadinimas	Ką nusako jėga	Jėgos matematinė išraiška	Jėgos kryptis
Pagrindinės jėgos	Kulono (elektrostatinė) jėga	Elektros krūvių elektrostatinė sąveika	$\lvert F \rvert = \frac{\lvert q_1 \rvert \lvert q_2 \rvert}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$	$\vec{F}$ ⊕ ⊕ $\vec{F}$; $\vec{F}$ ⊖ ⊖ $\vec{F}$; ⊕ $\vec{F}$ $\vec{F}$ ⊖
	Elektrinė jėga	Elektrinio lauko veikimas elektros krūvį	$\vec{F} = q\vec{E}$	⊖ $\vec{F}$ $\vec{E}$; $\vec{F}$ ⊖
	Lorenco (Lawrence) jėga	Magnetinio lauko veikimas judantį elektros krūvį	$F_L = \lvert q \rvert Bv \sin \alpha$	⊕ $\vec{v}$ $\vec{B}$ $\vec{F}_L$
	Ampero jėga	Magnetinio lauko veikimas laidininką, kuriuo teka srovė	$F_A = BIl \sin \alpha$	$\vec{F}$ $\vec{B}$ I
Molekulinės jėgos	Tamprumo jėga	Deformuotų kūnų sąveika	$F_x = -kx$	$\vec{F}$ 0 x
	Trinties jėga	Besitrinančių kūnų sąveika	$F_{tr} = \mu N$	v $\vec{F}$ $\vec{F}_{tr}$
	Paviršiaus įtempties jėga	Molekulių sąveika prie aplinkų ribos	$F = \sigma l$	Nukreipta paviršiaus liestinės kryptimi, statmena paviršiaus ribos linijai

37. Elektros srovė terpėse

Terpė	Krūvininkai	Pagrindiniai dėsniai	Voltamperinė charakteristika	Taikymas technikoje
Metalai	Laisvieji elektronai	$I = \frac{U}{R}$; $I = nevS$ $R = \rho\frac{l}{S}$, $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$	R = const $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$	Elektrotechnika
Elektrolitai	Teigiamieji ir neigiamieji jonai	$m = kIt = \frac{1}{N_A e}\frac{M}{n}It$ $I = \frac{U - V}{r}$, V – elektrodo poliarizacijos potencialas		Galvanoplastika, metalų gryninimas, elektrometalurgija, ėsdinimas
Dujos	Elektronai, teigiamieji ir neigiamieji jonai	$qEl = \frac{mv^2}{2}$ I_s priklauso nuo jonizatoriaus intensyvumo		**Rusenančioji iškrova:** reklamos vamzdeliai, liuminescencinės lempos **Kibirkštis:** kibirkštinis medžiagų apdorojimas **Lankas:** suvirinimas, pjovimas, lydymas **Vainikinė iškrova:** dujų valymas nuo priemaišų
Tuštuma (vakuumas)	Bet kurios indukuotosios tuštumoje elektringosios dalelės (dažniausiai elektronai)	$\frac{mv^2}{2} \geqslant A_i$		Lygintuvai, stiprintuvai, generatoriai, elektroniniai vamzdžiai (oscilografai, televizoriai)
Puslaidininkiai	Laisvieji elektronai, surištieji elektronai (skylės)	$I = I_e + I_s$	*pn* sandūra	Elektronika

38. Elektroenergetika



39. Elektromagnetinės spinduliuotės skalė

Dažnis ν, Hz	Bangos ilgis λ, m	Ruožo pavadinimas	Pagrindiniai generavimo metodai	Registravimo metodai ir taikymas
iki 10^3	daugiau, negu $3 \cdot 10^4$	Žemojo dažnio virpesiai	Kintamosios srovės generatoriai	Elektrotechniniai (elektrotechnika)
10^3	$3 \cdot 10^5$	Radijo bangos	Radijo dažnio generatoriai Superaukštųjų dažnių (SAD) generatoriai	Radiotechniniai (radiotechnika: televizija, radijo ryšys, radiolokacija)
10^{12}	$3 \cdot 10^{-3}$	Infraraudonoji spinduliuotė	Molekulių ir atomų spinduliavimas esant šiluminiam ir elektriniam poveikiui	Šiluminiai (šiltnamiai) ir fotografiniai
$3{,}8 \cdot 10^{14}$	$8 \cdot 10^{-7}$	Regimoji šviesa		Akis Fotografiniai Fotoelektriniai (Žemės gyvybė)
$7{,}5 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^{-7}$	Ultravioletinė ir minkštoji rentgeno spinduliuotė	Greitųjų elektronų veikiamų atomų spinduliavimas	Fotografiniai, fotoelektriniai (medicina)
$3 \cdot 10^{17}$	10^{-9}			
$3 \cdot 10^{20}$	10^{-12}	Rentgeno ir γ spinduliuotė	Greitųjų elektringųjų dalelių veikiamų atomų spinduliavimas	Fotografiniai Jonizaciniai (medicina, metalurgija)
10^{23}	$3 \cdot 10^{-15}$	γ spinduliuotė	Branduoliniai procesai Radioaktyvusis skilimas Kosminiai procesai	Jonizaciniai (žymėtųjų atomų metodas)

40. Banginė optika

Reiškinys	Apibrėžimas	Reiškinį aiškinanti teorija	Raiška gamtoje Panaudojimas technikoje
Šviesos interferencija	Koherentinių šviesos bangų sudėtis, kai susidaro nekintantis laikui bėgant interferencinis apšviestumo maksimumų ir minimumų vaizdas Koherentumo sąlyga: ($\nu_1 = \nu_2$, $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$)	Heigenso ir Frenelio (Huygens-Fresnel) banginė teorija Maksvelo elektromagnetizmo teorija	Plonų plėvelių spalvos Optikos skaidrinimas Interferometrai Metrologija Poliruotų ir šlifuotų paviršių kokybės kontrolė
Šviesos difrakcija	Šviesos sklidimo krypties užlinkimas už kliūčių, nukrypimas nuo tiesiaeigio sklidimo Stebėjimo sąlyga: $d \sim \sqrt{l\lambda}$ Laboratorinėmis sąlygomis: $d \sim \lambda$	Heigenso ir Frenelio banginė teorija Maksvelo elektromagnetizmo teorija	Drignė Difrakcinė gardelė kaip spektrinis prietaisas Holografija
Šviesos dispersija Anomalioji dispersija	Šviesos greičio medžiagoje priklausymas nuo bangos dažnio Lūžio rodiklio priklausymas nuo šviesos bangos ilgio Rezonansinė šviesos sugertis	Lorenco elektroninė teorija	Vaivorykštė Spektroskopas Spektrinė analizė
Šviesos poliarizacija	Išskyrimas iš natūralios šviesos tam tikros lauko stiprio $\vec{E}$ krypties bangų	Maksvelo elektromagnetizmo teorija Kristalų savybių anizotropiškumo teorija	Poliaroidai Poliarimetrai (cukraus, karboksirūgščių koncentracijos tirpaluose nustatymas)
Doplerio (Doppler) reiškinys	Registruojamų virpesių dažnio pokytis dėl stebėtojo ir šviesos bangų šaltinio santykinio judėjimo	Maksvelo elektromagnetizmo teorija Specialioji reliatyvumo teorija	Automobilių ir lėktuvų, o taip pat planetų ir žvaigždžių judėjimo krypties ir greičio nustatymas
Čerenkovo ir Vavilovo reiškinys	Judančių didesniu greičiu, negu šviesos greitis medžiagoje, elektronų šviesos bangų spinduliavimas	Heigenso ir Frenelio banginė teorija Maksvelo elektromagnetizmo teorija	Čerenkovo skaitikliai Elektringųjų dalelių greičio nustatymas branduolinėje fizikoje

41. Kvantinė optika

Reiškinys	Apibrėžimas	Pagrindiniai dėsningumai	Reiškinį aiškinanti teorija	Reiškinio panaudojimas moksle ir technikoje
Absoliučiai juodo kūno (juodojo kūno) šiluminis spinduliavimas	Įšilusių kūnų energijos spinduliavimo reiškinys	Stefano ir Bolcmano (Stefan-Bolztmann) dėsnis $R = \sigma T^4$ $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$ Skirtingo ilgio bangų energijos skirsinys	Planko kvantų hipotezė	Spinduliuojamos šviesos kvantinės prigimties įrodymas
Fotoefektas (išorinis)	Surištųjų elektronų išmušimas iš šviesos veikiamų kietųjų kūnų ir skysčių	I_s priklauso nuo šviesos intensyvumo, v_{max} – nuo dažnio ν Fotoefekto raudonoji riba Fotoefekto beinertiškumas	Einšteino (Einstein) lygtis $h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$	Sugeriamos šviesos kvantinės prigimties įrodymas Fotoelementai
Liuminescencija	Šviesos energijos spinduliavimas, apšvietus medžiagą regimąja šviesa, veikiant rentgeno arba γ spinduliuote	Stokso (Stokes) taisyklė $\lambda_l > \lambda_š$ Antistoksinis švytėjimas $\lambda_l < \lambda_š$	Fotonų energija $h\nu_l = h\nu_š - \Delta E$ $h\nu_l = h\nu_š + \Delta E$	Dienos šviesos lempos Televizorių, oscilografų, kompiuterių monitorių ekranai Medžiagos sudėties analizė
Cheminis veikimas	Cheminių reakcijų sužadinimas šviesa arba jų pagreitėjimas dėl šviesos poveikio	Fotocheminių reakcijų riba	$h\nu > E_{dis}$ Grandininių reakcijų teorija (N. Semionovas)	Fotosintezė Fotografija
Šviesos slėgis	Šviesos slėgio į medžiagą priežastis	Lebedevo bandymai Maksvelo formulė $p = (1 + R)\omega_c$	Atsižvelgus į fotonų judėjimo kiekius $p = (1 + R)nh\frac{\nu}{c}$	Kometų uodegų nukrypimas nuo Saulės pusės
Komptono (Compton) reiškinys	Rentgeno spinduliuotės sklaida laisvaisiais elektronais	$\lambda_{išs} > \lambda_0$	Komptono ir Debajaus (Compton-Debye) dėsnis $\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\Theta}{2}$	Fotonų judėjimo kiekio, jų energijos buvimo įrodymas
Fotonų fliuktuacija	Fotonų skaičiaus sisteminis nuokrypis nuo vidutinės vertės	Botė (Bothe) bandymas Jofės ir Dobronravovo bandymas	Absoliučiai juodo kūno spinduliuotės energijos tankio ir šviesos slėgio fliuktuacijų Einšteino formulė	Šviesos kvantinės prigimties įrodymas jai sklindant

42. Atomo sandara

Atomo modeliai:
Tomsono (Thomson) „pudingo su razinomis“ atomo modelis (1903)
Rezerfordo (Rutherford) branduolinis (planetinis) atomo modelis (1911)

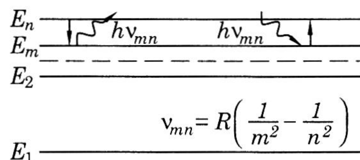
Ko negalėjo paaiškinti:
Tomsono modelis
– α dalelių sklaidos
Rezerfordo modelis
– atomo stabilumo
– linijinių spektrų

Kvantiniai Boro (Bohr) postulatai (1913)
1. Kvantinė sistema gali būti tik tam tikrų nuostoviųjų būsenų, kuriose ji nespinduliuoja
2. Sistemai peršokant iš būsenos, nusakomos energija E_n, į būseną, kurios energija E_m, išspinduliuojamas arba sugeriamas kvantas, kurio dažnį nusako lygybė: $h\nu_{nm} = E_n - E_m$

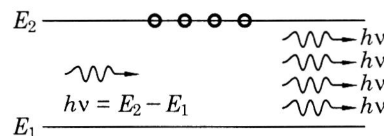
Boro postulatų eksperimentinis patvirtinimas
Franko (Franck) ir Herco (Hertz) bandymai (1913)

Energinės diagramos

Savaiminis spinduliavimas



Priverstinis spinduliavimas
A. Einšteinas (1916)



Boro teorija paaiškino tik vandenilio atomo spinduliuotės spektrą
Šią teoriją papildė vėliau padaryti atradimai

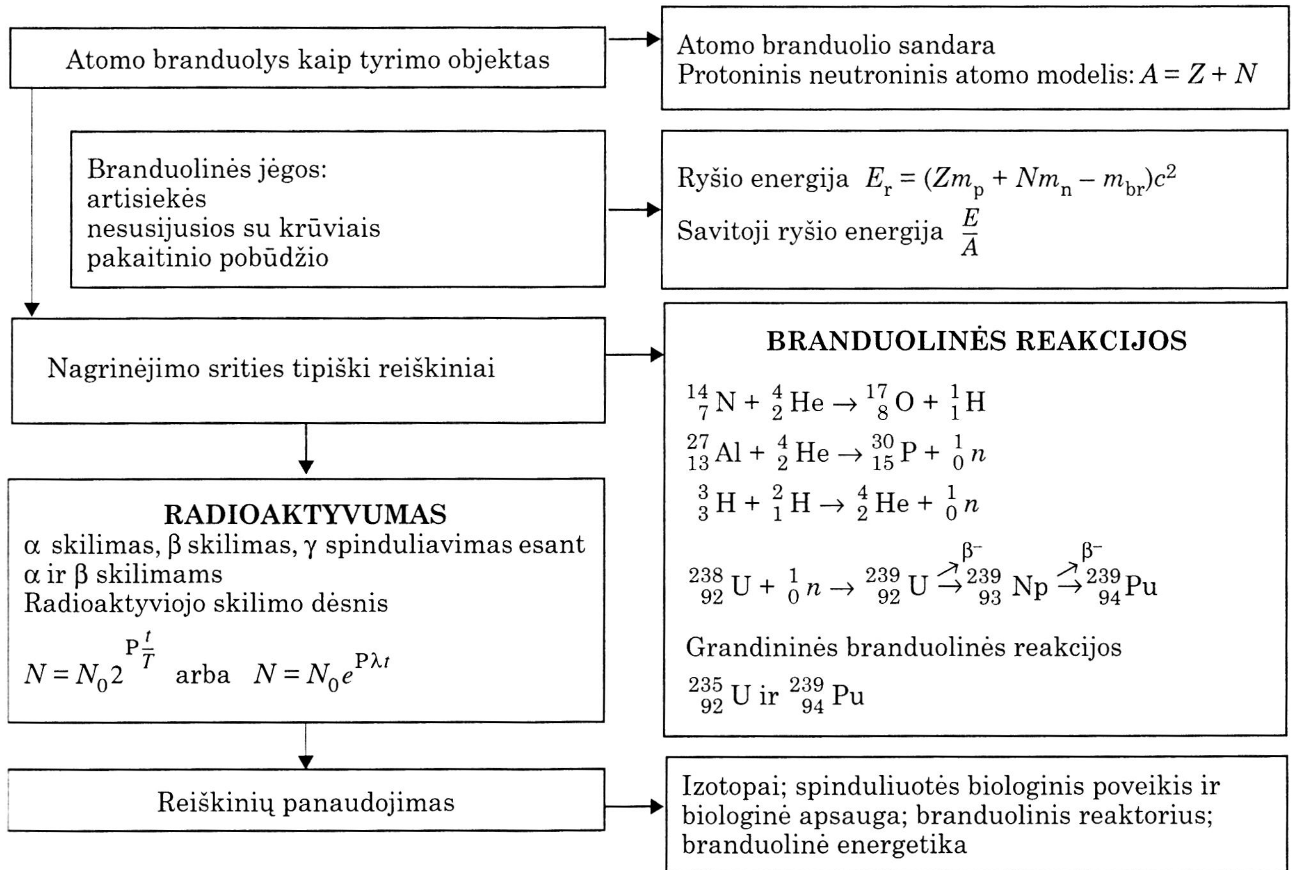
Elektronų banginių savybių hipotezė. L. de Broilis (de Broglie) (1924)
$\lambda = h/mv$

Elektronų difrakcijos bandymai. K. Devisonas (Davison) ir L. Džermeris (Germer) (1927)

Kvantinės mechanikos sukūrimas. V. Heizenbergas (Heisenberg), E. Šrėdingeris (Schrödinger) (1925)

Neapibrėžtumų sąryšis. V. Heizenbergas (1927)
$\Delta x \Delta p \geqslant h$
$\Delta E \Delta t \geqslant h$

43. Atomo branduolio fizika



44. Branduolio sandaros modeliai

Pavadinimas	Metai	Autorius	Branduolio sudėtis	Ką paaiškina	Ko nepaaiškina
Protoninis elektroninis	Iki 1932	M. Kiuri (Curie)	Branduolys sudarytas iš protonų ir elektronų ($N_p = A$, $N_e = A - Z$)	Branduolio masę ir krūvį Branduolio stabilumą	${}^{14}_{7}N$ sukininė katastrofa (branduolio sukinys sveikasis skaičius, o 14 jį sudarančių protonų ir 7 elektronų – pusinis)
Protoninis-neutroninis	1932	V. Heizenbergas	Branduolys sudarytas iš protonų ir neutronų ($N_p = Z$, $N_n = A - Z$)	Branduolio masę ir krūvį Izotopų buvimą	Tikslios branduolinių jėgų teorijos nėra
Lašelinis modelis	1936	J. Frenkelis (Fraenkel), N. Boras	Branduolys yra supertankaus elektringojo skysčio rutulio formos lašas	Branduolinių jėgų sotinimą Branduolių dalijimosi mechanizmą Ryšio energiją Branduolio stabilumą	Elektringasis skystis yra kvantinis

45. Elemantariųjų dalelių klasifikavimas

Dalelių pavadinimas			Simbolis		Masė		Sukinys išreikštas $\hbar$ vienetais	Elektros krūvis, išreikštas elementariuoju krūviu e	Gyvavimo trukmė s
			dalelės	antidalelės	elektronų masėmis m_e	elektronvoltais MeV			
Fotonas			γ		0	0	1	0	Stabilus
Leptonai		Elektroninis neutrinas	ν_e	$\tilde{\nu}_e$	0	0	1/2	0	Stabilus
		Miuoninis neutrinas	ν_μ	$\tilde{\nu}_\mu$	0	0	1/2	0	Stabilus
		Tau neutrinas	ν_τ	$\tilde{\nu}_\tau$	0	0	1/2	0	Stabilus
		Elektronas	e^-	e^+	1	0,511	1/2	–1 1	Stabilus
		Miuonas	μ^-	μ^+	207	105,66	1/2	–1 1	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
		Tau leptonas	τ^-	τ^+	3492	1782	1/2	–1 1	$1{,}46 \cdot 10^{-12}$
Hadronai	Mezonai	π mezonai	π^0 π^+	π^-	264,1 273,1	134,96 139,57	0 0	0 1 –1	$1{,}83 \cdot 10^{-16}$ $2{,}6 \cdot 10^{-8}$
		K mezonai	K^+ K^0	K^P $\tilde{K}^0$	966,4 974,1	493,67 437,7	0 0	1 –1 0	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$ $K^0_{S-8,9 \cdot 10^{-11}}$ $K^0_{L-5,2 \cdot 10^{-8}}$
		Eta mezonas	η^0		1074	548,8	0	0	$2{,}4 \cdot 10^{-19}$
	Nukleonai	Protonas Neutronas	p n	$\tilde{p}$ $\tilde{n}$	1836,1 1838,6	933,28 939,57	1/2 1/2	1 –1 0	Stabilus 10^3
	Hiperonai	Lambda hiperonas	Λ^0	$\tilde{\Lambda}^0$	2183,1	1115,6	1/2	0	$2{,}63 \cdot 10^{-10}$
		Sigma hiperonai	Σ^+ Σ^0 Σ^P	$\tilde{\Sigma}^+$ $\tilde{\Sigma}^0$ $\tilde{\Sigma}^P$	2327,6 2333,6 2343,1	1189,4 1192,5 1197,4	1/2 1/2 1/2	1 –1 0 –1 1	$8 \cdot 10^{-11}$ $5{,}8 \cdot 10^{-20}$ $1{,}48 \cdot 10^{-10}$
		Ksi hiperonai	Ξ^0 Ξ^-	$\tilde{\Xi}^0$ $\tilde{\Xi}^-$	2572,8 2585,6	1314,9 1321,3	1/2 1/2	0 –1 1	$2{,}9 \cdot 10^{-10}$ $1{,}64 \cdot 10^{-10}$
		Omega minus hiperonas	Ω^-	$\tilde{\Omega}^-$	3273	1672,2	3/2	–1 1	$8{,}2 \cdot 10^{-11}$

46. Elementariosios dalelės

PAGRINDINĖS SAVYBĖS

Nestabilumas (fotonas, elektronas, protonas, neutrinas – stabilūs)
Sąveika ir tarpusavio virsmai
Antidalelių buvimas
Sudėtinga daugumos dalelių sandara

TYRIMO PRIEMONĖS

EKSPERIMENTINĖS

Greitintuvai
Scintiliaciniai skaitikliai
Geigerio ir Miulerio (Geiger-Müller) skaitikliai
Čerenkovo skaitikliai
Storasluoksnių emulsijų metodas
Vilsono (Wilson) kamera
Burbulinė kamera

TEORINĖS

Tvermės dėsniai
Simetrijos principai
Fundamentinių sąveikų dėsniai

47. Kvarkų charakteristikos

Pavadinimas	Kvarkai		Antikvarkai	
Simbolis	u c t	d s b	$\tilde{u}$ $\tilde{c}$ $\tilde{t}$	$\tilde{d}$ $\tilde{s}$ $\tilde{b}$
Sukinys, išreikštas $\hbar$ vienetais	1/2	1/2	1/2	1/2
Elektros krūvis, išreikštas elementariuoju krūviu	2/3	–1/3	–2/3	1/3
Barioninis krūvis	1/3	1/3	–1/3	–1/3

48. Mezonų ir barionų sandara

Mezonai		Barionai			
dalelė	sandara	dalelė	sandara	dalelė	sandara
π^+	$u\tilde{d}$	p	uud	Σ^{P}	dds
π^-	$\tilde{u}d$	$\tilde{p}$	$\tilde{u}\tilde{u}\tilde{d}$	$\tilde{\Sigma}^{P}$	$\tilde{d}\tilde{d}\tilde{s}$
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\tilde{u} - d\tilde{d})$	n	udd	Ξ^0	uss
η^0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\tilde{u} + d\tilde{d} - 2s\tilde{s})$	$\tilde{n}$	$\tilde{u}\tilde{d}\tilde{d}$		
K^+	$u\tilde{s}$	Λ^0	$[ud]s$	$\tilde{\Xi}^0$	$\tilde{u}\tilde{s}\tilde{s}$
K^-	$\tilde{u}s$	$\tilde{\Lambda}^0$	$[\tilde{u}\tilde{d}]\tilde{s}$	Ξ^-	dss
$\tilde{K}^0$	$d\tilde{s}$	Σ^+	uus	$\tilde{\Xi}^{P}$	$\tilde{d}\tilde{s}\tilde{s}$
$\tilde{K}^0$	$\tilde{d}s$	Σ^+ Σ^0 Σ^0	$\tilde{u}\tilde{u}\tilde{s}$ $[\tilde{u}\tilde{d}]s$ $[\tilde{u}\tilde{d}]\tilde{s}$	Ω^- $\tilde{\Omega}^{P}$	sss $\tilde{s}\tilde{s}\tilde{s}$

49. Gamtos sąveikos

Sąveika	Lauko kvantas	Veikimo nuotolis	Santykinis intensyvumas	Ar dalyvauja sąveikoje	E priklausomybė (R)	Pasireiškimas
Branduolinė (stiprioji)	Pionai ir kaonai	10^{-15} m	1	Sunkiosios dalelės (nukleonai)	Eksponentinė, kai $R < 10^{-15}$, didesniems R – nulis	Atomo branduolių stabilumas
Elektromagnetinė	Fotonai	∞	1/137	Elektringosios dalelės ir fotonai	$\sim \frac{1}{R}$	Atomų, molekulių, makroskopinių kūnų stabilumas
Silpnoji	Bozonai	10^{-13} m	10^{-10}	Visos dalelės, išskyrus fotoną (ir gravitoną)	Nežinoma	Elementariųjų dalelių nestabilumas
Gravitacinė	Gravitonai (hipotezė)	∞	10^{-33}	Visi kūnai ir dalelės	$\sim \frac{1}{R}$	Žvaigždžių, planetų sistemų stabilumas

50. Pasaulio fizinio vaizdo evoliucija

Pasaulio fizinis vaizdas (PFV)	Apytikslis laikotarpis	Didžiausią indėlį į PFV įnešę mokslininkai	Pagrindiniai dėsniai, teorijos, principai
Mechaninis	XVI a. – XVIII a.	Demokritas, Galilėjus, Dekartas, Niutonas	Reliatyvumo principas; dinamikos dėsniai; visuotinės traukos dėsnis; tvermės dėsniai
Elektrodinaminis	XIX a.– XX a. pradžia	Faradėjus, Maksvelas, Einšteinas	Kulono dėsnis; elektromagnetinės indukcijos dėsnis; Maksvelo lygtys; specialioji reliatyvumo teorija
Kvantinis lauko	XX a. pradžia – XX a. vidurys	Plankas, Einšteinas, Boras, Rezerfordas, de Broilis, Heizenbergas, Šredingeris	Planko hipotezė, Einšteino idėjos, Boro postulatai, bangos–dalelės dualizmas

51. Atstumai ir kūnų matmenys

Atstumas	Skaitinė vertė, m
Atstumas nuo Žemės iki dabar aptikto pačio tolimiausio Visatos objekto	10^{26}
Atstumas iki artimiausios gretimos žvaigždžių sistemos – Andromedos žvaigždyno galaktikos	$2 \cdot 10^{22}$
Žvaigždžių sistemos – galaktikos, kurioje yra Saulė, skersmuo	10^{21}
Atstumas nuo Žemės iki artimiausios Kentauro žvaigždyno žvaigždės	$4 \cdot 10^{16}$
Atstumas nuo Žemės iki Saulės	$1{,}5 \cdot 10^{11}$
Saulės skersmuo	$1{,}4 \cdot 10^{9}$
Atstumas nuo Žemės iki Mėnulio	$3{,}8 \cdot 10^{8}$
Žemės skersmuo	$1{,}3 \cdot 10^{7}$
Ilgiausios Žemėje upės – Nilo – ilgis	$6{,}7 \cdot 10^{6}$
Giliausia Žemės paviršiaus įduba	$1{,}1 \cdot 10^{4}$
Aukščiausias Žemės kalnas	$8{,}9 \cdot 10^{3}$
Aukščiausių medžių – eukaliptų – aukštis	iki 150
Paties didžiausio žemės gyvūno – mėlynojo banginio – ilgis	33
Pasaulinis šuolio į tolį rekordas	8,9
Paties aukščiausio žmogaus ūgis	2,85
Amebos matmenys	$5 \cdot 10^{-4}$
Žmogaus plauko storis	10^{-4}
Raudonojo kraujo kūnelio skersmuo	10^{-5}
Gripo viruso skersmuo	$8 \cdot 10^{-8}$
Hemoglobino molekulės ilgis	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$
Atstumas tarp kietojo kūno dalelių	10^{-10}
Urano atomo branduolio skersmuo	10^{-14}
Protono skersmuo	$1{,}6 \cdot 10^{-15}$
Elementariųjų dalelių vidiniai atstumai; daleles galima tirti dabartiniais dalelių greitintuvais	10^{-17}

52. Gamtos procesų trukmė

Procesų trukmė	Skaitinė vertė, s	Procesų trukmė	Skaitinė vertė, s
Saulės ir Žemės amžius	$1{,}5 \cdot 10^{17}$	Žemės apsisukimo apie savo ašį periodas (para)	$8{,}64 \cdot 10^{4}$
Gyvybės egzistavimo Žemėje laikas	10^{17}	Laisvojo neutrono gyvavimo trukmė	10^{3}
$^{238}_{92}U$ pusėjimo trukmė (skilimo pusamžis)	10^{17}	Laikas, per kurį šviesa nusklinda nuo Saulės iki Žemės	$5 \cdot 10^{2}$
Akmens anglių amžius	$8 \cdot 10^{15}$	Laikas tarp dviejų žmogaus širdies tvinksnių	1
Saulės apsisukimo aplink žvaigždžių sistemos – galaktikos – centrą periodas	$6 \cdot 10^{15}$	Mažiausias laiko tarpas tarp dviejų įvykių, kuriuos dar atskiria žmogaus akis	10^{-1}
Laikas nuo dinozaurų išnykimo	$2 \cdot 10^{15}$	Kolibrio vieno sparnų mosto trukmė	10^{-2}
Laikas nuo žmogaus kaip rūšies atsiradimo	$6 \cdot 10^{13}$	Uodo vieno sparnų mosto trukmė	10^{-3}
Laikas nuo paskutiniojo Žemės ledynmečio	$2{,}4 \cdot 10^{11}$	Atomo šviesos spinduliavimo trukmė	10^{-9}
Vidutinė žmogaus gyvenimo trukmė	$2 \cdot 10^{9}$	Trumpaamžių elementariųjų dalelių gyvavimo trukmė	$5 \cdot 10^{-24}$
Žemės apsisukimo aplink Saulę periodas (metai)	$3 \cdot 10^{7}$		

53. Gamtoje ir technikoje judančių objektų greičiai

Greitis	Skaitinė vertė, m/s	Greitis	Skaitinė vertė, m/s
Šviesos greitis	$3 \cdot 10^{8}$	Azoto molekulių judėjimo esant 0° Ą temperatūrai greitis	$5 \cdot 10^{2}$
Pačių tolimiausių galaktikų judėjimo greitis	$1{,}4 \cdot 10^{8}$	Didžiausias automobilio greitis	$5 \cdot 10^{2}$
Elektronų greitis televizoriaus kineskope	10^{8}	Didžiausias lokomotyvo greitis geležinkeliu	10^{2}
Saulės judėjimo orbita aplink galaktikos centrą greitis	$2{,}3 \cdot 10^{5}$	Didžiausias sakalo skrydžio greitis	10^{2}
Žemės judėjimo orbita aplink Saulę greitis	$3 \cdot 10^{4}$	Didžiausias gepardo greitis	$3{,}1 \cdot 10^{1}$
Trečiasis kosminis greitis	$1{,}7 \cdot 10^{4}$	Didžiausias žmogaus 100 m bėgimo greitis	10^{1}
Antrasis kosminis greitis	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	Didžiausias žmogaus maratono bėgimo greitis	5,5
Pirmasis kosminis greitis	$7{,}9 \cdot 10^{3}$	Didžiausias žmogaus 50 km ėjimo greitis	3,4
Mėnulio judėjimo orbita aplink Žemę greitis	10^{3}	Žmogaus 100 m plaukimo rekordas	2
Didžiausias keleivinio reaktyvinio lainerio greitis	$7 \cdot 10^{2}$	Vėžlio greitis	$5 \cdot 10^{-2}$
		Sraigės greitis	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$

54. Gamtos ir technikos objektų masės

Gamtos ir technikos objektai	Skaitinė vertė, kg	Gamtos ir technikos objektai	Skaitinė vertė, kg
Visata	10^{53}	Kosminė stotis	10^{4}
Mūsų galaktika	$2{,}2 \cdot 10^{41}$	Automobilis	10^{3}
Saulė	$2 \cdot 10^{30}$	Žmogus	10^{2}
Žemė	$6 \cdot 10^{24}$	Kolibris (pats mažiausias paukštis)	10^{-3}
Mėnulis	$7{,}4 \cdot 10^{22}$	Vandens lašas	10^{-5}
Žemės atmosfera	$5 \cdot 10^{18}$	Musė	10^{-6}
Bratsko HE užtvanka	10^{10}	Snaigė	10^{-7}
Cheopso piramidė	$6 \cdot 10^{9}$	Bakterijos ląstelė	$5 \cdot 10^{-12}$
Maskvos universiteto pagrindiniai rūmai	$5 \cdot 10^{8}$	Penicilino molekulė	10^{-17}
Ostankino televizijos bokštas	$5{,}5 \cdot 10^{7}$	Vandens molekulė	$3 \cdot 10^{-20}$
Sinchrofazotronas	10^{7}	Gripo virusas	$6 \cdot 10^{-19}$
Raketa	10^{6}	Urano branduolys	$4 \cdot 10^{-20}$
Pats didžiausias banginis	$1{,}5 \cdot 10^{5}$	Vandenilio atomas	$1{,}7 \cdot 10^{-27}$
Lėktuvas	10^{5}	Elektronas	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$

55. Gamtos ir technikos garsų stipris ir garsumas

Gamtos ir technikos objektai	Garso stipris, W/m^2	Garsumas, dB	Gamtos ir technikos objektai	Garso stipris, W/m^2	Garsumas, dB
Reaktyvinis variklis	100	130	Garsi kalba	10^{-6}	60
Stiprus griaustinis	10	120	Pritildytas radijo aparatas	10^{-7}	50
Pneumatinis plaktukas	10^{-1}	110	Kalbėjimas pusbalsiu	10^{-8}	40
Lėktuvo kabina	10^{-2}	100	Bibliotekos skaitykla	10^{-9}	30
Metropoliteno vagonas	10^{-3}	90	Kišeninio laikrodžio tiksėjimas; šnabždesys	10^{-10}	20
Triukšminga gatvė	10^{-4}	80	Lapų šlamėjimas miške	10^{-11}	10
Automobilio salonas Tramvajaus vagonas	10^{-5}	70	Girdos slenkstis	10^{-12}	0

56. Gamtoje ir technikoje veikiančios jėgos

Sąveikos objektai	Skaitinė vertė, N	Sąveikos objektai	Skaitinė vertė, N
Žemės ir Saulės tarpusavio traukos jėga	$3{,}5 \cdot 10^{22}$	Futbolininko spyrio į kamuolį jėga	10^{4}
Žemės ir Mėnulio tarpusavio traukos jėga	$2 \cdot 10^{20}$	Boksininko smūgio jėga	$5 \cdot 10^{3}$
Kosminių raketų traukos jėga	$4 \cdot 10^{4}$	Dinamometrą spaudžiančios rankos jėga	$5 \cdot 10^{2}$
Gaminant dirbtinius deimantus panaudota jėga	10^{6}	Jėga, kuria vandenilio atomo branduolys traukia elektroną	$2 \cdot 10^{-8}$
Šilumvežio traukos jėga	$6 \cdot 10^{5}$	Garso slėgio arti girdos slenksčio jėga	$2 \cdot 10^{-9}$

57. Gamtos ir technikos objektų energija

Gamtos ir technikos objektai	Skaitinė vertė, J	Gamtos ir technikos objektai	Skaitinė vertė, J
Metagalaktika	10^{54}	Žaibas	10^{9}
Supernovos sprogimas	10^{44}	Žmogaus energijos sąnaudos per parą	10^{8}
Saulės metinė spinduliuotė	10^{33}	Rentgeno spinduliuotės mirtina dozė	10^{3}
Per metus Žemės gauta energija	10^{26}	Greitintuve skriejančios dalelės	10^{-3}
Stiprus žemės drebėjimas	10^{20}	Regimosios šviesos fotonas	10^{-2}
Vandenilinės bombos sprogimas	10^{18}	Vandenilio atomo elektronas	10^{-15}
Raketos paleidimas	10^{12}	Cheminis ryšys	10^{-18}

58. Gamtos ir technikos objektų temperatūra

Gamtos ir technikos objektai	Skaitinė vertė, K	Gamtos ir technikos objektai	Skaitinė vertė, K
Visata, praėjus 10^{-35} s nuo Didžiojo sprogimo	10^{28}	Volframo lydymasis	3700
Žvaigždžių gelmės	10^{9}–10^{10}	Vandens virimas	373
Termobranduolinė sintezė	10^{8}	Ledo tirpsmas	273
Saulės blyksniai	$3 \cdot 10^{7}$	Žemiausioji Žemės temperatūra	178,5
Saulės vainikas	10^{6}	Azoto skystėjimas	77
Saulės paviršius	6300	Helio skystėjimas	4,2
Elektros lankas	5000–6000	Visata	3
Saulės dėmės	4800	Žemiausia pasiekta temperatūra	10^{-7}

59. Gamtos ir technikos objektų slėgis

Gamtos ir technikos objektas	Skaitinė vertė, Pa
Dujos variklių vidaus degimo cilindruose:	
dyzelinio	$(6–9) \cdot 10^9$
karbiuratorinio	$(3–3{,}5) \cdot 10^9$
Dirbančio tekinimo staklių peilio smaigalys	$2{,}5 \cdot 10^9$
Parako dujos vamzdyje šaunant:	
iš pabūklo	$3{,}9 \cdot 10^8$
iš automato	$2{,}7 \cdot 10^8$
Vagono ratų slegiami bėgiai	$2{,}9 \cdot 10^8$
Skysčio hidraulinio preso slėgio sistemoje	10^8
Garas garo katiluose	iki $2{,}5 \cdot 10^7$
Dujos magistraliniuose dujotiekiuose	$5 \cdot 10^6$
Ostankino televizijos bokšto slegiama žemė	$2{,}7 \cdot 10^5$
Lengvojo automobilio slegiamas kelias	$2 \cdot 10^5$
Normalusis atmosferos slėgis	10^5
Vikšrinio traktoriaus slegiama dirva	$5 \cdot 10^4$
Mėnuleigio ratų slegiamas gruntas	$5 \cdot 10^3$
Rentgeno vamzdis	10^{-7}
Dabartiniais metodais pasiektas pats mažiausias slėgis	$10^{-13}–10^{-14}$

60. Gamtos ir technikos objektų galia

Gamtos ir technikos objektas	Skaitinė vertė, W
Supernovos sprogimas	10^{36}
Novos sprogimas	10^{33}
Pilnoji Saulės spinduliuotė	$4 \cdot 10^{26}$
Á Žemę krintanti Saulės spinduliuotė	$2 \cdot 10^{18}$
Vandenilinės bombos sprogimas	10^{18}
Atominės bombos sprogimas	10^{15}
Visos Žemės upės ir kriokliai	$5 \cdot 10^{13}$
Uraganas	iki $5 \cdot 10^{11}$
Raketa nešėja „Energija“ (variklių suminė galia)	10^{11}
Žaibas	$2 \cdot 10^{10}$
Hidrogeneratorius	10^9
Lėktuvo milžino „Antėjaus“ varikliai	$4{,}4 \cdot 10^7$
Šilumvežio ŠET 75 dyzelinis variklis	$4{,}4 \cdot 10^6$
Sinchrofazotronas	10^5
Troleibuso variklis	$5 \cdot 10^4$
Bėgikas	$5 \cdot 10^3$
Laidynė	10^3
Buitinis šaldytuvas	10^2
Degantis degtukas	10^{-3}
Skrendanti musė	10^{-5}
Neoninė lempa	10^{-6}

61. Magnetiniai laukai

Magnetinis laukas ir jo šaltiniai	Lauko stipris, A/m	Indukcija, T
Pulsarai, arba neutroninės žvaigždės	10^{14}	10^{8}
Atomo vidus	10^{11}	10^{5}
Žvaigždės	10^{10}	10^{4}
Didžiausias sukurtas laboratorijoje spaudžiant magnetinį srautą	10^{9}	10^{3}
Kondensatorių baterijos iškrova per impulsinį solenoidą	10^{8}	10^{2}
Radiogalaktikos	10^{8}	10^{2}
Superlaidūs solenoidai	10^{7}	10
Elektromagnetai	$9 \cdot 10^{7}$	iki 10
Saulė (saulės dėmės)	10^{5}	10^{-1}
Mokykliniai magnetai	10^{4}	10^{-2}
Saulė (protuberantai)	10^{3}	10^{-3}
Saulė	10^{2}	10^{-4}
Žemė	20–50	$(2–5) \cdot 10^{-5}$
Tarpplanetinė erdvė	10^{-2}	10^{-8}
Žmogaus širdis	10^{-4}	10^{-10}
Tarpžvaigždinė aplinka	10^{-6}	10^{-12}
Žmogaus smegenys	10^{-7}	10^{-13}
Pasiekta matavimų riba	10^{-12}	10^{-18}

62. Žmogaus „fizika“

Mechaniniai parametrai	Skaitinė vertė
Vidutinis žmogaus tankis, kg/m^3	1036
Vidutinis kraujo judėjimo greitis, m/s:	
arterijose	0,2–0,5
venose	0,1–0,2
Impulso sklidimo nervais greitis, m/s	40–100
Normalus viršslėgis suaugusio žmogaus rankos arterijoje, kPa (mm Hg):	
apatinis (širdies susitraukimui prasidėjus)	9,3 (70)
viršutinis (širdies susitraukimui baigiantis)	16 (120)
Pulsuojančios širdies jėga:	
susitraukimui prasidėjus	90
susitraukimui baigiantis	70

62. Žmogaus „fizika“

Mechaniniai parametrai	Skaitinė vertė
Širdies darbas per parą, J	86 400
Širdies per parą pervaryto kraujo masė, kg	5200
Greito ėjimo galia, W	200
Elektriniai parametrai	
Kūno audinių savitoji varža, Ω · m:	
sausos odos viršutinio sluoksnio	$3{,}3 \cdot 10^5$
kraujo	1,8
raumenų	1,5
Dielektrinė skvarba:	
sausos odos	40–50
kraujo	85
Žmogaus kūno nuo vienos rankos galo iki kitos galo varža (esant sausai odai), Ω	15 000
Žmogumi tekančios srovės stipris, A:	
nepavojingas	$< 10^{-3}$
pavojingas gyvybei	$> 5 \cdot 10^{-2}$
Nepavojinga gyvybei elektrinė įtampa, V:	
sausa patalpa	< 12
drėgna patalpa	< 36
Optiniai parametrai	
Regėjimo pojūčio išlaikymo akyje trukmė, s	0,14
Suaugusio žmogaus akies obuolio skersmuo, mm	24–25
Lęšiuko lūžio rodiklis	1,4
Optinė galia, D	
lęšiuko	19–33
visos akies	60
Vyzdžio skersmuo, mm	
dienos šviesoje	2–3
esant naktiniam apšvietimui	6–8
Vidinis akies slėgis, kPa (mm Hg)	104 (780)
Tinklainės lazdelių skaičius, mln.	130
Tinklainės kolbelių skaičius, mln.	7
Vaizdo tinklainėje mažiausi matmenys, kai dar galima išskirti du daikto taškus, mm	0,002
Šviesos, kuriai akis jautriausia, bangos ilgis, nm	555
Radiaciniai parametrai	
Leistinoji spinduliuotės dozė, Gy	iki 0,25
Spindulinę ligą sukelianti spinduliuotės dozė, Gy	1–6
Mirtina spinduliuotės dozė, Gy	6–10

Fizika

MECHANIKA

Pradinės žinios apie mechaninius reiškinius ir dydžius

Masė. Masė m – skaliarinis fizikinis dydis, nusakantis kūnų savybę traukti vieni kitus.
Kūno masė – pastovus dydis.
Masės vienetas – 1 kilogramas (kg)

Tankis. Tankiu ρ vadinamas kūno masės m ir jo tūrio V santykis:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Tankio vienetas 1 kg/m^3

Jėga. Jėga $\vec{F}$ – fizikinis dydis, nusakantis kūnų vienas kito veikimą, ir yra kūnų sąveikos matas. Jėga yra vektorinis dydis; jėgos vektorius nusakomas moduliu (skaitine verte) F, kryptimi ir veikimo tašku.
Jėgos vienetas – 1 niutonas (N)

Sunkio jėga. Sunkio jėga – jėga, kuria Žemė traukia kūną. Ji nukreipta į Žemės centrą ir todėl statmena jos paviršiui. Jėgos modulis:

$$F_s = mg,$$

čia g – laisvojo kritimo pagreitis

Slėgis. Slėgis p – skaliarinis dydis, lygus statmenai paviršiui veikiančios jėgos F ir paviršiaus ploto S santykiui:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Slėgio vienetas – 1 paskalis (Pa) = 1 N/m^2

Darbas. Darbas A – skaliarinis dydis, lygus jėgos F ir atstumo s, kuriuo pastumiamas jėgos veikiamas kūnas, sandaugai:

$$A = F \cdot s.$$

Darbo vienetas – 1 džaulis (1J) = 1 N·m

Energija. Energija E – skaliarinis dydis, apibūdinantis kiekvieną judėjimą ir sąveiką bei sistemos gebėjimą atlikti darbą.
Energijos kaip ir darbo *vienetas* – 1J

Hidrostatika

Paskalio (Pascal) dėsnis. Rimties būsenos skystyje arba dujose slėgis visomis kryptimis perduodamas vienodai

Skysčio stulpelio slėgis. Esančio Žemės traukos lauke skysčio stulpelis dėl savo sunkio slegia. Slėgis p lygus:

$$p = p_{at} + \rho g h,$$

čia $p_{at} = 10^5$ Pa – atmosferos slėgis, ρ – skysčio tankis, h – stulpelio aukštis. Slėgis nepriklauso nuo stulpelio formos, o priklauso tik nuo jo aukščio

Archimedo dėsnis. Skystyje (arba dujose) panardintą kūną veikianti keliamoji jėga lygi išstumto skysčio (dujų) svoriui:

$$F_A = \rho g V,$$

čia ρ – skysčio (dujų) tankis, V – kūno tūris. F_A dar vadinama Archimedo jėga

Kūnų plaukimo sąlygos
$mg > F_A$ – kūnas skęsta
$mg = F_A$ – kūnas plaukia
$mg < F_A$ – kūnas plūduriuoja

Kinematika

Judėjimas. Kūno padėties kitimas erdvėje laikui bėgant vadinamas kūno mechaniniu judėjimu

Atskaitos sistema. Su kūnu susieta koordinačių sistema ir laikrodis vadinami atskaitos sistema

Materialusis taškas. Kūnas, kurio matmenų, apibūdinant mechaninį judėjimą galima nepaisyti, vadinamas materialiuoju tašku. Tiksliai kalbant, visi mechanikos dėsniai galioja tik materialiesiems taškams

Trajektorija. Linija, išilgai kurios slenka kūnas, vadinama trajektorija. Priklausomai nuo trajektorijos skiriamas tiesiaeigis ir kreivaeigis judėjimas

Kelias ir poslinkis. Kelias – skaliarinis dydis, lygus atstumui, kurį kūnas nueina išilgai trajektorijos. Poslinkis – pradinį ir galinį kelio taškus jungiantis vektorius

Greitis. Greičiu $\vec{v}$ vadinamas vektorinis dydis, nusakantis kūno slinkimo tempą ir kryptį. Jei judėjimas tolyginis, greitis lygus poslinkio ir laiko, per kurį kūnas pasislinko, santykiui:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}.$$

Greičio vienetas – 1 m/s

Judėjimo lygtis. Poslinkio priklausomybė nuo laiko vadinama judėjimo lygtimi. Kai judėjimas tolyginis tiesiaeigis, tai judėjimo lygtis yra tokia:

$$\vec{s} = \vec{v}t$$

Momentinis greitis. Momentinis greitis – labai mažo poslinkio ir laiko, per kurį kūnas pasislinko, santykis:

$$\vec{v}_1 = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}.$$

Vidutinis greitis

$$v = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$$

Pagreitis. Pagreičiu $\vec{a}$ vadinamas vektorinis dydis, nusakantis greičio kitimo tempą. Tolyginio judėjimo pagreitis lygus greičio pokyčio ir laiko, per kurį pakito greitis, santykiui:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

$\vec{a}$ kryptis tokia pat kaip ir $\Delta\vec{v}$.

Pagreičio vienetas – 1 m/s^2

Momentinis tolygiai kintamo judėjimo greitis

$$v = v_0 + at$$

Tolygiai kintamai judant nueitas kūno kelias
Judėjimo lygtis:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Jeigu kūnas pradžioje nejudėjo, tai $v_0 = 0$ ir

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Kūnams laisvai krintant Žemės traukos lauke

$$a = g = 9{,}8 \text{ m/s}^2,$$

čia g – laisvojo kritimo pagreitis. Judėjimo lygtis tokia:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Kūno tolyginis judėjimas apskritimu

Sukimosi dažnis

$$\nu = \frac{N}{t},$$

čia N – apsisukimų per laiką t skaičius

Dažnio vienetas – 1 apsisukimas sekundei (1 s^{-1}).

Sukimosi periodas. Vieno apsisukimo apskritimu laikas vadinamas sukimosi periodu T. Periodas

$$T = \frac{t}{N}.$$

Periodo vienetas – 1 s

Dažnio ir periodo ryšys

$$\nu = \frac{1}{T},\ T = \frac{1}{\nu}$$

Kampinis greitis ω:

$$\omega = \frac{\varphi}{t},\ \omega = \frac{2\pi}{T},\ \omega = 2\pi\nu,$$

čia φ – kūno kampinis poslinkis

Linijinis greitis. Tolygiai apskritimu judančio kūno linijinio greičio modulis nekinta, o greičio kryptis nepaliaujamai kinta. Greitis visada nukreiptas apskritimo (trajektorijos) liestine.
Linijinis greitis:

$$v = \frac{2\pi R}{T},\ v = 2\pi R\nu,$$

čia R – apskritimo spindulys

Linijinio ir kampinio greičio ryšys

$$v = \omega R,\ \omega = \frac{v}{R}$$

Įcentrinis pagreitis. Tolygiai apskritimu judančio kūno pagreičio $\vec{a}_{\text{įc}}$ modulis nekinta, o kryptis – apskritimo centro link. Modulis lygus linijinio greičio kvadratui, padalytam iš apskritimo spindulio:

$$a_{\text{įc}} = \frac{v^2}{R}$$

Dinamika

Masė. Dinamikoje kūno masė gali būti kaip kūno inertiškumo matas, t. y. kūno savybė judėti pastoviu greičiu tol, kol jo nepaveikia kiti kūnai.

Pirmasis Niutono dėsnis (inercijos dėsnis). Kiekvieno kūno pradinė santykinės rimties arba tolyginio tiesiaeigio judėjimo būsena nekinta tol, kol jo neveikia kiti kūnai.

Inercinės atskaitos sistemos. Atskaitos sistemos, kuriose galioja inercijos dėsnis, vadinamos inercinėmis.

Antrasis Niutono dėsnis. Kūno pagreitis tiesiog proporcingas veikiančiai jėgai ir atvirkščiai proporcingas masei:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Antrasis Niutono dėsnis galioja tik inercinėse sistemose.
Jeigu kūną veikia ne viena jėga, tai jo pagreitis lygus pagreičiui, kurį kūnui suteiktų tų jėgų atstojamoji:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$

Trečiasis Niutono dėsnis (veiksmo ir atoveiksmio dėsnis). Kūnų tarpusavio sąveikos jėgos veikia vienoje tiesėje, lygių modulių (vienodo didumo), bet priešingų krypčių:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Įcentrinė jėga. Jėga, kuria ryšys veikia apskritimu judantį kūną, vadinama įcentrine jėga. Ji nukreipta į apskritimo centrą. Įcentrinė jėga:

$$F_{\text{įc}} = ma_{\text{įc}} = \frac{mv^2}{R}$$

Huko (Hooke) dėsnis. Esant tampriajai deformacijai strypo absoliutinis pailgėjimas Δl tiesiog proporcingas jį veikiančiai jėgai:

$$\Delta l = -\frac{F_{\text{t}}}{k},$$

čia F_{t} – tamprumo jėga, k – strypo medžiagos standumas. Tamprumo jėga – deformuotame kūne atsiradusi jėga. Ji proporcinga deformacijos moduliui ir nukreipta priešinga deformuojančiai jėgai kryptimi

Galilėjaus (Galilei) reliatyvumo principas. Visos inercinės sistemos yra lygiavertės, todėl mechanikos dėsniai jose reiškiami vienodai. Jose vienodi laikas, kūnų masės, pagreičiai ir jėgos. Kūno greitis ir trajektorija inercinėse sistemose skiriasi

Visuotinis traukos dėsnis. Du taškiniai kūnai traukia vienas kitą jėgomis, tiesiog proporcingomis kūnų masėms ir atvirkščiai proporcingomis atstumo tarp jų kvadratui:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

čia G – visuotinės traukos (gravitacijos) konstanta.

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Inercinės ir gravitacinės masių lygybė. Masę galima apibrėžti kaip skaliarinį fizikinį dydį, kuris nusako tiek inercines, tiek ir gravitacines kūnų savybes ir yra šių savybių matas.

Svoris. Jėga $\vec{P}$, kuria dėl Žemės traukos kūnas veikia horizontalią atramą arba pakabą, trukdančias jam laisvai kristi, vadinama kūno svoriu.

$$P = mg,$$

čia m – kūno masė, o g – laisvojo kritimo pagreitis. *Svorio vienetas* – 1 N

Pirmasis kosminis greitis. Minimalus kūno greitis v_1, kuris turi būti, kad kūnas judėtų aplink Žemę apskritimine orbita:

$$v_1 = \sqrt{gR_{\check{z}}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{m/s},$$

čia $R_{\check{z}}$ – Žemės spindulys

Antrasis kosminis greitis. Minimalus greitis, kuriuo turi judėti kūnas, kad jis išlėktų iš Žemės traukos srities:

$$v_2 = \sqrt{2gR_{\check{z}}} = 11,2 \cdot 10^3 \text{m/s}$$

Trinties jėga. Dviejų vienas kito atžvilgiu judančių besiliečiančių kūnų paviršiuje atsiradusi jėga vadinama trinties jėga. Trinties jėga kūnų paviršiuje, kai tie kūnai vienas kito atžvilgiu nejuda, vadinama rimties trintimi. Trinties jėga

$$F_{tr} = \mu N,$$

čia μ – trinties koeficientas, priklausantis nuo besitrinančių paviršių, jų būsenos, o taip pat nuo judėjimo pobūdžio (slinkimo, riedėjimo, rimties ir kt.), N – statmenojo slėgio jėga.

Terpės pasipriešinimo jėga. Kai greičiai maži,

$$F_{pas} = kv,$$

čia v – judėjimo greitis, k – terpės pasipriešinimo koeficientas, priklausantis nuo jos savybių, o taip pat nuo judančių kūnų formos, jų paviršiaus matmenų ir būsenos. Kai greičiai dideli, tai

$$F_{pas} = kv^2$$

Tvermės dėsniai

Kūno judėjimo kiekis. Kūno judėjimo kiekis $\vec{p}$ yra vektorinis fizikinis dydis – mechaninio judėjimo matas. Lygus kūno masės ir jo greičio sandaugai:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Judėjimo kiekio vienetas – 1 kg · m/s

Uždaroji sistema. Uždarąja (izoliuotąja) sistema vadinama kūnų, sąveikaujančių tarpusavyje, bet nesąveikaujančių su nepriklausančiais sistemai kūnais, visuma

Judėjimo kiekio tvermės dėsnis. Uždarosios sistemos kūnų judesio kiekių suma dėl kūnų tarpusavio sąveikos nekinta:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Tamprusis smūgis:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}' + m_2\vec{v}'',$$

čia m_1, m_2 – susiduriančių kūnų masės, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – jų greičiai prieš susiduriant, $\vec{v}', \vec{v}''$ – greičiai po susidūrimo.

Darbas:

$$A = Fs\cos\alpha;$$

čia α – kampas tarp jėgos ir poslinkio vektorių

Energija. Universalus kiekybinis įvairių formų judėjimo (ir mechaninio) matas (žr. p. 330)

Konservatyviosios jėgos. Jėgos, kurių darbas nepriklauso nuo kelio formos, vadinamos konservatyviosiomis. Kitais atvejais jėgos yra nekonservatyviosios (pavyzdžiui, trinties jėga)

Kinetinė energija. Kinetinė energija E_k yra judančio kūno energija:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Potencinė energija. Potencinė energija E_p – kūnų sąveikos energija, priklausanti nuo atstumo tarp jų.

Kūno potencinė energija Žemės traukos lauke

$$E_p = mgh,$$

čia h – kūno aukštis virš Žemės, g – laisvojo kritimo pagreitis

Darbas kaip energijos pokyčio matas:

$$A = -\Delta E.$$

Pavyzdžiai:

$$A = E_{k_1} - E_{k_2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$$

$$A = E_{p_1} - E_{p_2} = mgh_1 - mgh_2$$

Energijos tvermės ir virsmo dėsnis. Energija nesukuriama ir nesunaikinama; viena jos forma gali virsti kita. Galima energijos apykaita tarp skirtingų materijos formų – medžiagos ir lauko.

Pilnoji mechaninė energija ir jos tvermės dėsnis. Pilnoji mechaninė energija E – sistemos kinetinės ir potencinės energijos suma. Uždarosios sistemos kūnų, kurie sąveikauja konservatyviosiomis jėgomis, pilnoji energija nekinta:

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

Galia. Galia P yra skaliarinis dydis, nusakantis vienos energijos formos virsmo kita greitį. Jos matas – virtusios energijos kiekio (darbo) ir laiko, per kurį įvyko virsmas, santykis:

$$P = \frac{|\Delta E|}{t} = \frac{A}{t}.$$

Galios vienetas – 1 vatas (W) 1J/s.

Naudingumo koeficientas (NK). Naudingumo koeficientas η yra atlikto naudingo darbo A ir viso sunaudoto energijos kiekio E santykis:

$$\eta = \frac{A}{E}.$$

Paprastai NK reiškiamas procentais:

$$\eta = \frac{A}{E} \cdot 100\ \%.$$

Visada $\eta < 1$ ($\eta < 100$ %)

Hidrodinamika ir aerodinamika

Tolydumo lygtis. Jeigu skystis nespūdus, tai galioja lygybė

$$vS = \text{const},$$

čia v – tekėjimo greitis, S – srauto skerspjūvio plotas.

Skysčio tekėjimo nevienodo skerspjūvio vamzdžiu greitis atvirkščiai proporcingas vamzdžio skerspjūvio plotui:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Bernulio dėsnis. Tekančio skysčio (dujų) slėgis didesnis ten, kur skysčio greitis mažesnis ir atvirkščiai – mažesnis ten, kur tėkmės greitis didesnis:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2), \text{ arba } p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const},$$

čia p – statinis slėgis, $\frac{\rho v^2}{2}$ – dinaminis slėgis

Skysčio tekėjimo iš indo greitis (Toričelio (Torricelli) formulė). Kūno tekėjimo iš pakankamai didelio indo per mažą angą greitis

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)},$$

čia h_1 – skysčio aukštis inde, h_2 – angos vietos aukštis ($h_1 > h_2$)

Svyravimai ir bangos

Periodas. Svyravimų periodas – laikas, per kurį įvyksta pilnasis sistemos svyravimas:

$$T = \frac{t}{N},$$

čia N – susvyravimų skaičius per laiką t

Dažnis. Dažnis ν – susvyravimų per vienetinį laiką skaičius:

$$\nu = \frac{N}{t}, \ \nu = \frac{1}{T}.$$

Dažnio vienetas – 1 hercas (Hz) = 1 s^{-1}

Ciklinis dažnis

$\omega = 2\pi\nu$

Harmoninio svyravimo lygtis

$x = X_d \cos(\omega t + \varphi_0)$,

čia x – kūno poslinkis, X_d – amplitudė (didžiausias poslinkis), $(\omega t + \varphi_0)$ – svyravimo fazė, φ_0 – pradinė fazė

Greitis. Kai $\varphi_0 = 0$, tai

$$v = -\omega X_d \sin\omega t$$

Pagreitis. Kai $\varphi_0 = 0$, tai

$$a = -\omega^2 X_d \cos\omega t$$

Laisvieji svyravimai. Laisvaisiais vadinami tokie mechaninės sistemos svyravimai, kai ji tik vieną kartą pastumiama iš pusiausvyros būsenos. Jų savasis dažnis ω_0 priklauso tik nuo sistemos parametrų. Laikui bėgant svyravimai nuslopsta dėl trinties

Matematinė svyruoklė. Dažnis

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

čia l – svyruoklės ilgis, g – laisvojo kritimo pagreitis.
Periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Didžiausią kinetinę energiją svyruoklė turi pereidama pusiausvyros padėtį. Tada

$$E_{kd} = \frac{mv_d^2}{2}$$

Spyruoklinė svyruoklė. Dažnis

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

čia k – spyruoklės standumas, m – kūno masė.
Periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Didžiausią potencinę energiją svyruoklė turi esant didžiausiam poslinkiui. Tada

$$E_{pd} = \frac{kX_d^2}{2}.$$

Priverstiniai svyravimai. Periodiškai veikiančios išorinės jėgos sukelti ir palaikomi sistemos svyravimai vadinami priverstiniais svyravimais

Rezonansas. Ryškus priverstinių virpesių amplitudės X_d padidėjimas, kai priverstinės jėgos dažnis ω tampa lygus sistemos savųjų svyravimų dažniui ω_0, vadinamas rezonansu

Bangos. Bangos – sklindantys terpe mechaniniai arba elektromagnetiniai virpesiai

Bangos greitis. Bangos sklidimo greitis – svyravimų energijos pernešimo greitis. Tačiau terpės dalelės tik svyruoja apie pusiausvyros padėtį ir neslenka kartu su banga

Bangos ilgis. l – atstumas, kurį banga nusklinda per vieną periodą:

$$\lambda = vT, \text{ arba } \lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Bangos ilgio vienetas – 1 metras (m)

Bangos dažnis

$$\nu = \frac{v}{l}$$

Bangos dažnio vienetas – 1 Hz

Statikos elementai

Jėgos momentas. Jėgos momentas $\vec{M}$ yra vektorinis dydis, nusakomas galinčio suktis apie ašį kūno bet kurį tašką veikiančios jėgos $\vec{F}$ ir peties d sandauga:

$$\vec{M} = \vec{F}d,$$

čia d – mažiausias atstumas nuo sukimosi centro iki jėgos veikimo linijos.
Jėgos momento vienetas – 1 N · m

Kūno pusiausvyra. Mechanikoje pusiausvyra vadinama tokia kūno būsena, kai jis pasirinktos inercinės sistemos atžvilgiu nejuda

Pusiausvyros sąlyga. Kūnas yra pusiausvyros būsenos, jeigu jį veikiančių jėgų momentų algebrinė suma lygi nuliui:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = 0$$

Potencinė energija ir pusiausvyra. Laisva mechaninė sistema įgauna tokią būseną, kuriai esant potencinė energija yra mažiausia:

$$E_{\text{p pus}} = E_{\text{p m}}$$

MOLEKULINĖ FIZIKA IR TERMODINAMIKA

Šiluminių reiškinių pradmenys

Molekulių masės ir matmenys. Vidutinis molekulės skersmuo apytiksliai lygus $3 \cdot 10^{-10}$ m.
Vidutinis molekulės tūris apytiksliai lygus
$2{,}7 \cdot 10^{-29}$ m^3.
Vidutinė molekulės masė apytiksliai lygi
$2{,}4 \cdot 10^{-26}$ kg

Idealiosios dujos. Tai dujos, į kurių daleles galima žiūrėti kaip į tarpusavyje nesąveikaujančius materialiuosius taškus. Dalelės sąveikauja tik susidurdamos viena su kita

Šilumos mainai. Šilumos mainai – skirtingų temperatūrų besiliečiančių kūnų vidinės energijos apykaita. Šilumos mainais kūnui arba sistemai perduotas energijos kiekis vadinamas šilumos kiekiu Q:

$$Q = \Delta U$$

Šildymas ir aušinimas. Kūnai įšyla arba ataušta, vienam gaunant šilumos kiekį Q_g, o kitam atiduodant šilumos kiekį Q_a. Kai sistema izoliuota, tai

$$|Q_g| = |Q_a|$$

Šilumos kiekis

$$Q = cm(t_2 - t_1) = cm\Delta t,$$

čia m – kūno masė, c – savitoji šiluminė talpa – energija, kurią reikia perduoti 1 kg masės kūnui, kad jo temperatūra padidėtų 1 °C (vienu kelvinu).
Savitosios šiluminės talpos vienetas – 1 J/kg · K

Skystėjimas (lydymasis) ir kristalizacija

$$Q_s = |Q_{kr}| = \lambda \cdot m,$$

čia λ – savitoji skystėjimo arba kristalizacijos šiluma, matuojama J/kg

Garavimas ir kondensacija

$$Q_g = |Q_k| = r \cdot m,$$

čia r – slaptoji garavimo arba kondensacijos šiluma, matuojama J/kg.

Degimas:

$$Q_d = k \cdot m,$$

čia k – savitoji degimo šiluma, matuojama J/kg

Vidinė energija ir darbas. Kūno vidinė energija gali kisti ne vien perduodant šilumą, bet ir atliekant darbą

$$A = \Delta U.$$

čia A – išorinių jėgų darbas

Idealiųjų dujų molekulinės kinetinės teorijos pagrindai

Pagrindinė idealiųjų dujų molekulinės kinetinės teorijos lygtis:

$$p = \frac{2}{3}n\frac{m_0\overline{v^2}}{2},$$

čia p – slėgis, n – molekulių tankis, $\overline{v^2}$ – molekulių greičio kvadrato vidurkis, m_0 – molekulės masė

Temperatūra. Temperatūra vadinamas skaliarinis fizikinis dydis, nusakantis pusiausvirosios izoliuotos sistemos molekulių šiluminio judėjimo intensyvumą, ir proporcingas molekulių slenkamojo judėjimo vidutinei kinetinei energijai

Temperatūros skalės. Celsijaus skalė: *temperatūros vienetas* – 1 Celsijaus laipsnis (°C). Vandens užšalimo temperatūra t = 0 °C, vandens virimo temperatūra t = 100 °C.
Kelvino skalė: *temperatūros vienetas* – 1 kelvinas (K).
Kadangi Kelvino skalės vienetas 1 K pasirinktas lygus Celsijaus skalės vienetui 1 °C, tai Kelvino temperatūra T bus 273,15 K didesnė už Celsijaus temperatūrą t:

$$T = 273,15\ K + t$$

Temperatūros ir molekulės slenkamojo judėjimo vidutinės kinetinės energijos ryšys:

$$\overline{E}_{\mathrm{k}} = \frac{3}{2}kT,$$

čia k – Bolcmano konstanta *(pagrindinė fizikos konstanta)*; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K

Dujų slėgis

$$p = nkT$$

Idealiųjų dujų būsenos lygtis:

$$\frac{pV}{T} = kN,$$

čia $N = n \cdot V$ – dujų molekulių skaičius

Klapeirono (Capeyron) ir Mendelejevo lygtis:

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M}R,$$

čia m – dujų masė, M – dujų molinė masė. Universalioji (molinė) dujų konstanta

$$R = kN_{\mathrm{A}} = 8{,}31\ \mathrm{J/(mol \cdot K)},$$

N_{A} – Avogadro skaičius (*pagrindinė fizikos konstanta*); $N_{\mathrm{A}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ – nusako medžiagos 1 molio molekulių skaičių

Izoterminis procesas. Boilio ir Marioto (Boyle-Mariotte) dėsnis. Kai dujų temperatūra T ir masė m nekinta, tai dujų slėgio ir tūrio sandauga yra pastovi:

$$pV = \mathrm{const};$$

$$p_1V_1 = p_2V_2;$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Izobarinis procesas. Gei-Liusako (Gay-Lussac) dėsnis. Kai dujų masė ir slėgis nekinta, tai tūris nuo temperatūros priklauso tiesiškai:

$$V = V_0(1 + \alpha t),$$

čia V_0 – pradinis tūris, α – izobarinio plėtimosi koeficientas, kurio vertė visoms dujoms vienoda ($\alpha \approx 1/273{,}15\ \mathrm{K^{-1}}$).

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Izochorinis procesas. Šarlio (Charles) dėsnis. Kai dujų masė ir tūris nekinta, tai slėgis nuo temperatūros priklauso tiesiškai:

$$p = p_0(1 + \alpha t),$$

čia p_0 – pradinis slėgis, α – temperatūrinis slėgio koeficientas, kurio vertė visoms dujoms vienoda ($\alpha \approx 1/273{,}15\ \mathrm{K^{-1}}$).

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Realiosios dujos, skysčiai, kietieji kūnai

Realiosios dujos. Realiųjų dujų, skirtingai nuo idealiųjų, molekulių matmenys nėra nykstamieji, o jos tarpusavyje sąveikauja

Sotieji garai. Termodinaminės pusiausvyros su skysčiu būsenos dujos vadinamos sočiaisiais garais

Rasos taškas. Temperatūra, kuriai esant garai (dujos) tampa sočiaisiais, vadinama rasos tašku

Oro drėgnis. Santykiniu oro drėgniu φ vadinamas procentais išreikštas vandens garų slėgio p ir sočiųjų garų slėgio p_s toje temperatūroje santykis:

$$\varphi = \frac{p}{p_s} \cdot 100\,\%$$

Skysčio tūrinis plėtimasis:

$$V = V_0(1 + \beta t),$$

Čia β – tūrinio plėtimosi koeficientas, išreikštas K^{-1}

Skysčio paviršiaus įtemptis. Skysčio paviršiaus įtempties koeficientas σ skaitine verte lygus jėgai, kuria paviršinis skysčio sluoksnis veikia bet kurio paviršiuje esančio kontūro vienetinio ilgio dalį paviršiaus liestinės kryptimi:

$$\sigma = \frac{F}{l},$$

čia F – paviršiaus įtempties jėga; σ matuojamas N/m

Kapiliariniai reiškiniai. Skysčio pakilimo (nusmukimo) kapiliare dydis h tiesiog proporcingas paviršiaus įtempties koeficientui σ ir atvirkščiai proporcingas kapiliaro spinduliui r:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r},$$

čia ρ – skysčio tankis. Jeigu skystis vilgo kapiliarą, tai $h > 0$, o priešingu atveju $h < 0$.
($h = 0$ – skysčio, į kurį įmerktas kapiliaras, aukštis inde)

Huko (Hooke) dėsnis:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES} = \frac{\sigma}{E},$$

čia $\Delta l/l$ – santykinis strypo pailgėjimas, S – strypo skerspjūvio plotas, F – tamprumo jėga, $\sigma = F/S$ – mechaninė įtemptis, E – tamprumo modulis (Jungo (Young) modulis)

Kietojo kūno linijinis plėtimasis:

$$l = l_0(1 + \alpha t),$$

čia α – kietojo kūno linijinio plėtimosi koeficientas, matuojamas K^{-1}

Termodinamikos pagrindai

Idealiųjų dujų vidinė energija. Idealiųjų dujų vidinė energija U_{id} yra jų molekulių judėjimo kinetinė energija:

$$U_{id} = \frac{3}{2}NkT.$$

Idealiųjų dujų vidinė energija yra būsenos funkcija. Ji priklauso tiktai nuo dujų būsenos ir nepriklauso nuo to, kaip dujos toje būsenoje atsidūrė

Realiųjų dujų vidinė energija. Realiųjų dujų vidinė energija priklauso nuo temperatūros, tūrio ir molekulių vidinės struktūros:

$$U_r = \frac{3}{2}NkT + E_{suk} + E_{virp} + E_p.$$

Realiųjų dujų vidinė energija susideda iš molekulių slenkamojo, sukamojo judėjimo ir virpesių energijos, o taip pat jų tarpusavio sąveikos potencinės energijos E_p

Pirmasis termodinamikos dėsnis. Šiluminiams reiškiniams taikomas energijos tvermės dėsnis vadinamas pirmuoju termodinamikos dėsniu

Pirmojo termodinamikos dėsnio pagrindinė formuluotė. Sistemai perduotas šilumos kiekis eikvojamas jos vidinei energijai padidinti ir darbui prieš išorines jėgas atlikti:

$$Q = \Delta U + A$$

Kita pirmojo termodinamikos dėsnio formuluotė. Negalima sukurti pirmosios rūšies šiluminio variklio

Pirmasis termodinamikos dėsnis ir termodinaminiai procesai

Izochorinis procesas:

$$V = \text{const},\ Q_V = \Delta U$$

Izobarinis procesas:

$$p = \text{const},\ Q_p = \Delta U + A,$$

$$A = p\Delta V.$$

Kai dujos plečiasi, tai $\Delta V > 0,\ A > 0$.
Kai dujos suspaudžiamos, tai $\Delta V < 0,\ A < 0$

Izoterminis procesas:

$$T = \text{const},\ Q_T = A$$

Adiabatinis procesas. Procesas, kurio metu nėra sistemos šilumos perdavimo aplinkai, vadinamas adiabatiniu. Tada

$$Q_{ad} = 0, \quad A = -\Delta U.$$

Sistemos darbas

$$A_{ad} = \frac{3}{2}Nk(T_1 - T_2)$$

Šiluminių procesų kryptis. Jokiomis sąlygomis kūno vidinė energija negali visiškai virsti kitų rūšių energija. Tai lemia gamtos procesų tėkmės kryptį

Antrasis termodinamikos dėsnis. Vidinė energija negali savaime pereiti iš šaltesnio į karštesnį kūną

Kita antrojo termodinamikos dėsnio formuluotė. Negalima sukurti antrosios rūšies amžinojo variklio

Šiluminio variklio NK

$$\eta = \frac{A}{Q}.$$

Realiojo šiluminio variklio NK

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} < 1,$$

čia Q_1 – iš kaitintuvo gautas šilumos kiekis, Q_2 – aušintuvui perduotas šilumos kiekis

Idealioji šiluminė mašina. Karno (Carnot) ciklas. Panaudojus Karno ciklą, kuris susideda iš dviejų izoterminių ir dviejų adiabatinių procesų, pasiekiamas pats didžiausias šiluminio variklio NK

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

čia T_1 – kaitintuvo, temperatūra T_2 – aušintuvo temperatūra (T_1 ir T_2 kelvinais)

ELEKTRA IR MAGNETIZMAS

Pirminės elektrinių ir magnetinių reiškinių žinios

Elektrinis laukas. Apie įelektrintus kūnus yra ypatinga terpės būsena – elektrinis laukas. Per jį tie kūnai (elektros krūviais) sąveikauja su kitais įelektrintais kūnais

Elektros krūvis. Elektros krūvis dalus. Mažiausią neigiamą krūvį e turi elektronas – tai elektros krūvio kvantas (*pagrindinė fizikos konstanta*), lygus $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (kulono)

Laidininkų elektros krūvis. Laidininke krūviai pasiskirsto paviršiuje. Laidininko viduje lauko nėra

Elektros srovė metaluose. Elektros srovė metaluose yra kryptingas jų laisvųjų elektronų, veikiamų elektrinio lauko, judėjimas

Keletas elektromagnetinius reiškinius aprašančių dydžių

Įtampa. Įtampa U vadinamas fizikos dydis, lygus elektrinio lauko darbo A, atlikto perkeliant elektros krūvį q elektrinės grandinės ruože, ir to krūvio santykiui:

$$U = \frac{A}{q}.$$

Įtampos vienetas – 1 voltas (V)

Srovės stipris. Srovės stipris I nusako, koks elektros krūvis per 1 s pernešamas pro laidininko skerspjūvį:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Srovės stiprio vienetas – 1 amperas (A)

Varža. Laidininko varža yra laidininko savybė priešintis juo tekančiai srovei.
Varžos vienetas – 1 omas (W) = 1 V/A

Savitoji varža. Savitoji varža ρ nusako laidininko medžiagos elektrines savybes. Laidininko varža priklauso nuo jo ilgio ir skerspjūvio ploto:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \text{ arba } \rho = \frac{RS}{l}.$$

Savitosios varžos vienetas – 1 Ω · m

Omo dėsnis grandinės daliai. Srovės stipris grandinės dalyje tiesiog proporcingas įtampai U ir atvirkščiai proporcingas dalies varžai R:

$$I = \frac{U}{R}$$

Nuoseklusis laidininkų jungimas

Srovės stipris nuosekliai sujungtuose laidininkuose

$I = I_1 = I_2 = I_3 = ... = I_n$

Nuosekliai sujungtų laidininkų įtampa

$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

Nuosekliai sujungtų laidininkų varža

$R = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$

Lygiagretusis laidininkų jungimas

Srovės stipris lygiagrečiai sujungtuose laidininkuose

$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$

Lygiagrečiai sujungtų laidininkų įtampa

$U = U_1 = U_2 = U_3 = ... = U_n$

Lygiagrečiai sujungtų laidininkų varža

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Elektros srovės darbas

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

Technikoje elektros srovės darbas matuojamas vatsekundėmis Ws – tai 1 A stiprio srovės darbas grandinės dalyje, kurios įtampa 1 V, per 1 s (1 Ws = 1 J)

Elektros srovės galia:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Galios vienetas – 1 vatas (W) = 1 A · V

Elektros srovės šiluminis veikimas. Džaulio ir Lenco (Joule, Lentz) dėsnis. Laidininke išsiskyręs šilumos kiekis Q lygus srovės stiprio kvadrato, laidininko varžos ir srovės tekėjimo laiko sandaugai:

$$Q = I^2Rt$$

Elektros srovės magnetinis laukas. Magnetinio lauko šaltinis – judantys krūviai, t. y. elektros srovė. Magnetinis laukas veikia tik judančius krūvius. Magnetinio lauko stiprio linijos uždaros. Tiesiosios srovės lauko stiprio linijos yra srovę supantys koncentriniai apskritimai

Sraigto taisyklė. Magnetinio lauko linijų kryptį nusako dešiniojo sraigto taisyklė: kai sraigtas įsukamas srovės tekėjimo kryptimi, tai jo sukimo kryptis rodo šios srovės magnetinio lauko kryptį

Ritės magnetinis laukas:

$$B \approx \mu\frac{In}{d},$$

čia m – ritės šerdies medžiagos magnetinė skvarba (jeigu šerdies nėra, tai $m = 1$) I – rite tekančios elektros srovės stipris, n – ritės vijų skaičius, d – ritės ilgis

Elektromagnetinė indukcija. Elektromagnetinės indukcijos reiškinio esmė: kintant magnetiniam laukui atsiranda indukcinė elektros srovė, kurios stipris proporcingas lauko kitimo greičiui

Elektromagnetinis laukas. Apie laidininką, kuriuo teka elektros srovė, tuo pačiu metu yra vienas su kitu susiję ir magnetinis, ir elektrinis laukas, vadinamas elektromagnetiniu lauku

Elektromagnetinių bangų greitis. Elektromagnetinių bangų greitis c tuštumoje – pats didžiausias signalo perdavimo greitis (c – *pagrindinė fizikos konstanta*):

$$c \approx 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Kondensatorius ir elektrinė talpa. Kondensatoriaus savybė kaupti savo plokštelėse elektros krūvius nusakoma elektrine talpa C:

$$C = \frac{q}{U},$$

čia q – krūvis, U – kondensatoriaus plokštelių įtampa.
Talpos vienetas – 1 faradas (F) = 1 C/V

Ritė ir induktyvumas. Ritės savybė kaupti elektros srovės magnetinio lauko energiją nusakoma induktyvumu L.
Induktyvumo vienetas – 1 henris (H)

Virpamasis kontūras. Iš kondensatoriaus ir ritės sudaryta elektrinė grandinė vadinama virpamuoju kontūru.
Elektros srovės savųjų virpesių dažnis kontūre:

$$\nu_0 = \frac{1}{2p\sqrt{LC}},$$

periodas:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Elektrostatinis laukas

Krūvio tvermės dėsnis. Uždarosios sistemos elektros krūvių suma nekinta:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}$$

Krūviai laidininko paviršiuje. Krūvis, esantis vienetiniame laidininko paviršiaus plote, vadinamas paviršiniu krūvio tankiu s:

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

Kulono dėsnis. Du nejudantys tuštumoje esantys taškiniai krūviai vienas kitą veikia jėgomis išilgai juos jungiančios tiesės tiesiog proporcingos tų krūvių sandaugai ir atvirkščiai proporcingos atstumui tarp jų:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{R^2},$$

čia k – nuo vienetų sistemos priklausantis proporcingumo koeficientas.
SI Kulono dėsnis užrašomas taip:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R^2}.$$

Šioje išraiškoje

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2,$$

ε_0 – elektrinė konstanta (*pagrindinė fizikos konstanta*):

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ C/(N} \cdot \text{m}^2).$$

Elektros krūvio vienetas – 1 kulonas (C)

Elektrinio lauko stipris. Elektrinio lauko stipriu $\bar{E}$ vadinamas vektorinis fizikinis dydis – elektrinio lauko jėgos charakteristika. Elektrinio lauko stipris lygus jėgos, kuria laukas veikia krūvį q, santykiui su tuo krūviu:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q}.$$

Elektrinio lauko stiprio vienetas – 1 N/C

Taškinio krūvio elektrinio lauko stipris tuštumoje

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Superpozicijos principas. Krūvių sistemos elektrinio lauko stipris lygus atskirų krūvių elektrinių laukų stiprių sumai:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Begalinės tolygiai įelektrintos laidžios plokštumos lauko stipris

$$E_{pl} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

čia σ – paviršinis krūvio tankis, ε – terpės dielektrinė skvarba.

Dviejų begalinių priešingais krūviais įelektrintų plokštumų lauko stipris

$$E_{2\,pl} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon} = 2E_{pl}$$

Taškinio krūvio elektrinis laukas dielektrike

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2},$$

Kulono dėsnis

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}.$$

Elektrinio lauko jėgų darbas. Darbas, atliktas perkeliant krūvį tarp dviejų taškų elektrostatiniame lauke, nepriklauso nuo perkėlimo trajektorijos formos, bet priklauso tik nuo tų taškų padėties. Kitais žodžiais: darbas, atliktas perkeliant krūvį uždaru keliu, lygus nuliui. Toks laukas vadinamas potencialiniu

Potencialų skirtumas. Potencialų skirtumas yra skaliarinis fizikinis dydis – energinė elektrostatinio lauko charakteristika. Potencialų skirtumas, arba įtampa $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ yra darbo, atlikto perkeliant bandomąjį krūvį tarp dviejų taškų, ir to krūvio santykis:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{A}{q}.$$

Potencialų skirtumo vienetas – 1 voltas (V) = = 1 J/C

Elektrinio lauko stiprio ir potencialų skirtumo ryšys:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{U}{l},$$

čia l – atstumas tarp lauko taškų

Plokščiojo kondensatoriaus talpa:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

čia S – plokštelės plotas, d – atstumas tarp plokštelių

Rutulinio kondensatoriaus talpa

$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$

Nuosekliai sujungtų kondensatorių baterijos talpa

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Lygiagrečiai sujungtų kondensatorių baterijų talpa

$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$

Kondensatoriaus lauko energija:

$$E_e = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

$$E_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 V,$$

čia V – lauko užimtos erdvės tūris

Nuolatinės srovės dėsniai

Elektrovara (EV). EV, žymima $\mathcal{E}$, yra skaliarinis fizikinis dydis – energinė srovės šaltinio charakteristika. EV yra pašalinių jėgų darbo, atlikto perkeliant krūvį grandinėje uždaru keliu, santykis su tuo krūviu:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{paš}}{Q}$$

Įtampa. Grandinės dalies, kurioje nėra srovės šaltinių, įtampa lygi potencialų skirtumui:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Omo dėsnis visai grandinei. Elektros srovės stipris lygus šaltinio elektrovaros ir grandinės pilnosios varžos santykiui:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

čia R – išorinės grandinės varža, r – vidinės grandinės varža

Elektrinės grandinės NK

$$\eta = \frac{R}{R + r},$$

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{E}}$$

Elektros srovių sąveika. Dviem vienodais begalinio ilgio laidais tekančių elektros srovių sąveikos jėga

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi R},$$

čia l – laidininkų ilgis, R – atstumas tarp laidininkų, μ_0 – magnetinė skvarba (*pagrindinė fizikos konstanta*), lygi $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2
Pažymėtina, kad

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{C^2}$$

Srovių sąveikos terpėje jėga

$$F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi R},$$

čia μ – terpės magnetinė skvarba

Magnetinių medžiagų klasifikacija: $\mu = 1$ (tuštuma), $\mu < 1$ (diamagnetikai), $\mu > 1$ (paramagnetikai), $\mu >> 1$ (feromagnetikai)

Magnetinė indukcija. Magnetinė indukcija $\vec{B}$ yra vektorinis dydis – magnetinio lauko jėgos charakteristika.

$$\vec{B} = \frac{F}{Il}.$$

Magnetinės indukcijos vienetas – 1 tesla (T) = = 1 N/(A · m) = 1 kg/(A · s^2)

Ampero dėsnis. Laidininką, kuriuo teka srovė, magnetinis laukas veikia jėga

$$F = BIl\sin\alpha.$$

čia α – kampas tarp $\vec{B}$ ir srovės krypties. Ši jėga vadinama Ampero jėga

Magnetinis srautas Φ

$$\Phi = B \cdot S,$$

čia B – magnetinio lauko indukcija, S – paviršiaus plotas.
Magnetinio srauto vienetas – 1 vėberis (Wb) = = 1 T · m^2 = 1 kg · m^2/(A · s^2)

Tiesiosios srovės magnetinio lauko indukcija

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}$$

Magnetinių laukų superpozicija

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$$

Lorenco jėga. Lorenco jėga vadinama jėga, kuria magnetinis laukas veikia judantį krūvį:

$$F_L = Bqv\sin\alpha,$$

čia q – krūvis, v – krūvio (elektringosios dalelės) judėjimo greitis, α – kampas tarp greičio ir indukcijos vektorių

Elektringųjų dalelių judėjimas vienalyčiame magnetiniame lauke. Vienalyčiame magnetiniame lauke elektringosios dalelės juda apskritimine orbita, kurios spindulys

$$R = \frac{mv}{Bq}.$$

Apsisukimo periodas

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}$$

Elektros srovė įvairiose terpėse

Klasikinė metalų laidumo teorija. Laisvieji metalo elektronai yra tarsi idealiosios dujos. Betvarkiai judėdami jie susiduria su kristalinės gardelės jonais ir perduoda jiems kinetinės energijos

Metalų savitosios varžos priklausomybė nuo temperatūros:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

čia ρ_0 – savitoji varža, kai $t = 0$ °C, α – temperatūrinis varžos koeficientas

Srovės skysčiuose prigimtis. Elektros srovė tirpaluose (lydaluose) yra kryptinis teigiamųjų ir neigiamųjų jonų judėjimas. Temperatūrai didėjant elektrolitų varža mažėja, nes didėja tirpalo jonų skaičius. Elektrolitams galioja Omo dėsnis

Faradėjaus (Faraday) dėsniai

Pirmasis dėsnis. Elektrolizės metu ant elektrodo išsiskyrusios medžiagos masė tiesiog proporcinga pro elektrolitą pratekėjusiam elektros krūviui:

$$m = kq = kIt,$$

čia k – elektrocheminis ekvivalentas

Antrasis dėsnis. Tas pats elektros krūvis elektrolizės metu išskiria įvairių medžiagų kiekį, tiesiog proporcingą jų cheminiams ekvivalentams.

$$k = \frac{1}{F}\frac{M}{n},$$

Šiuos abu dėsnius apibendrintai galima užrašyti taip:

$$m = \frac{Aq}{F},$$

čia A – medžiagos cheminis ekvivalentas,

$F = 9{,}648 \cdot 10^4$ C/mol – Faradėjaus konstanta

Nesavaiminis išlydis dujose. Elektros srovė dujose, kuri teka tik veikiant nuolatiniam jonizatoriui, yra nesavaiminis išlydis

Savaiminis išlydis dujose. Elektros srovė dujose nesant nuolatinio jonizatoriaus yra savaiminis išlydis: rusenantysis, lankinis, vainikinis

Elektromagnetinė indukcija

Lenco taisyklė. Indukuotoji srovė visada priešinasi ją sukėlusiai priežasčiai

Indukuotojo elektrinio lauko sūkurinis pobūdis. Indukuotojo elektrinio lauko linijos uždaros. Toks laukas vadinamas sūkuriniu

Indukcijos elektrovara ($\mathcal{E}_{ind}$): indukcijos elektrovara lygi darbo A, kurį atlieka indukuotasis elektrinis laukas perkeliant krūvį uždaru kontūru, ir to krūvio santykiui:

$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{A}{q}$$

Elektromagnetinės indukcijos dėsnis. EV, indukuota kontūre, yra proporcinga to kontūro ribojamą plotą kertančios magnetinės indukcijos srauto kitimo spartai:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Saviindukcijos EV

$$\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Ritės magnetinio lauko energija

$$E_{mag} = \frac{LI^2}{2}$$

Elektromagnetiniai virpesiai

Harmoniniai virpesiai. Harmoniniai virpesiai vyksta pagal sinusinį (kosinusinį) dėsnį ir nusakomi trimis pastoviais dydžiais: dažniu (periodu), amplitude ir faze:

$$x = X_d \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Šie dydžiai apibrėžti p. 335

Laisvieji virpesiai. Laisvieji virpesiai neslopsta, nes jie atsiranda sistemoje, kurioje nėra energijos nuostolių (trinties, varžos ir kt.)

Virpamasis kontūras. Žr. p. 341
Energijos virsmai virpamajame kontūre:

$$E = E_{el} + E_{mag} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}$$

Laisvųjų virpesių dažnis

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Krūvio ir srovės stiprio kitimas

$$q = Q_d \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$i = I_d \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Slopinamieji virpesiai. Sistemų, kuriose reiškiasi trintis (varža), virpesiai nuslopsta ir todėl yra neharmoniniai. Nuslopimo greitis priklauso nuo trinties (varžos) didumo

Savaiminiai virpesiai. Harmoniniai virpesiai, atsirandantys veikiant neperiodinei jėgai, vadinami savaiminiais. Jiems nusakyti taikomos tos pačios sąvokos kaip ir harmoniniams virpesiams

Priverstiniai elektromagnetiniai virpesiai. Priverstiniai virpesiai sistemoje atsiranda veikiant periodiškai kintančiai įtampai

Kintamoji srovė. Elektros srovė – priverstiniai elektromagnetiniai virpesiai. Pramoninės srovės dažnis n = 50 Hz

Kintamosios srovės galia:

$$P = \frac{1}{2} I_d U_d \cos\varphi,$$

čia φ – galios koeficientas (vektorinės diagramos kampas tarp srovės ir įtampos)

Efektinės vertės:

$$I_{ef} = \frac{I_d}{\sqrt{2}}, \; U = \frac{U_d}{\sqrt{2}}.$$

$$P_{ef} = I_{ef} U_{ef} \cos\varphi$$

Aktyvioji varža. Aktyviąja kintamosios srovės grandinės varža vadinama tokia varža, kurioje tiekiama elektromagnetinė energija negrįžtamai virsta kitomis rūšimis.
Grandinės, kurioje yra aktyvioji varža, galia

$$P = I_{ef} U_{ef} = I_{ef}^2 R$$

Kintamosios srovės Džaulio ir Lenco (Joule-Lentz) dėsnis

$$A = I_{ef}^2 R t$$

Talpinė varža. Talpinė varža X_C – kondensatoriaus varža kintamosios srovės grandinėje:

$$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

Induktyvioji varža. Induktyvioji varža X_L – ritės indukuotojo elektrinio lauko apspręsta varža kintamosios srovės grandinėje:

$$X_L = L\omega.$$

Dėl talpinės ir induktyviosios varžos negrįžtamųjų energijos nuostolių nėra

Kintamosios srovės grandinės faziniai sąryšiai
Srovės stipris aktyviajame varžyje:

$$i = I_d \cos\omega t.$$

Srovės stipris talpiniame varžyje

$$i = I_d \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Srovės stipris induktyviajame varžyje

$$i = I_d \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pilnoji kintamosios srovės grandinės varža

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Transformatorius. Kai su nuostoliais nesiskaitoma, tai transformatoriaus pirminės ir antrinės apvijų srovės stiprių santykis yra toks:

$$\frac{I_{pirm}}{I_{antr}} = \frac{U_{antr}}{U_{pirm}}$$

Rezonanso nuosekliosiose ir lygiagrečiosiose grandinėse sąlyga. Nuosekliosiose ir lygiagrečiosiose grandinėse rezonansas įvyksta tada, kai $X_L = X_C$. Tada

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

ELEKTROMAGNETINĖS BANGOS. OPTIKA

Bendrosios bangų savybės

Elektromagnetinės bangos energija. Bangų energijos srauto paviršinis tankis lygus per vienetinį

laiką statmenai pernešamai per vienetinį plotą energijai:

$$I = \frac{E}{St}$$

Bangos frontas – geometrinė vieta taškų, kuriuos laiko momentu t pasiekia virpesiai

Bangos paviršius – geometrinė vieta taškų, kuriuose virpesių fazė ta pati (sinchrofazinis paviršius)

Spindulys – bangos sklidimo statmenai jos frontui kryptis

Fazinis greitis – virpesių fazės sklidimo greitis

Šviesos greitis aplinkoje:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

čia c – šviesos greitis tuštumoje, ε – terpės dielektrinė, μ – terpės magnetinė skvarba.
Šviesos greitis terpėje visada mažesnis už c

Elektromagnetinės bangos judėjimo kiekis:

$$p = \frac{\Delta E}{c}$$

Bangų atspindžio dėsnis. Bangos kritimo ir atspindžio kampai lygūs. Krintantysis ir atsispindėjęs spinduliai yra vienoje plokštumoje

Bangų lūžimo dėsniai. Krintantysis ir lūžęs spinduliai yra vienoje plokštumoje. Dviejų aplinkų riboje bangų kritimo ir lūžio kampų sinusų santykis yra pastovus dydis, vadinamas santykiniu lūžio rodikliu n_{21}:

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

čia i ir r – atitinkamai kritimo ir lūžio kampas, v_1 ir v_2 – šviesos fazinis greitis pirmojoje ir antrojoje terpėse

Lūžio rodiklis. Santykinis lūžio rodiklis lygus šviesos fazinių greičių pirmojoje ir antrojoje terpėse santykiui. Jeigu pirmoji terpė yra tuštuma, tai

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{v},$$

čia n – terpės absoliutinis lūžio rodiklis.
Santykinis lūžio dviejų terpių riboje rodiklis yra jų absoliutinių lūžio rodiklių santykis:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

Visiškasis vidaus atspindys. Visiškasis vidaus atspindys įvyksta bangoms pereinant iš optiškai tankesnės į optiškai retesnę terpę. Jį nusako ribinis kampas i_{rib}, kuris nustatomas pagal formulę:

$$\sin i_{\text{rib}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Kai spindulys pereina iš terpės į orą ($n_2 = 1$),

$$\sin i_{\text{rib}} = \frac{1}{n_1}$$

Lęšis. Plonojo lęšio formulė:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

čia F – lęšio židinio nuotolis, d – daikto nuotolis nuo lęšio, f – vaizdo nuotolis nuo lęšio.
Lęšio optinė galia D – atvirkščiai proporcingas lęšio židinio nuotoliui dydis:

$$D = \frac{1}{F}.$$

Optinės galios matavimo vienetas – 1 dioptrija (D) = 1 m^{-1}.
Glaudžiamojo lęšio optinė geba teigiama, o sklaidomojo – neigiama

Lupa. Lupa – lęšis, padidinantis mažų objektų vaizdus. Lupos didinimas

$$\Gamma_l = \frac{L}{F},$$

čia L – geriausio matomumo nuotolis, lygus 25 cm esant normaliai regai, F – lupos židinio nuotolis.

Sferinis veidrodis. Sferinio veidrodžio formulė tokia:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

čia R – veidrodžio paviršiaus kreivumo spindulys, d ir f – atitinkamai daikto ir vaizdo atstumai nuo lęšio

Mikroskopas. Mikroskopas – optinis prietaisas mažiems objektams stebėti. Sudarytas iš okuliaro (prie akies esančio lęšio) ir objektyvo (prie objekto esančio lęšio). Mikroskopo didinimas

$$\Gamma_m = \frac{\Delta \cdot L}{F_{ob} \cdot F_{ok}},$$

čia F_{ob} ir F_{ok} – atitinkamai objektyvo ir okuliaro židinio nuotoliai, Δ – nuotolis nuo okuliaro židinio objektyvo pusėje iki objektyvo židinio okuliaro pusėje, o L – geriausio matomumo nuotolis.

Žiūronai (teleskopas). Teleskopas skirtas tolimiems objektams stebėti. Teleskopo didinimas

$$\Gamma_t = \frac{F_{ob}}{F_{ok}},$$

čia F_{ob} ir F_{ok} – atitinkamai objektyvo ir okuliaro židinių nuotoliai

Koherentinės bangos. Koherentinėmis vadinamos bangos, kurių dažnis vienodas, virpesių kryptis ta pati, o fazių skirtumas pastovus

Bangų interferencija. Bangų interferencija – reiškinys, kai keleto koherentinių bangų superpozicijos suminis intensyvumas yra padidėjęs (maksimumas) arba sumažėjęs (minimumas). Susidaro vadinamasis interferencinis vaizdas

Šviesos intensyvumo padidėjimo interferencijoje sąlyga

$$D = \pm k\lambda,$$

čia $k = 0, 1, 2, ...$, D – dviejų spindulių optinių kelių skirtumas, λ – bangos ilgis.

Šviesos interferencijos minimumo sąlyga

$$D = \pm(2k + 1) \cdot \lambda/2$$

Heigenso ir Frenelio principas. Kiekvienas terpės taškas, kurį pasiekė šviesos banga, yra antrinių bangų šaltinis. Šių bangų interferencijos metu susidaro naujas bangos frontas

Bangų difrakcija. Difrakcija – bangų užlinkimas už sutinkamų kliūčių

Difrakcijos kampas. Difragavusių nuo siauro plyšio bangų difrakcinio vaizdo maksimumo sąlyga:

$$d \sin \varphi = (2k + 1) \cdot l/2,$$

čia $k = 0, 1, 2, 3, ...$; d – plyšio plotis.

Bangų dispersija. Bangų dispersija – jų fazinio greičio, o tuo pačiu ir lūžio rodiklio priklausomybė nuo dažnio:

$$v = f(\nu),\ n = 9(\nu)$$

Bangų poliarizacija. Poliarizacijos plokštuma. Poliarizacija – bangų, kurių $\bar{E}$ virpesiai vyksta vienoje plokštumoje, išskyrimas. Plokštuma, kurioje virpa $\bar{E}$ ir kurioje yra bangos sklidimo krypties vektorius, vadinama poliarizacijos plokštuma

KVANTINĖ FIZIKA IR RELIATYVUMO TEORIJOS ELEMENTAI

Reliatyvumo teorijos elementai

Reliatyvumo principas. Visų inercinių atskaitos sistemų atžvilgiu visi fizikiniai reiškiniai vyksta vienodai. Žr. p. 332

Šviesos greičio vienodumo postulatas. Visose atskaitos sistemose šviesos greitis tuštumoje yra ribinis ir nepriklauso nei nuo šaltinio, nei nuo stebėtojo judėjimo greičio

Reliatyvistinė kinematika. Kai judėjimo greitis x reliatyvistinis, t. y. artimas šviesos greičiui c, tai strypo ilgis

$$l = l_0\sqrt{1 - \beta^2},$$

čia l_0 – nejudančio strypo ilgis, $\beta = \frac{v}{c}$.

Kūnui judant reliatyvistiniu greičiu v ($v \sim c$) laiko intervalas padidėja:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

čia Δt_0 – laiko, prabėgusio nejudančioje sistemoje, intervalas

Reliatyvistinė dinamika. Reliatyvistiniu greičiu $\mathbf{v}$ ($v \sim c$) judančio kūno masė m didesnė už nejudančio kūno masę m_0:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 \angle \beta^2}}$$

Reliatyvistinė kinetinė energija

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot (1 - \sqrt{1 - \beta^2})$$

Masės ir energijos ryšys

$E = mc^2$.

Masė ir energija – dvi tarpusavyje susijusios bet kurio fizikinio objekto charakteristikos. Kūno rimties energija (savoji energija) yra

$$E_0 = m_0 c^2$$

Kvantinės fizikos elementai

Planko (Planck) hipotezė. Atomai energiją spinduliuoja ne tolydžiai, bet porcijomis (kvantais), kurių vertė proporcinga virpesių dažniui:

$$E = h\nu,$$

čia $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s – Planko konstanta (*pagrindinė fizikos konstanta*)

Fotonai. Fotonai – elektromagnetinės spinduliuotės porcijos (kvantai), kurių energija $E = h\nu$. Fotonas egzistuoja tik judėdamas šviesos greičiu, jo rimties masė lygi nuliui. Fotono reliatyvistinė masė:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Fotono judėjimo kiekis

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

Fotoefektas. Fotoefektas – elektronų emisija iš medžiagų veikiant jas šviesa

Fotoefekto dėsniai (Stoletovo dėsniai).
1. Soties srovės stipris (tuo pačiu ir šviesa išmušamų fotoelektronų skaičius) proporcinga šviesos srautui.
2. Fotoelektronų mažiausia kinetinė energija proporcinga šviesos dažniui ir priklauso tik nuo jo.
3. Egzistuoja kiekvienos medžiagos minimalus fotoefekto dažnis ν_r (raudonoji riba). Kai dažnis mažesnis už ν_r, tai fotoefekto nėra. Dažnis

$$\nu_r = \frac{A_{iš}}{h},$$

$$\lambda_r = \frac{ch}{A_{iš}},$$

čia $A_{iš}$ – elektronų išlaisvinimo iš medžiagos darbas

Einšteino lygtis

$$h\nu = A_{iš} + \frac{mv^2}{2},$$

čia $h\nu$ – fotono energija, $\frac{mv^2}{2}$ – fotoelektrono kinetinė energija.

Fotoefekto užtvarinė įtampa

$$U_{už} = \frac{mv^2}{2e},$$

čia e – elektrono krūvis

Komptono reiškinys. Rentgeno spindulių sklaida lengvose medžiagose, kai atsiranda didesnio bangos ilgio λ_1 komponentas. Jo ilgis λ_1 nustatomas iš sąryšio

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda = 2\lambda_k \cdot \sin^2\frac{\theta}{2},$$

čia λ – kritusių spindulių bangos ilgis, q – sklaidos kampas, $\lambda_k = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m – Komptono bangos ilgis. Visų medžiagų λ_k vienodas (*pagrindinė fizikos konstanta*).
Komptono reiškinys patvirtina tai, kad fotonas turi judėjimo kiekį

Dalelės-bangos dualizmas. Elektromagnetinis laukas tuo pat metu turi ir korpuskulinių (dalelių) ir banginių savybių, kurios nepaneigia vienos kitų, bet jas papildo

Atomo sandara

Balmerio ir Rydbergo (Balmer-Rydberg) formulė. Vandenilio atomo spektrinių linijų dažnis išreiškiamas formule:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

čia $n = 1, 2, 3, ..., m = 2, 3, ...; m > n$, R – Rydbergo konstanta

Boro postulatai.
1. *Stacionarinių orbitų postulatas.* Egzistuoja atomų stacionariosios būsenos. Stacionariosios būsenos atomas nespinduliuoja. Kiekvienos iš būsenų atomo energija yra apibrėžta: E_1, E_2, E_3, ...
2. *Dažnių taisyklė.* Atomas energiją spinduliuoja arba sugeria peršokdamas iš vienos stacionariosios būsenos į kitą, porcijomis (kvantais). Jų dažnis

$$\nu = \frac{E_\mathrm{m} - E_\mathrm{n}}{h}$$

3. *Orbitų kvantavimo taisyklė.* Atome egzistuoja tik tam tikros elektronų judėjimo orbitos, kuriomis jie skrieja tik tam tikru greičiu

De Broilio bangos. Bet kurios dalelės ir atomai turi banginių savybių, kurias galima nusakyti anksčiau apibrėžtais fotonų sąryšiais. De Broilio bangų ilgis

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

dažnis

$$\nu = \frac{E}{h}$$

Medžiaginių kūnų bangos-dalelės dualizmas. Visi medžiaginiai kūnai turi ir korpuskulinių, ir banginių savybių. Pastarosios reiškiasi tuo labiau, kuo mažesnė kūnų masė. Ryškiausios mikroskopinių kūnų banginės savybės.

Atomo branduolys

Branduolio sudėtis. Branduolį sudaro protonai (teigiamai elektringosios dalelės) ir neutronai (neutraliosios dalelės). Protonų skaičius Z lemia branduolio krūvį $+Ze$. Skaičius A – masės skaičius:

$$A = Z + N,$$

čia N – neutronų skaičius

Branduolių žymėjimas

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X},$$

X – cheminio elemento simbolis (pavyzdžiui, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$)

Ryšio energija ir masės defektas. Energija, kurios reikia branduoliui padalyti į jį sudarančius protonus ir neutronus vadinama branduolio ryšio energija E_r.
Branduolio rimties masė mažesnė už jį sudarančių dalelių rimties masių sumą dydžiu

$$\Delta m = \frac{E_\mathrm{r}}{c^2},$$

kuris vadinamas masės defektu

Radioaktyvumas. Branduolio savaiminio skilimo išspinduliuojant daleles ir virstant kitu branduoliu reiškinys vadinamas gamtiniu radioaktyvumu

Radioaktyviojo skilimo dėsnis

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

čia N – nesuskilusių branduolių skaičius laiko momentu t, N_0 – pradinis branduolių skaičius laiko momentu $t = 0$, λ – radioaktyviojo skilimo konstanta.

Pusėjimo trukmė (skilimo pusamžis). Laiko tarpas, per kurį suskyla pusė pradinio branduolių skaičiaus, vadinamas pusėjimo trukme T:

$$T = \ln 2/\lambda$$

Radioaktyviojo šaltinio aktyvumas

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t},$$

čia ΔN – per laiko tarpą Δt suskilusių branduolių skaičius.
Aktyvumo vienetas – 1 bekerelis (Bq) = 1 skilimas/s

α skilimo poslinkio dėsnis. α skilimas – radioaktyvusis skilimas išspinduliuojant α dalelę – helio branduolį ($^4_2$He):

$$^A_ZX = ^{A-4}_{Z-2}Y + ^4_2\alpha$$

β skilimo poslinkio dėsnis. β skilimas – radioaktyvusis skilimas išspinduliuojant β dalelę – elektroną ($^0_{-1}$e):

$$^A_ZX = _{Z+1}^{A}Y + ^0_{-1}\beta + \nu,$$

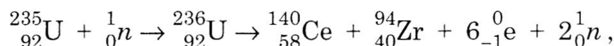
čia ν – neutrinas – neturinti rimties masės neutralioji dalelė

Branduolių γ spinduliavimas. Daugeliu branduolių skilimo atvejų išspinduliuojamos mažo bangos ilgio elektromagnetinės bangos – γ spinduliuotė. Tada branduolys peršoka iš sužadintosios būsenos į pagrindinę nebūtinai skildamas:

$$(^A_ZX)^* \to ^A_ZX + \gamma.$$

Žvaigždute pažymėtas sužadintas branduolys

Urano branduolio dalijimosi reakcija

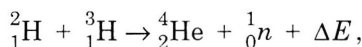


$$^{235}_{92}U + ^1_0n \to ^{236}_{92}U \to ^{140}_{58}Ce + ^{94}_{40}Zr + 6^0_{-1}e + 2^1_0n,$$

čia ^1_0n – neutralioji dalelė – neutronas.

Vienam $^{235}_{92}$U branduoliui suskilus išsiskiria 208 MeV = 2,08 · 10^8 eV energijos. Vienam nukleonui (protonui arba neutronui) tenka 0,9 MeV

Branduolių sintezės reakcija. Tokios reakcijos pavyzdys yra šis:



$$^2_1H + ^3_1H \to ^4_2He + ^1_0n + \Delta E,$$

čia $^2_1$H – deuterio (sunkiojo vandenilio) branduolys, o $^3_1$H – tričio (supersunkiojo vandenilio) branduolys

Biologinį spinduliuotės poveikį nusakantys dydžiai. Sugertosios spinduliuotės doze vadinamas žmogaus kūno sugertos spinduliuotės energijos kiekio ir žmogaus masės santykis:

$$D = \frac{\Delta E}{m}.$$

Sugertosios dozės matavimo vienetas – 1 grėjus (Gy) = 1 J/kg

Ekspozicine spinduliuotės doze (ESD) vadinamas dėl spinduliuotės poveikio atsiradusių jonų suminio skaičiaus ir žmogaus kūno masės santykis:

$$ESD = \frac{Q}{m}.$$

Praktikoje vartojamas vienetas – 1 rentgenas (R) = = 2,58 · 10^{-4} C/kg.

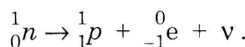
Ekvivalentine sugertosios spinduliuotės doze D_{ekv} vadinama sugertosios spinduliuotės dozės D ir biologinio efektyvumo koeficiento K_{be} sandauga:

$$D_{ekv} = DK_{be}.$$

Ekvivalentinės dozės vienetas – 1 sivertas (Sv).
1 Sv nusako 1 Gy sugertos spinduliuotės, kai K_{be} = 1.
Praktikoje vartojamas taip pat ir 1 beras (Ber) = = 0,01 Sv

Elementariosios dalelės

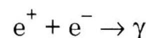
Neutrono skilimas



$$^1_0n \to ^1_1p + ^0_{-1}e + \nu.$$

Neutrono gyvavimo trukmė ~ 1000 s

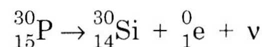
Antidalelės, pozitronas. Daugumas dalelių turi krūvio ženklu besiskiriančius analogus, vadinamąsias antidaleles. Pozitrono – „antielektrono“ – krūvis teigiamas. Pozitronas išnyksta reakcijos



$$e^+ + e^- \to \gamma$$

metu.

Branduolinės reakcijos, kurios metu atsiranda pozitronas, pavyzdys – radioaktyviojo fosforo branduolių skilimas:



$$^{30}_{15}P \to ^{30}_{14}Si + ^0_1e + \nu$$

Kvarkai. Stipriojoje sąveikoje dalyvaujančios elementariosios dalelės (protonai, neutronai ir jų antidalelės) susideda iš dar „elementaresnių“ dalelių, kurių krūvis trupmeninis, ir neutralių dalelių (gliuonų). Kvarkai ir gliuonai – kitas medžiagos struktūros lygis: molekulės → atomai → branduoliai → elementariosios dalelės → kvarkai, gliuonai, elektronai

Chemija

PAGRINDINĖS CHEMIJOS SĄVOKOS IR DĖSNIAI

1 lentelė. **Pagrindinės chemijos sąvokos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas
1	2
Cheminis elementas	Atomų, turinčių vienodą branduolio krūvį, rūšis
Molis	Medžiagos kiekis, kuriame yra tiek šios medžiagos struktūrinių dalelių, kiek jų yra dvylikoje gramų anglies izotopo ^{12}C
Medžiagos struktūrinė dalelė	Atomas, jonas, molekulė arba bet kurių kitų dalelių visuma, perteikta jos formule
Avogadro (konstanta) skaičius	Struktūrinių dalelių skaičius, sudarantis bet kurios medžiagos 1 molį, $N_A = 6{,}02204 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Atominis masės vienetas	1/12 anglies izotopo ^{12}C atomo masės; lygi $1{,}66043 \cdot 10^{-27}$ kg
Santykinė atominė masė	Atomo masė, išreikšta atominiais masės vienetais; rodo, kiek kartų duotojo atomo masė didesnė už 1/12 anglies izotopo ^{12}C atomo masės
Santykinė molekulinė masė	Medžiagos molekulės masė, išreikšta atominiais masės vienetais (molekulę sudarančių atomų santykinių masių suma, skaitine verte lygi medžiagos molio masei)
Cheminis ekvivalentas	Elemento masė, kuri susijungia su vandenilio masės vienetu arba su 8 deguonies masės vienetais arba pakeičia šiuos kiekius jų junginiuose
Valentingumas	Elemento atomų savybė prisijungti arba pakeisti junginiuose tam tikrą kito elemento atomų skaičių
Molekulė	Mažiausia medžiagos dalelė, turinti visas tos medžiagos chemines savybes; mažiausia elektriškai neutrali uždara cheminiais ryšiais sujungtų atomų, sudarančių tam tikras struktūras, visuma
Atomas	Elektriškai neutrali dalelė, susidedanti iš teigiamą krūvį turinčio branduolio ir vieno ar kelių elektronų; pati mažiausia cheminio elemento dalelė; iš tokių dalelių sudarytos vieninių ir sudėtinių medžiagų molekulės

1 lentelė. **Pagrindinės chemijos sąvokos**

1	2
Alotropija	Kai kurių elementų savybė sudaryti kelias vienines medžiagas, besiskiriančias struktūra ir savybėmis
Medžiagos masės dalis mišinyje	Medžiagos masės dalis mišinyje yra lygi tos medžiagos ir mišinio medžiagų (komponentų) masių santykiui $w = \frac{m_{\text{komp}}}{m_{\text{miš}}}$; $w = \frac{m_{\text{komp}}}{m_{\text{miš}}} \cdot 100\%$
Medžiagos molinė dalis mišinyje	Vieno komponento kiekio (mol) ir visų mišinio medžiagų kiekio (mol) santykis $\chi = \frac{n_{\text{komp}}}{n_{\text{miš}}}$; $\chi = \frac{n_{\text{komp}}}{n_{\text{miš}}} \cdot 100\%$
Medžiagos tūrinė dalis	Tūrio, kurį užima komponentas, ir viso mišinio tūrio santykis $\varphi = \frac{V_{\text{komp}}}{V_{\text{miš}}}$; $\varphi = \frac{V_{\text{komp}}}{V_{\text{miš}}} \cdot 100\%$
Santykinis tankis	Vienų dujų tūrio masės ir kitų dujų tokio pat tūrio masės santykis $D = \frac{m_1}{m_2}$

2 lentelė. **Pagrindiniai chemijos dėsniai**

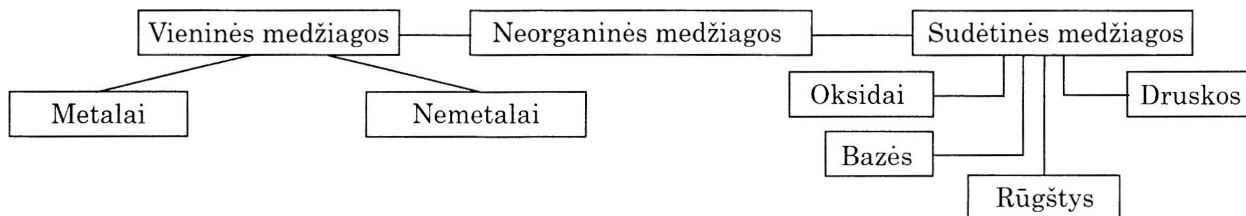
Dėsnis	Dėsnio formuluotė
Masės tvermės dėsnis	Cheminės reakcijos produktų masė yra lygi reagavusių medžiagų masei
Periodinis dėsnis	Vieninių medžiagų savybės, o taip pat cheminių junginių savybės periodiškai kinta priklausomai nuo elemento branduolio krūvio
Sudėties pastovumo dėsnis	Kiekviena medžiaga, gauta bet kokiu būdu, visuomet turi tokią pat kokybinę ir kiekybinę sudėtį (ir savybes)
Ekvivalentų dėsnis	Medžiagos reaguoja viena su kita kiekiais, proporcingais jų cheminiams ekvivalentams
Kartotinių santykių dėsnis	Jei du elementai vienas su kitu sudaro kelis junginius, tai bet kurio iš elementų masių dalys sutinka kaip nedideli sveikieji skaičiai
Pastovių tūrių santykių dėsnis	Reaguojančių dujų tūriai ir dujinių reakcijos produktų tūriai sutinka vienas su kitu kaip nedideli sveikieji skaičiai
Avogadro dėsnis	Įvairių dujų vienoduose tūriuose vienodomis sąlygomis (temperatūra ir slėgis) yra vienodas molekulių skaičius

2 lentelė. **Pagrindiniai chemijos dėsniai**

Dėsnis	Dėsnio formuluotė
Avogadro dėsnio išdavos	1. Vienodi įvairių dujų kiekiai vienodomis sąlygomis užima tokį patį tūrį 2. Normaliomis sąlygomis (n. s.) (T = 273,15 K, P = 1,01 · 10^5 Pa arba t = 0 °C; P = 1 atm) bet kurių dujų 1 molis užima tūrį, lygų apytiksliai 22,4 l
Bendrasis dujų dėsnis	$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_0V_0}{T_0}$, čia P_0, V_0, T_0 – slėgio, tūrio, temperatūros reikšmės n. s.
Klapeirono (Clapeyron) ir Mendelejevo lygtis (idealiosioms dujoms)	$PV = nRT$, čia P – slėgis, V – tūris, n – dujų kiekis (mol), T – temperatūra (K), R – universalioji (molinė) dujų konstanta ($R = 8{,}314\ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$)

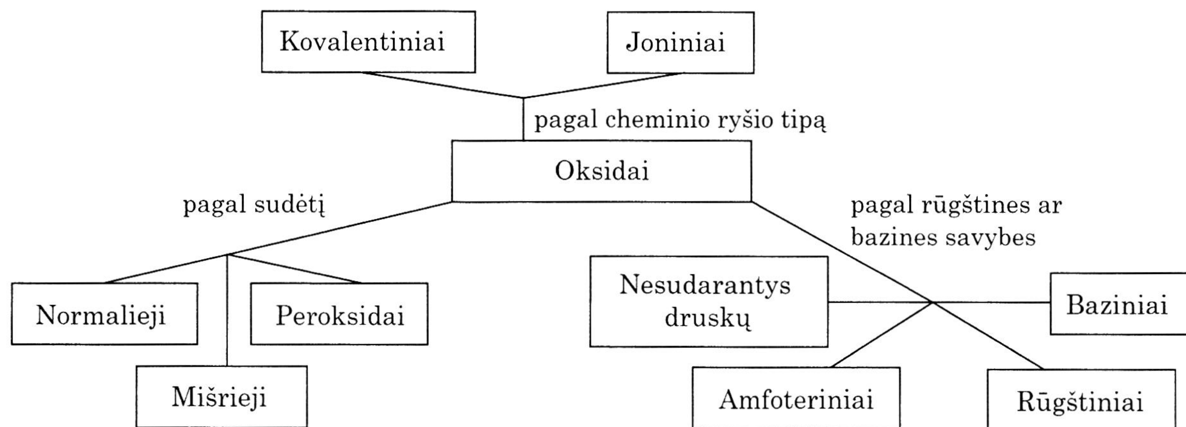
PAGRINDINĖS NEORGANINIŲ JUNGINIŲ KLASĖS

1 schema. **Neorganinių junginių klasifikacija**



OKSIDAI*

2 schema. **Oksidų klasifikacija**



* *Oksidai* – tai dvinariai elemento junginiai su deguonimi.

3 lentelė. **Oksidų klasifikacija** *(2 schemos paaiškinimai)*

Oksidas	Oksido apibrėžimas	Pavyzdžiai	Būdingos reakcijos
Normalieji	Oksidai, kuriuose cheminis ryšys jungia deguonies ir kurio nors kito elemento atomus	MgO, SO_3, SiO_2	Žr. rūgštinių ir bazinių oksidų savybes
Peroksidai	Oksidai, kuriuose cheminiai ryšiai jungia du deguonies atomus	Na_2O_2, H_2O_2	Žr. 6 lentelę
Mišrieji	Oksidų, kuriuos sudaro tie patys tik skirtingo oksidacijos laipsnio elementai, mišinys	$Pb_3O_4 = 2PbO \cdot PbO_2$ $Fe_3O_4 = FeO \cdot Fe_2O_3$	Jų savybės tokios pat, kaip ir juos sudarančių oksidų
Rūgštiniai oksidai, arba anhidridai	Oksidai, kurie reaguoja su vandeniu sudarydami rūgštis, su bazėmis ir baziniais oksidais – druskas	SO_3, SO_2, Mn_2O_7	Reaguoja su vandeniu: $SO_2 + H_2O \longrightarrow H_2SO_3$ Reaguoja su bazėmis ir baziniais oksidais: $Mn_2O_7 + 2KOH \longrightarrow 2KMnO_4 + H_2O$
Baziniai	Oksidai, kurie reaguoja su vandeniu sudarydami bazes, su rūgštimis ir rūgštiniais oksidais – druskas	CaO, Na_2O	Reaguoja su vandeniu: $CaO + H_2O \longrightarrow Ca(OH)_2$ Reaguoja su rūgštimis ir rūgštiniais oksidais: $Na_2O + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3$
Amfoteriniai	Oksidai, kurie priklausomai nuo sąlygų gali turėti rūgštinių ar bazinių oksidų savybių	ZnO, Al_2O_3	Reaguoja su rūgštimis: $ZnO + 2HCl \longrightarrow ZnCl_2 + H_2O$ Reaguoja su šarmais: $ZnO + 2NaOH + H_2O \longrightarrow$ $\longrightarrow Na_2[Zn(OH)_4]$
Nesudarantys druskų	Oksidai, kurie nereaguoja nei su rūgštimis, nei su bazėmis ir nesudaro druskų	NO, N_2O	$NO + H_2O \not\longrightarrow N_2O$

4 lentelė. **Oksidų gavimas**

Gavimo būdai	Pavyzdžiai	Pastabos
Vieninių medžiagų reakcija su deguonimi	$S + O_2 \longrightarrow SO_2$ $4Al + 3O_2 \longrightarrow 2Al_2O_3$	Šiuo būdu dažniausiai gaunami nemetalų oksidai

4 lentelė. **Oksidų gavimas**

Gavimo būdai	Pavyzdžiai	Pastabos
Bazių, druskų, rūgščių terminis skilimas	$CaCO_3 \xrightarrow{t} CaO + CO_2\uparrow$ $2H_3BO_3 \xrightarrow{t} B_2O_3 + 3H_2O\uparrow$ $Mg(OH)_2 \xrightarrow{t} MgO + H_2O\uparrow$	Šiuo būdu dažniausiai gaunami metalų oksidai
Vieninių medžiagų ir druskų reakcija su rūgštimis (oksidatoriais)	$C + 4HNO_3(aq) \longrightarrow CO_2\uparrow + 4NO_2\uparrow + 2H_2O$ $Cu + 4HNO_3(konc.) \longrightarrow$ $\longrightarrow Cu(NO_3)_2 + 2NO_2\uparrow + 2H_2O$ $Na_2SO_3 + 2H_2SO_4 \longrightarrow$ $\longrightarrow 2NaHSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$	Šiuo būdu dažniausiai gaunami nemetalų oksidai

VANDENILIO PEROKSIDAS

5 lentelė. **Vandenilio peroksido gavimas**

Cheminė reakcija	Pavyzdys
Bario peroksido reakcija su praskiesta sieros (sulfato) rūgštimi	$BaO_2 + H_2SO_4 \longrightarrow BaSO_4 + H_2O_2$
Peroksosulfato rūgšties reakcija su vandeniu	$H_2S_2O_8 + 2H_2O \longrightarrow 2H_2SO_4 + H_2O_2$
Ozono reakcija su vandeniu	$O_3 + H_2O \longrightarrow H_2O_2 + O_2$
Reakcija, vykstanti vandenį veikiant elektros išlydžiu	$2H_2O \xrightarrow{\text{išlydis}} H_2O_2 + H_2$

6 lentelė. **Vandenilio peroksido cheminės savybės**

Cheminė reakcija	Pavyzdys	Pastabos
Skilimo	$H_2O_2 \longrightarrow H_2O + 1/2O_2$	Grynas H_2O_2 patvarus, tačiau jei yra katalizatorių, priemaišų, taip pat veikiamas ultravioletinės spinduliuotės suskyla
Oksidacijos	$PbS + 4H_2O_2 \longrightarrow PbSO_4 + 4H_2O$	Daugelyje oksidacijos-redukcijos reakcijų H_2O_2 yra oksidatorius, tačiau esant labai stipriems oksidatoriams vandenilio peroksidas gali būti reduktorius
Redukcijos	$2KMnO_4 + 5H_2O_2 + 3H_2SO_4 \longrightarrow$ $\longrightarrow K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 5O_2\uparrow + 8H_2O$	

RŪGŠČIŲ IR BAZIŲ TEORIJOS

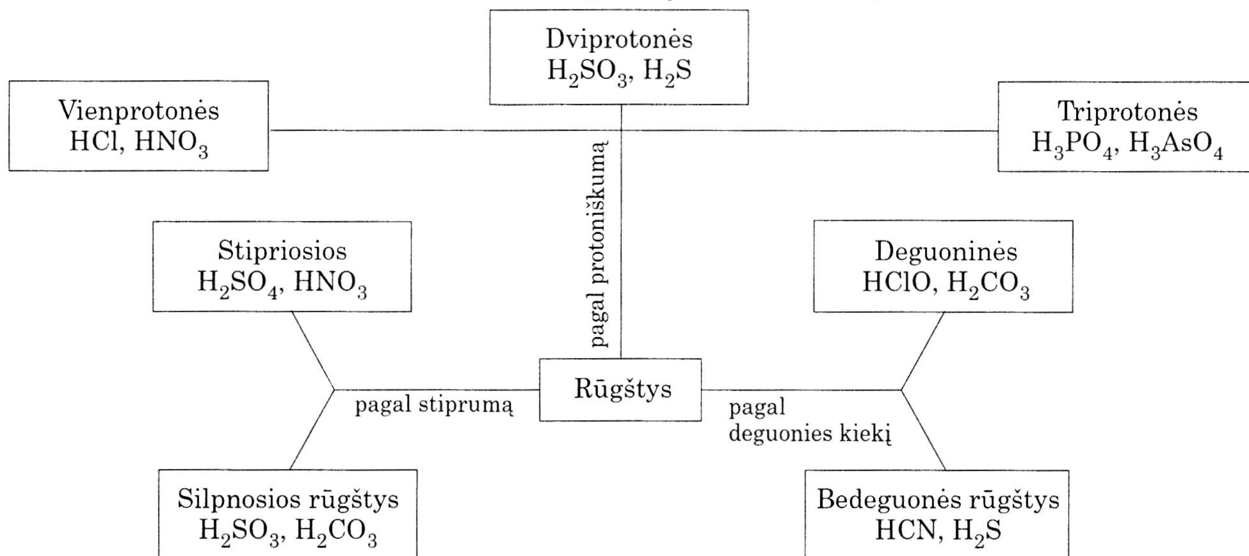
7 lentelė. **Rūgščių ir bazių teorijos**

Teorija	Teorijos esmė	Pavyzdžiai
Arenijaus (Arrhenius) elektrolitinės disociacijos teorija	Rūgštys – tai junginiai, kurie disocijuodami vandenyje sudaro tik H^+ katijonus Bazės – tai junginiai, kuriems disocijuojant vandenyje susidaro tik OH^- jonai	$\underset{\text{rūgštis}}{HCl_{aq}} \rightleftarrows H^+ + Cl^-$ $\underset{\text{bazė}}{NaOH} \rightleftarrows Na + OH^-$
Protolitinė Brionstedo (Brönsted) ir Lorio (Laury) teorija	Rūgštys – tai junginiai, kurie vykstant reakcijai atiduoda protonus (protonų donorai) Bazės – tai junginiai, kurie šioje reakcijoje prisijungia protonus (protonų akceptoriai)	$\underset{\text{rūgštis}}{HCl} + \underset{\text{bazė}}{NH_3} \rightleftarrows \underset{\text{rūgštis}}{NH_4^+} + \underset{\text{bazė}}{Cl^-}$
Solvolizės teorija	Rūgštys – tai junginiai, kurie disocijuodami sudaro tokius pačius katijonus kaip ir disocijuojant tirpikliui Bazės – tai medžiagos, kurioms disocijuojant, susidaro tokie pat anijonai kaip ir disocijuojant tirpikliui	Tirpiklio disociacija: $\underset{\text{skystas}}{2NH_3} \xrightleftharpoons[\text{skystame amoniake}]{} NH_4^+ + NH_2^-$ Neutralizacijos reakcija: $\underset{\text{rūgštis}}{NH_4Cl} + \underset{\text{bazė}}{NaNH_2} \xrightarrow[\text{skystame amoniake}]{}$ $\longrightarrow 2NH_3 + NaCl$
Luiso (Lewis) teorija	Rūgštys – tai jonai ar neutralios molekulės, kurie gali prisijungti vieną ar keletą elektronų porų Bazės – tai jonai ar neutralios molekulės, kurie gali atiduoti elektronų poras	$\underset{\text{bazė}}{\dot{N}H_3} + \underset{\text{rūgštis}}{\overset{\square}{H^+}}$ L $[H_3N\square H]^+$

8 lentelė. **Rūgščių klasifikacija** *(3 schemos paaiškinimai)*

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas
Rūgšties protoningumas	Rūgšties gebėjimas atskelti tam tikrą protonų skaičių. Pavyzdžiui, HCl atskelia Cl^-, H_2SO_4 atskelia SO_4^{2-} ir HSO_4^-
Rūgšties stiprumas	Nusakomas rūgšties disociacijos konstanta. Stiprios rūgštys – tai rūgštys, kurios vandeniniuose tirpaluose visiškai disocijuoja į jonus

3 schema. **Rūgščių klasifikacija**



9 lentelė. **Rūgščių gavimo būdai**

Cheminė reakcija	Pavyzdžiai	Naudojimas
Vieninių medžiagų reakcija su vandeniliu	$Cl_2 + H_2 = 2HCl$	Taip gaunamos tik bedeguonės rūgštys
Vandens reakcija su anhidridais	$N_2O_5 + H_2O = 2HNO_3$	Taip gaunamos tik deguoninės rūgštys
Vieninių medžiagų oksidacija	$3P + 5HNO_3 + 2H_2O = 3H_3PO_4 + 5NO\uparrow$ $Br_2 + 5Cl_2 + 6H_2O = 2HBrO_3 + 10HCl$	–
Druskų reakcija su rūgštimis	NaCl(k.) + $H_2SO_4 = HCl\uparrow + NaHSO_4$	Dažniausiai laboratorijoje naudojamas rūgščių gavimo būdas

10 lentelė. **Rūgščių savybės**

Cheminė reakcija	Pavyzdžiai
1	2
Poveikis indikatoriams	Mėlynas lakmusas nusidažo raudonai, metiloranžinis – rožine spalva, fenolftaleinas lieka bespalvis
Reakcija su metalais, esančiais aktyvumo eilėje kairiau vandenilio	$Mg + 2HCl \longrightarrow MgCl_2 + H_2\uparrow$

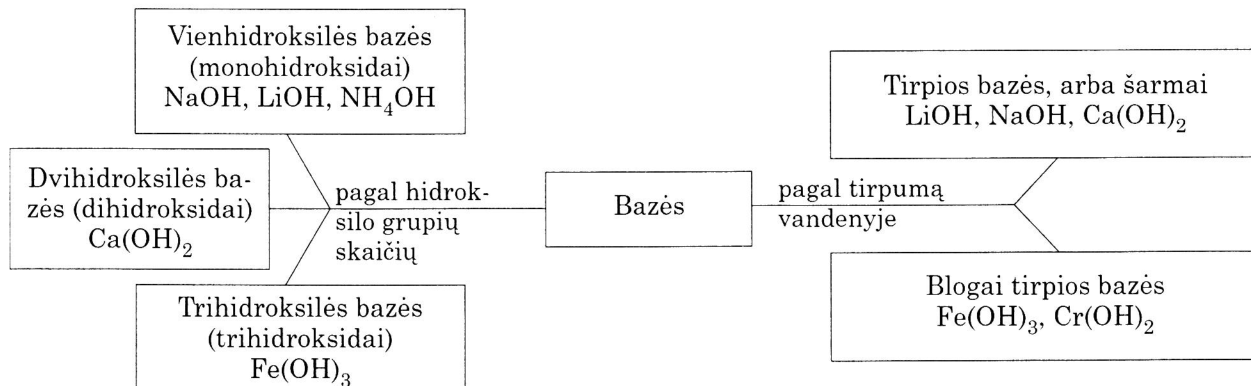
10 lentelė. **Rūgščių savybės**

1	2
Reakcija su bazėmis ir baziniais oksidais	$2KOH + H_2SO_4$(prask.) $= K_2SO_4 + 2H_2O$ $CuO + H_2SO_4 = CuSO_4 + H_2O$
Reakcija su druskomis	$Na_2CO_3 + 2HCl \rightarrow 2NaCl + H_2O + CO_2\uparrow$

11 lentelė. Rūgščių nomenklatūra

Rūgštis	Pavadinimo sudarymo taisyklės	Pavyzdžiai
Bedeguonė rūgštis	Pavadinimas sudaromas iš žodžio „vandenilio“, anijono pavadinimo su priesaga *-idas* kilmininko linksnio ir žodžio „rūgštis“	H_2S – vandenilio sulfido rūgštis HCl – vandenilio chlorido rūgštis (druskos rūgštis)
Deguoninė rūgštis; elementas, nuo kurio priklauso rūgšties pavadinimas, yra aukščiausio oksidacijos laipsnio	Pavadinimas sudaromas iš anijono pavadinimo su priesaga *-atas* kilmininko linksnio; VII grupės elementams dar pridedamas priešdėlis *per-*	$H\overset{+5}{N}O_3$ – nitrato (azoto) rūgštis $H_2\overset{+4}{Si}O_3$ – silikato rūgštis $H\overset{+7}{Cl}O_4$ – perchlorato rūgštis
Deguoninė rūgštis; elementas, nuo kurio priklauso rūgšties pavadinimas, yra žemesnio oksidacijos laipsnio negu grupės numeris	Pavadinimas sudaromas iš anijono pavadinimo su priesaga *-itas* arba *-atas* (VII grupės elementams) kilmininko linksnio ir priešdėlio *hipo-* (žemiausio oksidacijos laipsnio elementams)	$H\overset{+5}{Cl}O_3$ – chlorato rūgštis $H\overset{+3}{Cl}O_2$ – chlorito rūgštis $HClO$ – hipochlorito rūgštis
Elementas, turintis tą patį oksidacijos laipsnį, sudaro keletą deguoninių rūgščių	Prieš mažesnį deguonies atomų skaičių turinčios rūgšties pavadinimą pridedamas priešdėlis *meta-*, prieš didesnį *orto-*	H_2SiO_3 – metasilikato rūgštis H_4SiO_4 – ortosilikato rūgštis

4 schema. Bazių klasifikacija



12 lentelė. **Bazių gavimo būdai**

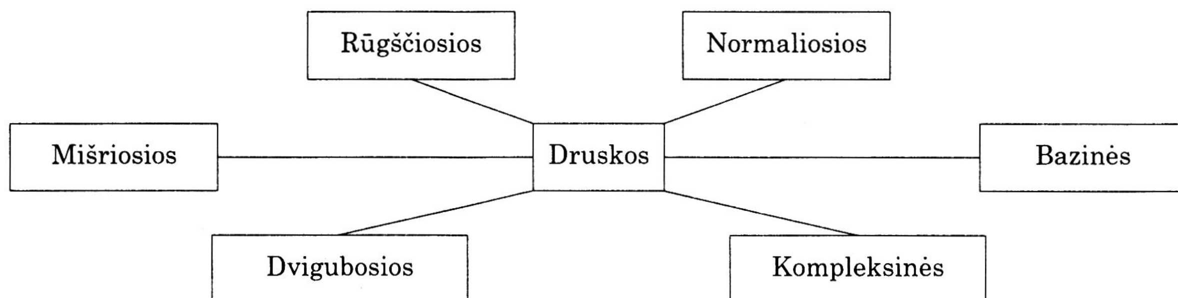
Gavimo būdas	Pavyzdys	Pastabos
Metalų arba jų oksidų reakcija su vandeniu	$2Na + 2H_2O \longrightarrow 2NaOH + H_2\uparrow$ $K_2O + H_2O \longrightarrow 2KOH$	Taip galima gauti tik šarmus
Šarmų reakcija su vandeniniais druskų tirpalais	$FeSO_4 + 2NaOH \longrightarrow$ $\longrightarrow Fe(OH)_2\downarrow + Na_2SO_4$	Taip galima gauti tik netirpias bazes
Druskų tirpalų elektrolizė	$2KCl + 2H_2O \xrightarrow[\text{elektrodai}]{I,\ \text{grafitas}} 2KOH +$ $+ H_2\uparrow + Cl_2\uparrow$	KOH ir NaOH pramoninis gavimo būdas

13 lentelė. **Bazių savybės**

Cheminė reakcija	Pavyzdžiai
Šarmų poveikis indikatoriams	Metiloranžinis nusidažo geltonai, mėlynas lakmusas keičia spalvą į violetinę, fenolftaleinas tampa avietinės spalvos
Bazių reakcija su rūgštimis (neutralizacijos reakcija)	$KOH + HCl \longrightarrow KCl + H_2O$ $Fe(OH)_2 + 2HCl \longrightarrow FeCl_2 + 2H_2O$
Šarmų reakcija su rūgštiniais oksidais	$2NaOH + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O$
Šarmų reakcija su druskų tirpalais	$2KOH + CuSO_4 \longrightarrow Cu(OH)_2\downarrow + K_2SO_4$
Atsparumas kaitrai	Šarmai atsparūs; dauguma bazių (hidroksidų) skyla: $Cu(OH)_2 \xrightarrow{t} CuO + H_2O$

DRUSKOS*

5 schema. **Druskų klasifikacija**



* *Druskos* – tai cheminiai junginiai, kurie vandeniniuose tirpaluose disocijuoja į metalų (arba NH_4^+) katijonus ir rūgšties liekanos anijonus.

14 lentelė. **Druskų klasifikacija** *(5 schemos paaiškinimai)*

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Normaliosios druskos	Junginys, gaunamas visus judriuosius rūgšties protonus (H^+) pakeitus metalų jonais	$BaSO_4$, $CaCO_3$
Rūgščiosios druskos	Junginiai, gaunami ne visus vandenilio atomus pakeitus metalo jonais	$NaHCO_3$, $MgHSO_4$
Bazinės druskos	Druskos, kurių sudėtyje be metalo jonų ir rūgšties liekanos yra hidroksilo jonų	$Al(OH)_2Cl$, $[Ca(OH)]_2CO_3$
Dvigubosios druskos	Druskos, kuriose daugiaprotonės rūgšties vandenilio atomai pakeisti skirtingais metalais	$KNaSO_4$
Mišriosios druskos	Druskos, kuriose yra kelių rūšių katijonų ar anijonų	CaClBr
Kompleksinės druskos	Druskos, turinčios kompleksinių jonų	$[Ag(NH_3)_2]Cl$; $K_4[Fe(CN)_6]$

15 lentelė. **Druskų gavimas**

Cheminė reakcija	Pavyzdys
Rūgščių ir bazių reakcija	$HCl + KOH \longrightarrow KCl + H_2O$
Rūgščių reakcija su baziniais oksidais	$H_2SO_4 + CuO \longrightarrow CuSO_4 + H_2O$
Šarmų reakcija su rūgštiniais oksidais	$2NaOH + SiO_2 \longrightarrow Na_2SiO_3 + H_2O$
Rūgštinių ir šarminių oksidų reakcija	$CO_2 + Na_2O \longrightarrow Na_2CO_3$
Šarmų reakcija su druskomis	$3KOH + FeCl_3 \longrightarrow 3KCl + Fe(OH)_3\downarrow$
Rūgščių reakcija su druskomis	$2HCl + Na_2CO_3 \longrightarrow 2NaCl + CO_2\uparrow + H_2O$
Dviejų druskų reakcija	$Na_2SO_4 + BaCl_2 \longrightarrow BaSO_4\downarrow + 2NaCl$
Skirtingų vieninių medžiagų reakcija	$2K + Cl_2 \longrightarrow 2KCl$
Metalų reakcija su rūgštimis	$2Al + 6HCl \longrightarrow 2AlCl_3 + 3H_2\uparrow$
Metalų reakcija su druskomis	$Fe + CuSO_4 \longrightarrow FeSO_4 + Cu$
Kai kurių deguonies turinčių druskų terminio skilimo reakcija	$2NaNO_3 \xrightarrow{t} 2NaNO_2 + O_2\uparrow$

16 lentelė. **Druskų savybės**

Cheminė reakcija	Pavyzdys
Kas vyksta kaitinant	Dauguma druskų termiškai atsparios. Skyla tik silpnų rūgščių, amonio druskos, o taip pat druskos, sudarytos iš stiprių oksidatorių ir reduktorių $(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t} N_2 + Cr_2O_3 + 4H_2O$; $CaCO_3 \xrightarrow{t} CaO + CO_2$
Reakcija su rūgštimis	$AgNO_3 + HCl \longrightarrow AgCl\downarrow + HNO_3$
Reakcija su šarmais	$CuSO_4 + 2NaOH \longrightarrow Cu(OH)_2\downarrow + 2Na_2SO_4$
Reakcija su metalais	$Zn + Hg(NO_3)_2 \longrightarrow Zn(NO_3)_2 + Hg$
Dviejų druskų reakcija	$CaCl_2 + Na_2CO_3 \longrightarrow CaCO_3\downarrow + 2NaCl$

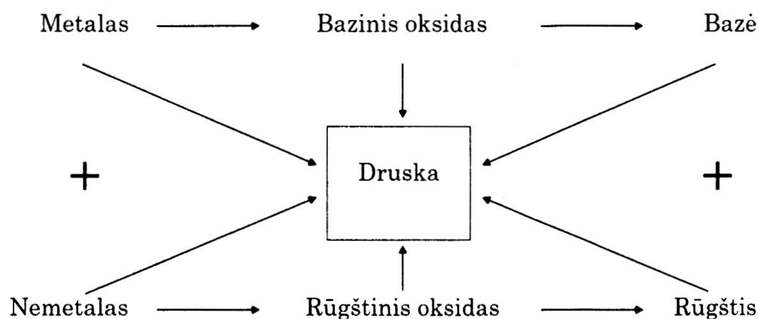
17 lentelė. **Kai kurių rūgščių ir druskų nomenklatūra**

Rūgšties pavadinimas	Rūgšties formulė	Rūgšties liekana	Druskos formulė	Druskos pavadinimas
1	2	3	4	5
Nitrito rūgštis	HNO_2	NO_2^-	KNO_2	Kalio nitritas
Nitrato (azoto) rūgštis	HNO_3	NO_3^-	KNO_3	Kalio nitratas
Vandenilio bromido rūgštis	HBr	Br^-	KBr	Kalio bromidas
Vandenilio jodido rūgštis	HI	I^-	KI	Kalio jodidas
Ortosilikato rūgštis	H_2SiO_3	SiO_3^{2-}	K_2SiO_3	Kalio ortosilikatas
Permanganato rūgštis	$HMnO_4$	MnO_4^-	$KMnO_4$	Kalio permanganatas
Manganato rūgštis	H_2MnO_4	MnO_4^{2-}	K_2MnO_4	Kalio manganatas
Sulfato (sieros) rūgštis	H_2SO_4	SO_4^{2-} HSO_4^-	K_2SO_4 $KHSO_4$	Kalio sulfatas Kalio vandenilio sulfatas
Sulfito rūgštis	H_2SO_3	SO_3^{2-} HSO_3^-	K_2SO_3 $KHSO_3$	Kalio sulfitas Kalio vandenilio sulfitas

17 lentelė. **Kai kurių rūgščių ir druskų nomenklatūra**

1	2	3	4	5
Vandenilio sulfido rūgštis	H_2S	S^{2-} HS^-	K_2S KHS	Kalio sulfidas Kalio vandenilio sulfidas
Kabonato (anglies) rūgštis	H_2CO_3	CO_3^{2-} HCO_3^-	K_2CO_3 $KHCO_3$	Kalio karbonatas Kalio vandenilio karbonatas
Ortofosfato (ortofosforo) rūgštis	H_3PO_4	PO_4^{3-} HPO_4^{2-} $H_2PO_4^-$	K_3PO_4 K_2HPO_4 KH_2PO_4	Kalio ortofosfatas Dikalio vandenilio ortofosfatas Kalio divandenilio ortofosfatas
Metafosfato rūgštis (fosforo metarūgštis)	HPO_3	PO_3^-	KPO_3	Kalio metafosfatas
Hipochlorito rūgštis	$HClO$	ClO^-	$KClO$	Kalio hipochloritas
Chlorito rūgštis	$HClO_2$	ClO_2^-	$KClO_2$	Kalio chloritas
Chlorato rūgštis	$HClO_3$	ClO_3^-	$KClO_3$	Kalio chloratas
Perchlorato rūgštis	$HClO_4$	ClO_4^-	$KClO_4$	Kalio perchloratas
Vandenilio chlorido (druskos) rūgštis	HCl	Cl^-	KCl	Kalio chloridas
Chromato rūgštis	H_2CrO_4	CrO_4^{2-}	K_2CrO_4	Kalio chromatas
Chromito rūgštis	$HCrO_2$	CrO_2^-	$KCrO_2$	Kalio chromitas
Dichromato rūgštis	$H_2Cr_2O_7$	$Cr_2O_7^{2-}$	$K_2Cr_2O_7$	Kalio dichromatas

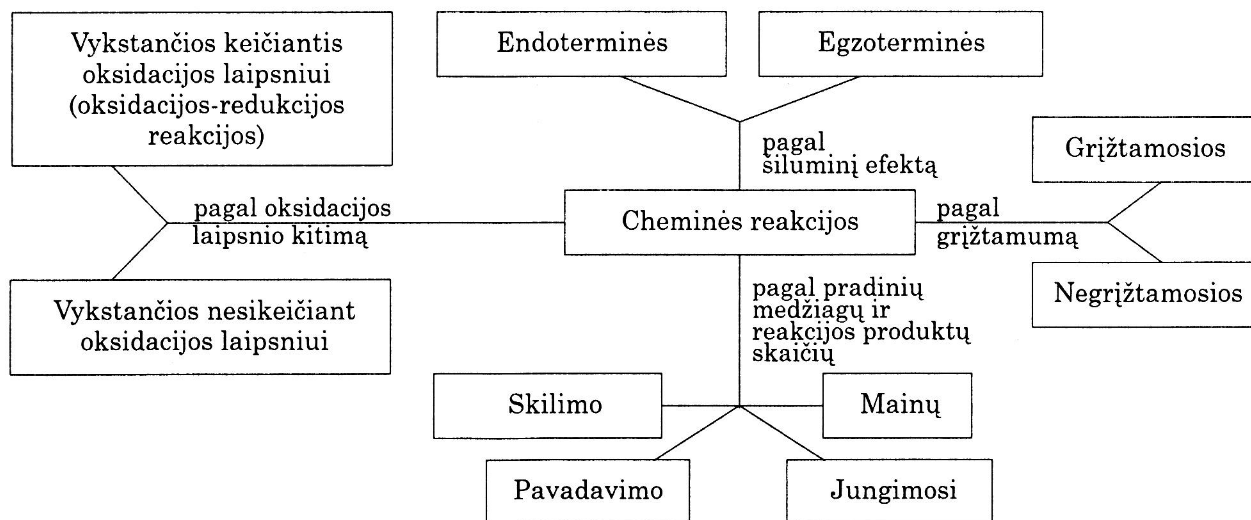
6 schema. **Neorganinių junginių klasių tarpusavio ryšys**



CHEMINĖS REAKCIJOS

CHEMINIŲ REAKCIJŲ KLASIFIKACIJA

7 schema. **Cheminių reakcijų klasifikacija**



18 lentelė. **Cheminių reakcijų skirstymas pagal pradinių medžiagų ir reakcijos produktų skaičių ir sudėtį**

Cheminė reakcija	Reakcijos apibrėžimas	Pavyzdys
Skilimo reakcija	Reakcija, kurios metu iš vienos pradinės medžiagos susidaro kelios naujos medžiagos	$2HgO \xrightarrow{t} 2Hg + O_2$
Pavadavimo reakcija	Reakcija, vykstanti tarp vieninės ir sudėtinės medžiagos, kai vieninės medžiagos atomai pakeičia vieno iš sudėtinės medžiagos elementų atomus	$Fe + CuSO_4 \longrightarrow FeSO_4 + Cu$
Mainų reakcija	Reakcija, kurios metu dvi reaguojančios medžiagos pasikeičia savo sudėtinėmis dalimis ir susidaro dvi naujos medžiagos	$2AgNO_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Ag_2SO_4 + 2HNO_3$
Jungimosi reakcija	Reakcija, kai iš dviejų arba kelių reaguojančių medžiagų susidaro viena nauja medžiaga	$HCl + \underset{\text{dujos}}{NH_3} \longrightarrow NH_4Cl\downarrow$

19 lentelė. **Cheminių reakcijų skirstymas pagal šiluminį efektą**

Cheminė reakcija	Reakcijos apibrėžimas	Pavyzdys
Endoterminė	Reakcija, kurios metu sugeriama šiluma	$N_2 + O_2 = 2NO - 90{,}4$ kJ
Egzoterminė	Reakcija, kurios metu išsiskiria šiluma	$H_2 + Cl_2 = 2HCl + 92{,}3$ kJ

20 lentelė. Cheminių reakcijų skirstymas pagal grįžtamumą

Cheminė reakcija	Reakcijos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Grįžtamoji reakcija	Tai reakcija, kuri esamomis sąlygomis vyksta tuo pačiu metu tiesiogine ir atgaline kryptimi	$3H_2 + N_2 \rightleftharpoons 2NH_3$ $Br_2 + H_2O \rightleftharpoons HBrO + HBr$
Negrįžtamoji reakcija	Tai reakcija, kuri esamomis sąlygomis vyksta iki galo, t. y. kol visos pradinės reaguojančios medžiagos pavirsta reakcijos produktais	$2H_2(d) + O_2(d) = 2H_2O(s)$ $CH_4(d) + 2O_2(d) = CO_2(d) + 2H_2O(s)$

21 lentelė. Reakcijų negrįžtamumo požymiai

Požymis	Pavyzdžiai
Vykstant cheminei reakcijai išsiskiria didelis šilumos kiekis	$2Mg + O_2 \longrightarrow 2MgO + Q$
Bent vienas reakcijos produktas iškrinta į nuosėdas arba išsiskiria dujų pavidalu	$CaCl_2 + Na_2SO_3 \longrightarrow CaSO_3\downarrow + 2NaCl$ $CaCO_3 \xrightarrow{t} CaO + CO_2\uparrow$
Reakcijos metu susidaro mažai disocijuojančios medžiagos	$(CH_3COO)NH_4 + H_2O \longrightarrow$ $\longrightarrow CH_3COOH + NH_4OH$ $HCl + NaOH \longrightarrow NaCl + H_2O$

22 lentelė. Cheminių reakcijų skirstymas pagal oksidacijos laipsnio kitimą

Cheminė reakcija	Reakcijos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Reakcija, vykstanti keičiantis atomų oksidacijos laipsniui	Tai reakcija, kurios metu elektronai pereina iš vienų atomų, molekulių ar jonų į kitus	$H_2\overset{-2}{S} + \overset{0}{O}_2 \longrightarrow \overset{0}{S} + H_2\overset{-2}{O}$ $2K\overset{-1}{I} + \overset{0}{Cl}_2 \longrightarrow 2K\overset{-1}{Cl} + \overset{0}{I}_2$
Reakcija, vykstanti nesikeičiant oksidacijos laipsniui	Reakcija, kuriai įvykus kiekvieno atomo oksidacijos laipsnis lieka nepakitęs	$2AlCl_3 + 3Na_2S + 6H_2O \longrightarrow$ $\longrightarrow 2Al(OH)_3\downarrow + 3H_2S\uparrow + 6NaCl$ $H_2SO_4 + NaOH \longrightarrow NaHSO_4 + H_2O$

23 lentelė. Oksidacijos-redukcijos reakcijos

Cheminė reakcija	Reakcijos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Tarpmolekulinė	Reakcija vyksta keičiantis skirtingų molekulių atomų oksidacijos laipsniui; tai reakcija tarp oksidatoriaus ir reduktoriaus	$2H_2\overset{-2}{S} + H_2\overset{+4}{S}O_3 \longrightarrow 3\overset{0}{S} + 3H_2O$ $2Na_2\overset{+2}{S}_2O_3 + H_2\overset{-1}{O}_2 \longrightarrow Na_2\overset{+2,5}{S}_4O_6 + 2Na\overset{-2}{O}H$

23 lentelė. **Oksidacijos-redukcijos reakcijos**

Cheminė reakcija	Reakcijos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Vidinė (intramolekulinė)	Reakcija vyksta keičiantis tos pačios molekulės įvairių atomų oksidacijos laipsniui	$(\overset{-3}{N}H_4)_2\overset{+6}{Cr}_2O_7 \xrightarrow{t} \overset{0}{N}_2\uparrow + \overset{+3}{Cr}_2O_3 + 4H_2O$ $2K\overset{+5}{Cl}\overset{-2}{O}_3 \xrightarrow{t} 2K\overset{-1}{Cl} + 3\overset{0}{O}_2\uparrow$
Disproporcionavimo	Reakcija vyksta didėjant ar mažėjant tuo pačiu metu ir to paties elemento atomų oksidacijos laipsniui	$3Na\overset{+1}{Cl}O \longrightarrow Na\overset{+5}{Cl}O_3 + 2Na\overset{-1}{Cl}$ $3H\overset{+3}{N}O_2 \longrightarrow H\overset{+5}{N}O_3 + 2\overset{+2}{N}O\uparrow + H_2O$ $2\overset{+5}{U}F_5 \longrightarrow \overset{+4}{U}F_4 + \overset{+6}{U}F_6$

TERMOCHEMIJA*

24 lentelė. **Pagrindinės termochemijos sąvokos ir dėsniai**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas
Cheminės reakcijos šiluminis efektas	Šilumos kiekis, kurį cheminė sistema išskiria ar sugeria vykstant joje cheminei reakcijai. Šiluminis efektas žymimas simboliu Q arba ΔH ($Q = -\Delta H$)
Termocheminė lygtis	Reakcijos lygtis, kurioje nurodytas šiluminis reakcijos efektas
Susidarymo šiluma (ΔH°_{susid})	Šilumos kiekis, išsiskiriantis arba sugeriamas susidarant vienam moliui medžiagos iš standartinės būsenos vieninių medžiagų. Standartinės būsenos vieninės medžiagos susidarymo šiluma laikoma lygi 0
Standartinė būsena	Medžiagos būsena, kai slėgis 1 atm (101 kPa). Vieninių medžiagų standartine būsena laikoma jos patvariausia alotropinė atmaina (angliai – grafitas, deguoniui – O_2)
Heso (Hess) dėsnis	Cheminės reakcijos šiluminis efektas priklauso tik nuo reaguojančių medžiagų ir reakcijos produktų būsenos ir nepriklauso nuo to, kokiu būdu gaunami reakcijos produktai
Heso dėsnio išvada	Cheminės reakcijos šiluminis efektas lygus produktų susidarymo šilumų sumos ir pradinių medžiagų susidarymo šilumų sumos skirtumui; būtina atsižvelgti į stechiometrinius koeficientus $aA + bB \longrightarrow cC + dD$ $\Delta H^\circ = c\Delta H^\circ_{susid}C + d\Delta H^\circ_{susid}D - (a\Delta H^\circ_{susid}A + b\Delta H^\circ_{susid}B)$

* *Termochemija* – chemijos šaka, tirianti cheminių reakcijų šiluminius efektus.

CHEMINĖ KINETIKA*

25 lentelė. **Pagrindinės cheminės kinetikos sąvokos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas
Cheminės reakcijos greitis	Vienõs iš reaguojančių medžiagų koncentracijos pakitimas per laiko vienetą
Elementarioji reakcijos stadija	Reakcija, kuri vyksta betarpiškai susidūrus molekulėms arba joms skylant
Cheminių reakcijų mechanizmas	Elementariųjų stadijų visuma (nustatoma eksperimento būdu)
Aktyvacijos energija	Energija, kurią reikia suteikti molekulėms, kad jos galėtų dalyvauti cheminėje reakcijoje
Katalizatorius	Medžiaga, keičianti cheminės reakcijos greitį, bet pati chemiškai nekintanti
Katalizinė reakcija	Reakcija, vykstanti esant katalizatoriui
Reakcijos greičio konstanta	Cheminės reakcijos greitis, kai visų reaguojančių medžiagų koncentracijos lygios vienetui
Homogeninė katalizė	Katalizė, kai reaguojančių medžiagų ir katalizatoriaus fazė yra tokia pati
Heterogeninė katalizė	Katalizė, kai reaguojančios medžiagos ir katalizatorius yra skirtingų fazių
Inhibitorius	Medžiaga, stabdanti reakciją
Promotorius	Medžiaga, didinanti katalizatoriaus aktyvumą ir atrankumą
Fermentai	Biokatalizatoriai – baltymai, kuriems dalyvaujant vyksta sudėtingi cheminiai procesai augaluose ir gyvūnų organizmuose
Cheminė pusiausvyra	Tokia reaguojančių medžiagų būsena, kurios metu tiesioginė ir atvirkštinė reakcija vyksta vienodu greičiu (žr. 26 lentelę)

26 lentelė. **Pagrindiniai cheminės kinetikos dėsningumai**

Dėsningumas	Formuluotė	Matematinė išraiška
Veikiančiųjų masių dėsnis (pagrindinis cheminės kinetikos dėsnis)	Cheminės reakcijos greitis proporcingas reaguojančių medžiagų koncentracijų sandaugai	Reakcijos $A + B \longrightarrow C + D$ greitis $v = k \cdot C_A \cdot C_B$, čia k – reakcijos greičio konstanta, C_A, C_B – A ir B medžiagų koncentracijos

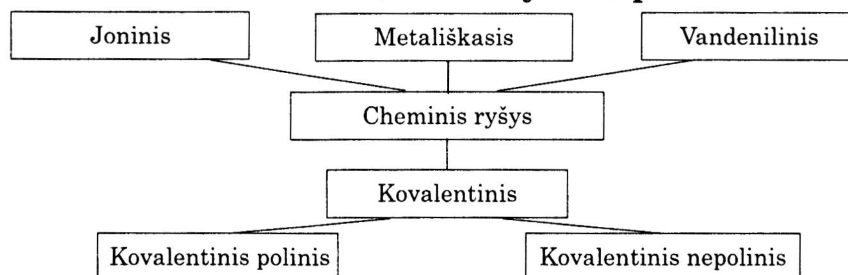
* *Cheminė kinetika* – tai mokslas, tiriantis cheminių reakcijų greitį.

26 lentelė. **Pagrindiniai cheminės kinetikos dėsningumai**

Dėsningumai	Formuluotė	Matematinė išraiška
Arenijaus lygtis	Cheminės reakcijos greitį ir temperatūrą sieja eksponentinė priklausomybė	$k = A \cdot e^{-E_a/RT}$ arba $\lg k = \lg A - E_a/2{,}303\ RT$, čia k – reakcijos greičio konstanta, A – Arenijaus konstanta (apibūdinanti kiekvieną konkrečią reakciją), E_a – aktyvacijos energija, R – universalioji (molinė) dujų konstanta, T – temperatūra
van't Hofo (van't Hoff) taisyklė	Pakėlus temperatūrą 10 °C, daugelio reakcijų greitis padidėja 2–4 kartus	$v_{T_2} = v_{T_1}\gamma^{\frac{T_2 - T_1}{10}}$, čia v_{T_2}, v_{T_1} – reakcijų greičiai T_2 ir T_1 temperatūtoje, γ – reakcijos greičio temperatūrinis koeficientas, rodantis, kiek kartų padidės reakcijos greitis pakėlus temperatūra 10 °C
Le Šateljė (Le Chatelier) principas (atoveiksmio principas)	Jei pusiausvirąją sistemą veikia išorinis veiksnys, tai nuo jo priklauso tik ta iš dviejų priešingų reakcijų, kuri susilpnina (sumažina) šį poveikį. Katalizatoriai vienodai greitina ir tiesioginę, ir atvirkštinę reakciją; nuo jų pusiausvyra nepriklauso	
Pavyzdžiai: 1) pakėlus temperatūrą, pusiausvyra pasistūmėja taip, kad vyktų endoterminė reakcija, temperatūrai sumažėjus – kad vyktų egzoterminė reakcija; 2) padidėjus slėgiui, pusiausvyra pasislenka taip, kad tūris sumažėtų, o sumažėjus slėgiui – kad tūris padidėtų; 3) produktų pašalinimas iš reakcijos terpės pastumia pusiausvyrą taip, kad vyktų tiesioginė reakcija		

MOLEKULIŲ STRUKTŪRA IR CHEMINIS RYŠYS

8 schema. **Cheminio ryšio tipai**



27 lentelė. **Atomo savybės ir cheminiai ryšiai**

Savybė	Savybės apibūdinimas	Pastabos
Atomo dydis	Kintamos vertės dydis, priklausantis nuo junginio, kurį sudaro elementas, tipo	Metalinį Na sudarančio Na atomo spindulys lygus 0,190 nm, o NaCl – 0,095 nm
Elektrinis neigiamumas	Atomo savybė molekulėje prisitraukti kitų atomų elektronus	Elektrinio neigiamumo *(X)* matu laikoma energija, kuri lygi atomų jonizacijos *(I)* ir elektroninio giminingumo *(E)* energijų sumai $X = I + E$
Elektroninis giminingumas	Gebėjimo prisijungti elektroną matas – energijos pokytis, atsirandantis, kai iš 1 molio atomų susidaro vienakrūvio anijono vienas molis	$Cl(d) + e^- \longrightarrow Cl^-(d)$ $E = -364$ kJ/mol Elektroniniu giminingumu apibūdinami dujinės būsenos medžiagos atomai ir jonai
Jonizacijos energija	Energija, kurios reikia atimti iš atomo silpniausiai surištą elektroną	$Na(d) \longrightarrow Na^+(d) + e^-$ $I = +495$ kJ/mol Jonizacijos energija apibūdina medžiagos, esančios dujinėje būsenoje, atomus ir jonus
Valentingumas	Elemento atomų savybė prisijungti arba pakeisti junginiuose tam tikrą kito elemento atomų skaičių	Kovalentiniuose junginiuose valentingumas lygus ryšių skaičiui, joniniuose – jonų krūviui
Oksidacijos laipsnis	Tariamasis atomo krūvis molekulėje, apskaičiuotas tarus, kad visi cheminiai ryšiai yra joniniai	Žr. 28 lentelę
Cheminio ryšio energija	Energija, kurios reikia nutraukti cheminiam ryšiui	Žr. 9 schemą

28 lentelė. **Oksidacijos laipsnio nustatymas**

Taisyklė	Pavyzdžiai
Elemento oksidacijos laipsnis vieninėje medžiagoje lygus nuliui	$\overset{0}{S}_8$; $\overset{0}{O}_2$
Didžiausias teigiamas oksidacijos laipsnis lygus grupės numeriui (išskyrus $\overset{+2}{Cu}$; $\overset{+3}{Au}$)	$\overset{+3}{Al}\overset{-1}{Cl}_3$ (Al : III grupė); $\overset{+1}{K}\overset{+7}{Mn}\overset{-2}{O}_7$ (Mn : VII grupė)

28 lentelė. **Oksidacijos laipsnio nustatymas**

Taisyklė	Pavyzdžiai
Mažiausias oksidacijos laipsnis lygus skaičiui, gautam iš grupės numerio atėmus aštuonis	$\overset{+1}{Na}\overset{-1}{Cl}$ (Cl : VII grupė); $\overset{+1}{Na_2}\overset{-2}{S}$ (S : VI grupė)
Oksidacijos laipsnių suma molekulėje (jone) lygi 0 (jono krūviui)	$[\overset{+6}{Cr}\overset{-2}{O_4}]^{2-}$ $(-2 \cdot 4 + 6 = -2)$; $\overset{+4}{S}\overset{-2}{O}\overset{-1}{Cl_2}$ $(4 - 2 - 1 \cdot 2 = 0)$

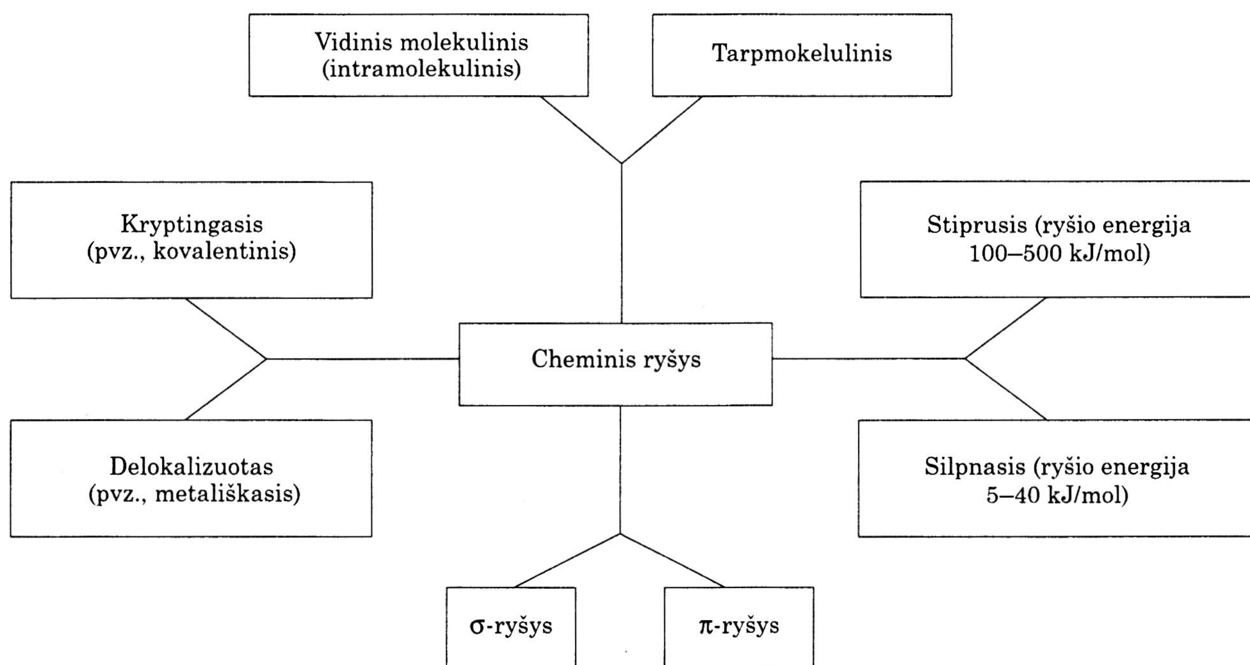
29 lentelė. **Cheminio ryšio tipai**

Ryšys	Apibūdinimas	Ryšio susidarymo schema	Junginių pavyzdžiai
1	2	3	4
Kovalentinis	Ryšį sudaro bendros elektronų poros	Žr. 30 lentelę	
Kovalentinis nepolinis	Ryšio elektronų debesis išsidėstęs erdvėje simetriškai abiejų atomų atžvilgiu	:Cl· + ·Cl: ⟶ ⟶ :Cl:Cl:	O_2, CO, N_2
Kovalentinis polinis (+ −)	Ryšio elektronų debesis pasislinkęs į elektriškai neigiamesnio atomo pusę	H· + ·Cl: ⟶ ⟶ H:Cl:	H_2O, HF, N_2O_5
Joninis ⊕⊖	Ryšys atsiranda dėl elektrostatinės traukos tarp priešjonių	Na· + ·Cl: ⟶ ⟶ Na:Cl: ⟶ ⟶ $[Na]^+[Cl]^-$	LiF, BeF_2, $CaCl_2$
Metališkasis (e^- ⊕)	Ryšys tarp teigiamųjų jonų, atsirandantis dėl suporuotų elektronų	Dėl mažos jonizacijos energijos elektronai metale netenka ryšio su atskirais atomais ir sudaro elektronų debesį	Visi metalai
Vandenilinis (H^+ − ··· H^+ −)	Tarpmolekulinis ryšys tarp vandenilio atomo ir elektriškai neigiamesnio elemento	H:O:H; $H^{\delta+}$, $H^{\delta+}$, $O^{\delta-}$, $O^{\delta-}$, $H^{\delta+}$, $H^{\delta+}$	$(CH_3COOH)_2$, $(HF)_2$

29 lentelė. **Cheminio ryšio tipai**

1	2	3	4
Van der Valso ryšys	Tarpmolekulinis ryšys, atsirandantis dėl molekulių, turinčių pastovų ar indukuotą dipolį, sąveikos	$O^{\delta-}$, $S^{\delta+}$, $O^{\delta-}$ ··· $S^{\delta+}{=}O^{\delta-}$, $O^{\delta-}$	C_6H_5Cl, PCl_3

9 schema. Cheminio ryšio skirstymas pagal jo savybes



30 lentelė. **Kovalentinio ryšio susidarymas**

Mechanizmas	Apibrėžimas	Pavyzdys
Bendros elektronų poros susidarymas	Kiekvienas atomas atiduoda po vieną elektroną į bendrą elektronų porą	$:\ddot{Br}\cdot + \cdot\ddot{Br}: \longrightarrow :\ddot{Br}:\ddot{Br}:$
Donorinis-akceptorinis	Vienas atomas (donoras) atiduoda „bendram naudojimui“ elektronų porą, o kitas atomas (akceptorius) – laisvą orbitalę	$H_3N: + \square H^+ \longrightarrow [H_3N{\square}H]^+$

31 lentelė. **Kovalentinio ryšio tipai**

Ryšys	Ryšio apibrėžimas	Pavyzdys
σ-ryšys	Ryšys, susidarantis iš dalies susiklojus atomų orbitalėms, esančioms tuos atomus jungiančioje tiesėje	H_3C-CH_3
π-ryšys	Ryšys, susidarantis susiklojus atomų orbitalėms, esančioms šalia tuos atomus jungiančios tiesės	$H_2C=CH_2$

32 lentelė. **Atomų orbitalių hibridizacija***

Tipas	Apibrėžimas	Molekulės forma	Valentinis kampas	Pavyzdys
sp	Iš vienos *s* orbitalės ir vienos *p* orbitalės susidaro dvi vienodos orbitalės	Linijinė	180°	$HC\equiv CH$
sp^2	Iš vienos *s* orbitalės ir dviejų *p* orbitalių susidaro trys vienodos orbitalės	Plokščia trigoninė	120°	$H_2C=CH_2$
sp^3	Iš vienos *s* orbitalės ir trijų *p* orbitalių susidaro keturios vienodos orbitalės	Tetragoninė	109,5°	H_3C-CH_3

33 lentelė. **Elektroniniai efektai**

Efektas	Efekto apibrėžimas	Pastabos
1	2	3
Indukcijos efektas	Elektronų tankio poslinkis nuo vieno atomo prie kito dėl poliarizacijos	$CH_3 \rightarrow CH_2-$ pirminis; $(CH_3)_2 \rightarrow CH-$ antrinis; $(CH_3)_3 \rightarrow C-$ tretinis

* *Hibridizacija* – kai kurių orbitalių formos pakitimas susidarant kovalentiniam ryšiui, kad jos geriau susiklotų.

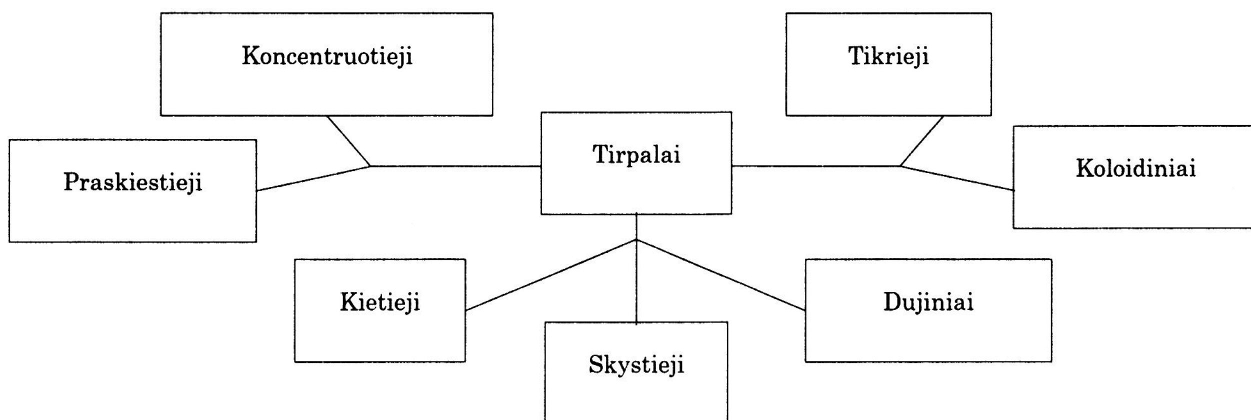
33 lentelė. **Elektroniniai efektai**

1	2	3
Mezomerijos efektas	π elektronų persiskirstymas molekulėje; dėl to molekulė (kai kurie radikalai ir karbonio jonai) tampa patvaresni. Efektas ypač svarbus konjuguotoms sistemoms, t. y. molekulėms, kuriose viengubuoju ryšiu perskirti molekulės dvigubieji ryšiai, arba junginiams, turintiems CO grupę	$H_2C{=}CH{-}CH{=}CH_2 \rightleftarrows {}^{+}H_2C{-}CH{=}CH{-}CH_2^{-}$ (rezonansinis hibridas – šių dviejų struktūrų nepusiausvirasis mišinys)

TIRPALAI. ELEKTROCHEMIJA

TIRPALAI IR TIRPUMAS

10 schema. **Tirpalų klasifikacija**



34 lentelė. **Pagrindinės tirpalų sąvokos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas	Matematinė išraiška
Tirpalas	Vienalytė sistema, sudaryta iš dviejų ar daugiau komponentų (sudedamųjų dalių) ir jų sąveikos produktų	—
Tikrasis tirpalas	Tirpalas, sudarytas iš molekulės dydžio dalelių (~10 Å, arba 10^{-10}m)	—
Tirpumas	Medžiagos savybė tirpti vandenyje ar kitame tirpiklyje	—
Tirpumo koeficientas	Medžiagos masė, kuri gali ištirpti 100 g tirpiklio	—

34 lentelė. **Pagrindinės tirpalų sąvokos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas	Matematinė išraiška
Sotusis tirpalas	Tirpalas, esantis termodinaminėje pusiausvyroje su tirpiniu; sočiajame tirpale negali daugiau ištirpti medžiagos	—
Kristalizacija	Medžiagos išsiskyrimas iš tirpalo pažeminus temperatūrą arba padidinus tirpalo koncentraciją	—
Tirpinio molinė dalis	Bedimensis dydis, lygus tirpinio molių ir visų tirpale esančių medžiagų molių sumos santykiui	$x_i = n_i/\Sigma n_i$
Tirpinio masės dalis	Bedimensis dydis, lygus tirpinio masės ir visos tirpalo masės santykiui	$w_i = m_i/m_{\text{tirpalo}}$
Molinė koncentracija	Fizikinis dydis, lygus medžiagos komponento kiekio ir tirpalo tūrio santykiui	$c_i = n_i/V_{\text{tirpalo}}$

35 lentelė. **Tirpimas ir kristalizacija**

Sąvoka	Sąvokos apibūdinimas	Pavyzdžiai
Solvatai	Junginiai, susidarantys sąveikaujant tirpiniui su tirpikliu	Oksonio jonas H_3O^+
Kristalhidračiai (druskų hidratai)	Medžiagos, turinčios vandens molekulių	$CuSO_4 \cdot 5H_2O$; $CaCl_2 \cdot 6H_2O$
Kristalinė gardelė	Periodiškai išsidėstę atomai kristale	—
Atominė gardelė	Gardelės mazguose yra atomai, susijungę kovalentiniais ryšiais	Deimantas, silicis
Molekulinė gardelė	Gardelės mazguose yra molekulės, susijungusios van der Valso ryšiais	Chloras, jodas
Joninė gardelė	Gardelės mazguose yra jonai (katijonai ir anijonai)	NaCl, $KMnO_4$
Metalinė gardelė	Sudaryta iš metalų teigiamųjų jonų, sujungtų metališkuoju ryšiu	Visi metalai

36 lentelė. **Dispersinės sistemos**

Sąvoka	Sąvokos apibūdinimas
Dispersinė sistema	Sistema, kurios komponentai vienodai pasklidę vienas kitame
Dispersinė fazė	Disperguotos medžiagos dalelės, tolygiai pasklidusios vienalytėje terpėje
Dispersinė terpė	Vienalytė medžiaga, kurioje pasklidusi dispersinė fazė
Suspensija	Dispersinė sistema, kurios dispersinė fazė yra kietoji medžiaga, o dispersinė terpė – skystis, be to, kietoji medžiaga netirpsta šiame skystyje
Emulsija	Dispersinė sistema, kurios dispersinė fazė ir dispersinė terpė yra nemaišūs skysčiai
Koloidinis tirpalas	Nevienalytė sistema, susidedanti iš dviejų labai didelio paviršiaus fazių. Koloidinių dalelių dydis mažesnis negu dispersinės fazės suspensijose, bet didesnis negu tikruosiuose tirpaluose
Tindalio (Tyndall) reiškinys	Koloidinių tirpalų gebėjimas sklaidyti šviesą. Tuo koloidiniai tirpalai skiriasi nuo tikrųjų tirpalų

37 lentelė. **Dispersinių sistemų pavyzdžiai**

Dispersinė sistema	Dispersinė terpė	Dispersinė fazė
Rūkas	Oras	Vanduo
Dūmai	Oras	Suodžių dalelės
Pienas	Vanduo	Riebalai
Sviestas	Riebalai	Vanduo
Kalkių vanduo	Vanduo	Kalkių dalelės

ELEKTROLITINĖ DISOCIACIJA

38 lentelė. **Pagrindinės elektrolitinės disociacijos sąvokos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Neelektrolitai	Medžiagos, kurių tirpalai arba lydalai nelaidūs elektros srovei	Daugiausia organiniai junginiai – celiuliozė, metanas

38 lentelė. **Pagrindinės elektrolitinės disociacijos sąvokos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas	Pavyzdžiai
Elektrolitai	Medžiagos, kurių tirpalai ir lydalai laidūs elektros srovei	Neorganinės ir organinės rūgštys, druskos, bazės — KBr, CH_3COOH, NaOH
Elektrolitinė disociacija	Elektrolitų skaidymasis į jonus jiems tirpstant vandenyje	$NaCl \xrightarrow{aq} Na^+ + Cl^-$ $HNO_3 \rightleftharpoons H^+ + NO_3^-$

39 lentelė. **Arenijaus elektrolitinės disociacijos teorija**

Teorijos teiginiai	Pavyzdys
1. Tirpstant elektrolitams vandenyje jie skyla (disocijuoja) į jonus, turinčius teigiamą ir neigiamą krūvį	NaOH teigiamas Na^+ neigiamas OH^- H_2SO_4 teigiamas H^+ neigiamas SO_4^{2-}; HSO_4^-
2. Jonai, veikiami elektros srovės, juda: teigiamo krūvio jonai katodo link, neigiamo krūvio jonai anodo link	Katijonas Anijonas NaOH Na^+ OH^- H_2SO_4 H^+ SO_4^{2-}, HSO_4^-
3. Disociacija – grįžtamasis reiškinys: t. y. vienu metu molekulės skyla į jonus (disocijuoja) ir jonai jungiasi į molekules	$NaOH \rightleftharpoons Na^+ + OH^-$ $H_2SO_4 \rightleftharpoons H^+ + HSO_4^-$ $HSO_4^- \rightleftharpoons H^+ + SO_4^{2-}$

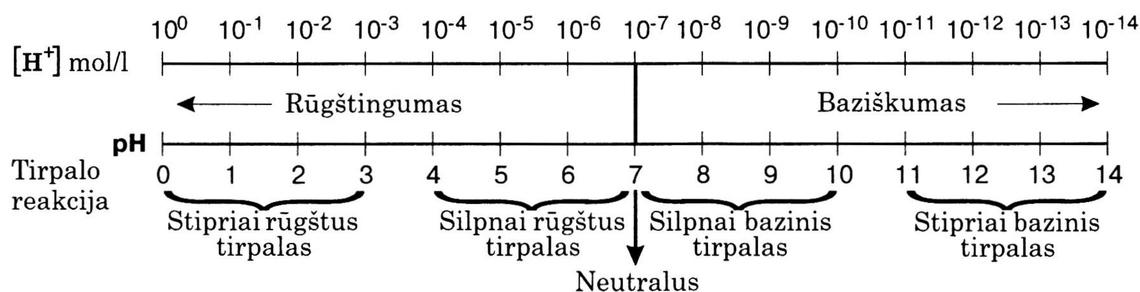
40 lentelė. **Elektrolitinės disociacijos kiekybinės charakteristikos**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas	Matematinė išraiška
1	2	3
Disociacijos laipsnis (α)	Suskilusių į jonus *(n')* ir visų ištirpusių molekulių *(n)* skaičiaus santykis	$\alpha = \frac{n'}{n}$ $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$
Stiprusis elektrolitas	Elektrolitas, kuris praktiškai visiškai disocijavęs į jonus: 1) beveik visos druskos; 2) šarmai; 3) stipriosios neorganinės rūgštys	$\alpha > 0{,}3$

40 lentelė. **Elektrolitinės disociacijos kiekybinės charakteristikos**

1	2	3
Silpnasis elektrolitas	Elektrolitas, tik iš dalies disocijuojantis į jonus: 1) beveik visos organinės rūgštys; 2) kai kurios neorganinės rūgštys; 3) dauguma metalų bazių (išskyrus šarminių ir šarminių žemių metalų), NH_4OH; 4) vanduo	$\alpha < 0{,}3$
Disociacijos konstanta	Pusiausvyros konstanta, apibūdinanti elektrolitinę disociaciją	Rūgštims $HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$ $K_r = \frac{[H^+] \cdot [A^-]}{[HA]}$ Bazėms $BOH \rightleftharpoons B^+ + OH^-$ $K_b = \frac{[B^+] \cdot [OH^-]}{[BOH]}$ indeksas *r* arba *b* rodo, kokia disociacija – rūgštinė ar bazinė
Ostvaldo (Ostwald) praskiedimo dėsnis	Rodo ryšį tarp disociacijos konstantos ir disociacijos laipsnio	$K = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \cdot C$, čia *C* – molinė koncentracija
Joninė vandens sandauga (K_w)	Vandens disociacijos konstanta	$H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$ $K_w = \frac{[H^+] \cdot [OH^P]}{[H_2O]} \approx [H^+] \cdot [OH^-]$, kadangi $[H_2O] >> [H^+], [OH^-]$
Vandenilio jonų rodiklis (pH)	Dydis, nusakantis vandenilio jonų koncentraciją ir terpės rūgštingumą	$pH = -lg[H^+]$

11 schema. **Priklausomybė tarp pusiausvirosios vandenilio jonų koncentracijos ir pH**



41 lentelė. **Veiksniai, nuo kurių priklauso disociacijos laipsnis**

Veiksnys	Poveikis	Pavyzdys
Tirpiklio prigimtis	Kuo didesnė tirpiklio dielektrinė skvarba (ε), tuo labiau disocijuoja ištirpusios medžiagos	$\varepsilon_{vandens} = 80{,}4$ $\varepsilon_{benzeno} = 2{,}3$ HCl praktiškai visiškai disocijuoja vandenyje ir nedisocijuoja benzene
Ištirpusios medžiagos prigimtis	Žr. 40 lentelę	—
Temperatūra	Kadangi elektrolitinė disociacija yra pusiausviroji cheminė reakcija, jos greitis ir cheminė pusiausvyra priklauso nuo temperatūros	Vandens disociacijos laipsnis, padidėjus temperatūrai iki 200 °C, didėja, po to staigiai mažėja
Tirpalo koncentracija	Kaip seka iš Le Šateljė principo, disociacijos laipsnis mažėja didėjant koncentracijai ir atvirkščiai	Labai praskiestuose tirpaluose H_2S (silpnas elektrolitas) disocijuoja visiškai
Vienodų jonų buvimas	Pridėjus į sistemą tokių pat jonų, pagal Le Šateljė principą disociacijos laipsnis sumažėja	$CH_3COOH \rightleftharpoons CH_3COO^- + H^+$ Pridėjus į sistemą natrio acetato ar druskos rūgšties, pusiausvyra pasistumia į kairę

ELEKTROCHEMIJOS PAGRINDAI*

42 lentelė. **Pagrindinės elektrochemijos sąvokos ir dėsniai**

Sąvoka	Sąvokos apibrėžimas
1	2
Galvaninis elementas (cheminis elektros srovės šaltinis)	Įrenginys, kuriame oksidacijos-redukcijos reakcijų cheminė energija virsta elektros energija. Susideda iš dviejų skirtingų metalų, tarp kurių yra elektrolitas
Standartinis elektrodo potencialas	Dydis, rodentis gebėjimą redukuotis: $X^{n+} + ne^- \rightarrow X^0$. Dalinės reakcijos $2H^+ + 2e^-$ L H_2^0 standartinis elektrodo potencialas laikomas lygus 0

* *Elektrochemija* – mokslas, tiriantis procesus, vykstančius pernešant elektroną per fazių skiriamąjį paviršių.

42 lentelė. **Pagrindinės elektrochemijos sąvokos ir dėsniai**

1	2
Metalų elektrocheminė įtampų eilė (metalų aktyvumo eilė)	Metalų eilė, kurioje jie išdėstyti standartinio elektrodo potencialo algebrinių verčių didėjimo seka: Li, K, Ba, Sr, Ca, Na, Mg, Al, Mn, Zn, Cr, Fe, Cd, Co, Ni, Sn, Pb, (H), Cu, Hg, Ag, Pd, Pt, Au
Elektrolizė	Oksidacijos-redukcijos reakcijų, kurios vyksta ant elektrodų elektrolitų tirpaluose ar lydaluose leidžiant per juos elektros srovę, visuma
Faradėjaus (Faraday) konstanta	Vieno molio elektronų krūvis
Pirmasis Faradėjaus dėsnis	Junginio, susidariusio ant elektrodų, masė tiesiog proporcinga pro tirpalą pratekėjusios srovės kiekiui
Antrasis Faradėjaus dėsnis	Elektros krūvis, pratekėjęs pro elektrolitą, išskiria medžiagos kiekį, proporcingą jos cheminiam ekvivalentui
Pirmojo ir antrojo Faradėjaus dėsnių suminė formulė	$m = \frac{M}{nF} \cdot I \cdot t$, čia m – junginio, išsiskyrusio ant elektrodo, masė, M – medžiagos molinė masė, n – elektronų, dalyvaujančių elektrodiniame procese, skaičius, F – Faradėjaus konstanta, I – srovės stipris, t – elektrolizės laikas

ORGANINĖS CHEMIJOS PRADMENYS

43 lentelė. **Organinių junginių funkcinės grupės***

Junginio klasė	Funkcinė grupė	Priešdėlis	Priesaga ir galūnė	Pavyzdžiai
1	2	3	4	5
Angliavandeniliai:				
alkenai	$>C=C<$	–	-enas	$CH_3-CH=CH-CH_3$ 2-butenas
alkinai	$-C\equiv C-$	–	-inas	$CH_3-CH_2-C\equiv CH$ 1-butinas

* *Funkcinė grupė* – tai atomas arba atomų grupė, nuo kurios priklauso daugelis medžiagų cheminių ir fizinių savybių.

43 lentelė. **Organinių junginių funkcinės grupės**

1	2	3	4	5
Alkoholiai	$-OH$	hidroksi-	-olis	$H_2N-CH_2CH_2-OH$ 2-aminoetanolis CH_3CH_2OH etanolis CH_2-OH | CH_2-OH 1,2-etandiolis (etilenglikolis)
Eteriai	$-OR$	(R)oksi-	–	CH_3-O-CH_3 metoksimetanas (dimetileteris)
Esteriai	$-COOR$	(R)oksikar-bonil-	(R)karboksi-latas	$CH_3-C(=O)-O-C_2H_5$ etiletanoatas (acto rūgšties etilesteris)
Aldehidai	$-CHO$	formil-	-karbaldehi-das	$C_6H_5-C(=O)H$ benzenkarbaldehidas
	$-(C)HO$*	okso-	-alis	$CH_3-C(=O)H$ etanalis (acto rūgšties aldehidas)
Ketonai	$>(C)=O$*	okso-	-onas	$CH_3-C(=O)-CH_2-CH=CH-CH_3$ 4-heksen-2-onas $CH_3-C(=O)-CH_3$ propanonas (acetonas)

43 lentelė. **Organinių junginių funkcinės grupės**

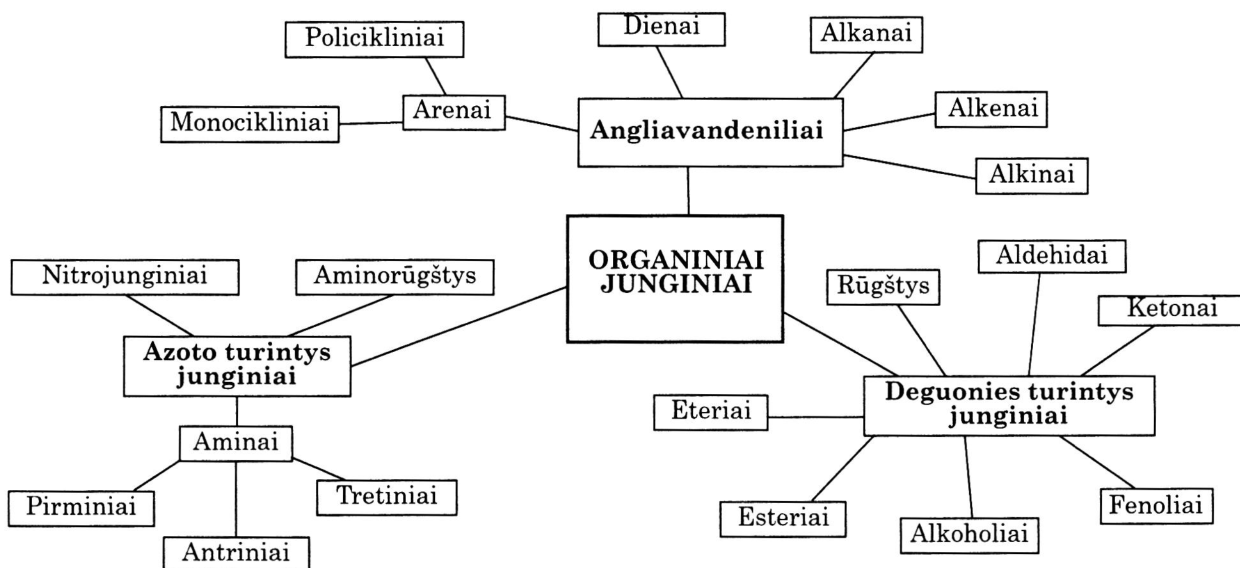
1	2	3	4	5
Karboksirūgštys	—COOH	karboksi-	-karboksi-rūgštis	C_6H_5—COOH (benzeno žiedas) benzenkarboksirūgštis
	—(C)OOH*	–	-ano rūgštis	CH_3COOH etano (acto) rūgštis
Aminai	$—NH_2$	amino-	-aminas	$CH_3CH_2NH_2$ etanaminas
				$C_2H_5—NH—C_2H_5$ dietilaminas
				$CH_3—N(C_2H_5)—CH_3$ etildimetilaminas
Amidai	$—CONH_2$	karba-moil-	-karboks-amidas	$C_5H_9—CONH_2$ (ciklopentano žiedas) ciklopentankarboksamidas
	$—(C)ONH_2$*	karba-moil-	-amidas	CH_3CONH_2 etanamidas
Nitrilai	$—C\equiv N$	cian(o)-	-karbonitrilas	C_6H_5—CN (benzeno žiedas) benzenkarbonitrilas
	$—(C)\equiv N$*	cian(o)-	-nitrilas	CH_3CN etannitrilas
Sulfidai	—SR	(R)tio-	–	$CH_3—S—CH_2CH_3$ metiltioetanas

43 lentelė. **Organinių junginių funkcinės grupės**

Tioliai (anksčiau merkaptanai)	—SH	merkapto-	-tiolis	$CH_3-CH(SH)-CH(OH)-CH_3$ 3-merkapto-2-butanolis CH_3CH_2SH etantiolis
Rūgščių halogenanhidridai	—COX	(halo-gen)formil-	-karbonilha-logenidas	(piridino žiedas su N ir COCl) 3-piridinkarbonilchloridas
Druskos	—(C)OOMe	–	-oatas	CH_3COONa natrio etanoatas (natrio acetatas)

* – apskliaustas atomas neįeina į priešdėlį arba priesagą.

12 schema. **Organinių junginių klasifikacija**



1 priedas

PAPILDOMI DUOMENYS

Tradiciniai kai kurių neorganinių medžiagų pavadinimai

Pavadinimas	Formulė	Pavadinimas	Formulė
Alebastras (min.)	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	Gipsas (min.)	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$
Alūnas	$KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	Glauberio druska	$Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$
Amoniakas	NH_3 (aq)	Kalcinuotoji soda	Na_2CO_3
Amonio salietra	NH_4NO_3	Kalio salietra	KNO_3
Apatitas (min.)	$3Ca_3(PO_4)_2 \cdot Ca(F, Cl)_2$	Kalkių vanduo	$Ca(OH)_2$ (aq)
Azuritas (min.)	$2CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$	Kalomelis	Hg_2Cl_2
Baltoji magnezija	$MgCO_3$ arba $3MgCO_3 \cdot$ $\cdot Mg(OH)_2 \cdot 3H_2O$	Kaolinas (min.)	$Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$
		Karališkasis vanduo	konc. HNO_3 ir konc. HCl mišinys
Berlyno mėlynasis	$Fe_4[Fe(CN)_6]_3$	Karborundas	SiC
Bertoleto druska	$KClO_3$	Kaustinė soda	NaOH
Boksitas (min.)	$Al_2O_3 \cdot 2H_2O$	Klintis	$CaCO_3$
Boraksas	$Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$	Korundas (min.)	Al_2O_3
Chromo alūnas	$KCr(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	Kreida, marmuras	$CaCO_3$
Cinoberis (min.)	HgS	Liapis(as)	$AgNO_3$
Čilės salietra	$NaNO_3$	Limonitas (min.) (rusvoji geležies rūda)	$2Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$
Dolomitas	$CaCO_3 \cdot MgCO_3$	Linksminančiosios dujos	N_2O
Dvigubasis superfosfatas	$Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O$ sumaišytas su $CaSO_4$	Mėlynasis akmenėlis	$CuSO_4 \cdot 5H_2O$
		Molžemis	Al_2O_3
Geltonoji kraujo druska	$K_4[Fe(CN)_6] \cdot 3H_2O$	Oleumas	SO_3 tirpalas
Geriamoji soda	$NaHCO_3$	Paprastasis superfosfatas	$Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O$

Tradiciniai kai kurių neorganinių medžiagų pavadinimai

Pavadinimas	Formulė	Pavadinimas	Formulė
Pelkių rūda	$2Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$	Statybinis gipsas	$CaSO_4 \cdot 0,5H_2O$
Piritas (min.)	FeS_2	Sublimatas	$HgCl_2$
Potašas	K_2CO_3	Talkas (min.)	$3MgO \cdot 4SiO_2 \cdot H_2O$
Raudonoji kraujo druska	$K_3[Fe(CN)_6]$	Valgomoji druska (min.)	NaCl
Silikagelis	SiO_2	Žaliasis akmenėlis	$FeSO_4 \cdot 7H_2O$
Smalkės	CO	Žavelio vanduo	$KClO_3$(aq)

Vidutinis vandenilinio ryšio ilgis

Ryšys	Junginio tipas	Vidutinis ilgis, nm	Ryšys	Junginio tipas	Vidutinis ilgis, nm
O—H...O	Neorganinės rūgštys	0,255	O—H...N	Visi junginiai	0,280
	Organinės rūgštys	0,263	N—H...O	Amonio druskos	0,288
	Fenoliai	0,267	N—H...N	Visi junginiai	0,310
	Alifatiniai alkoholiai	0,274	N—H...F	Visi junginiai	0,278
	Hidroksidai	0,282	N—H...Cl	Visi junginiai	0,321

Dviatomių molekulių ryšio energija (25 °C)

Ryšys	Energija, kJ/mol	Ryšys	Energija, kJ/mol
H—H	437	H—Br	367
O=O	499	H—I	300
N≡N	946	F—F	154
C=O	1072	Cl—Cl	243
H—F	563	Br—Br	194
H—Cl	432	I—I	152

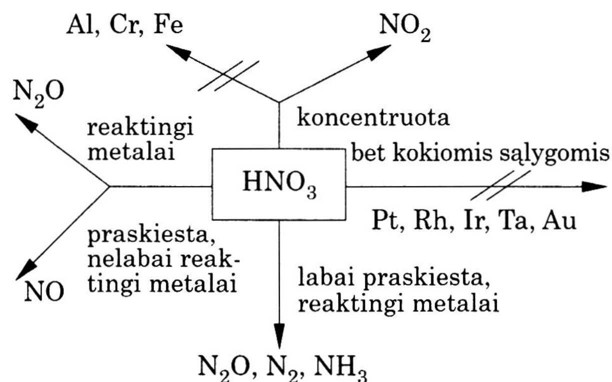
Pagrindinės fizikinės konstantos

Fizikinis dydis, žymėjimas	Dydžio vertė	Fizikinis dydis, žymėjimas	Dydžio vertė
Absoliutusis nulis	–273,15 °C	Neutrono rimties masė, m_n	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg
Avogadro konstanta N_A	$6{,}022045 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	Protono rimties masė, m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
Normalusis slėgis	101 325 Pa	Elektrono rimties masė, m_e	$9{,}110 \cdot 10^{-31}$ kg
Bolcmano (Boltzmann) konstanta $k = \frac{R}{N_A}$	$1{,}38032 \cdot 10^{-23}$ J/K	Idealiųjų dujų molio tūris n.s., V_0	$22{,}4138$ l · mol^{-1}
Universalioji (molinė) dujų konstanta, R	8,3144 J/(mol · K)	Planko (Planck) konstanta, h	$6{,}6252 \cdot 10^{-34}$ J · s
Elementarusis krūvis, e	$1{,}60207 \cdot 10^{-19}$ C	Faradėjaus konstanta, F	96490 C · mol^{-1}
Alfa dalelių masė, m_α	$6{,}644 \cdot 10^{-27}$ kg		

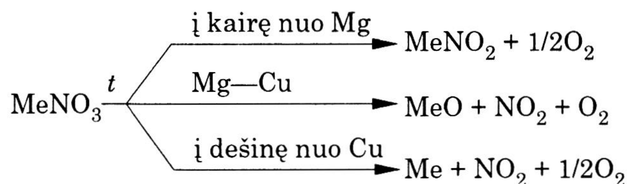
Kai kurios įdomios reakcijos

Ypatumai	Schema	Ypatumai	Schema
Reakcijoje dalyvauja du reduktoriai	$4\overset{+2}{Fe}\overset{-1}{S} + 11\overset{0}{O_2} = 2\overset{+3}{Fe_2}\overset{-2}{O_3} + 8\overset{+4}{S}\overset{-2}{O_2}$ reduktoriai $\overset{+2}{Fe}$, $\overset{-1}{S}$ oksidatorius $\overset{0}{O_2}$	Reakcijoje dalyvauja du oksidatoriai	$\overset{+2}{Hg}(\overset{+5}{N}\overset{-2}{O_3})_2 \longrightarrow \overset{0}{Hg} + 2\overset{+4}{N}\overset{-2}{O_2} + \overset{0}{O_2}$ reduktorius $\overset{-2}{O}$ oksidatoriai $\overset{+2}{Hg}$, $\overset{+5}{N}$

Azoto rūgšties sąveika su metalais



Terminis nitratų skilimas



2 priedas

LABORATORINIŲ DARBŲ PRADMENYS

Kolbos			
Tipas	Naudojimas	Tipas	Naudojimas
Apvaliadugnės Šlifas	Reagentams kaitinti, organinėje sintezėje, perkristalizavimui, distiliavimui	Matavimo 1000 ml 20°C, 500 ml 20°C, 250 ml 20°C, 200 ml 20°C, 100 ml 20°C	Norimos koncentracijos tirpalams paruošti
Plokščiadugnės	Distiliuotam vandeniui ir tirpalams laikyti (eterių tirpalus galima užkimšti tik kamštiniais kamščiais)	Viurco (Wurtz) Klaizeno (Kleisen)	Distiliavimui vakuume, dujoms gauti
Kūginės, arba Erlenmejerio (Erlenmeyer)	Titravimui, tirpalams laikyti, mišiniams atskirti dekantavimo būdu	Čia per kamštį įstatomas Biuchnerio (Buchner) piltuvas Ši atšaka prijungiama prie vakuuminio siurblio Bunzeno (Bunsen)	Filtravimui vakuume

Piltuvai			
Tipas	Naudojimas	Tipas	Naudojimas
Piltuvai	Skysčiams filtruoti ir perpilti	Dalijamieji	Ekstrahavimui, vienas kitame netirpstantiems skysčiams perskirti
Lašinamieji	Reagentams lašinti į reakcijos mišinį	Biuchnerio (Buchner)	Filtravimui vakuume

Matavimo indai			
Indas	Naudojimas	Indas	Naudojimas
Matavimo cilindras	Apytiksliam skysčių tūrių matavimui	Menzūra	Apytiksliam skysčių tūrių matavimui

Matavimo indai

Indas	Naudojimas	Indas	Naudojimas
Pipetės: *a* – matavimo; *b* – matavimo su padalomis	Tiksliam santykinai mažam skysčio tūriui matuoti	Biuretės	Tiksliam skysčių tūriui matuoti; dažniausiai naudojamos cheminėje analizėje

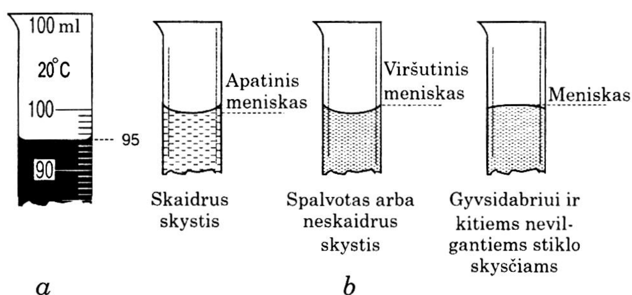
Laboratoriniai darbai su dujomis

Prietaisas	Naudojimas	Prietaisas	Naudojimas
1	2	1	2
Apsauginis piltuvas Rūgštis Dujos Kieta medžiaga Rezervuaras Kipo (Kipp) aparatas	Dujoms (H_2S, H_2, CO_2) gauti veikiant kietas medžiagas rūgštimis	Lengvesnėms už orą dujoms rinkti	Taip surenkamos H_2, NH_3 dujos

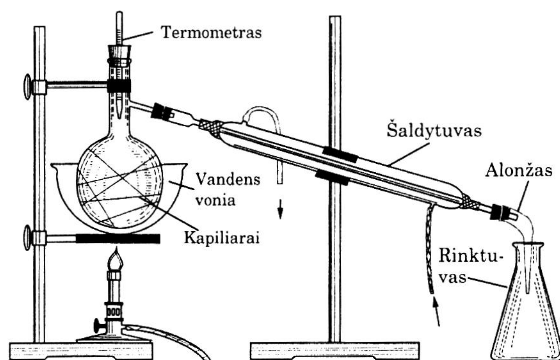
Laboratoriniai darbai su dujomis

1	2	1	2
Dujų, sunkesnių už orą, rinkimas	Taip surenkamos CO_2, Cl_2, H_2S ir kt. dujos	Dujų rinkimas išstumiant vandenį	Dujų, netirpstančių vandenyje (O_2, CO, NO), rinkimas. Negalima surinkti dujų, tirpstančių vandenyje (HCl, NH_3, Cl_2 ir kt.)

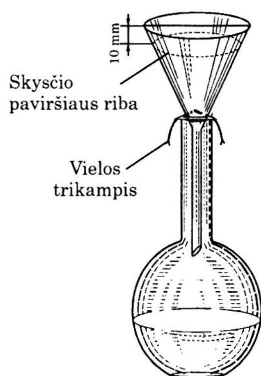
Kai kurie laboratorinių darbų ypatumai



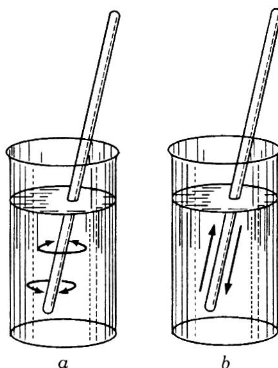
Skysčio tūrio ataskaita:
a – skysčio matavimas matavimo cilindru;
b – meniskų tipai



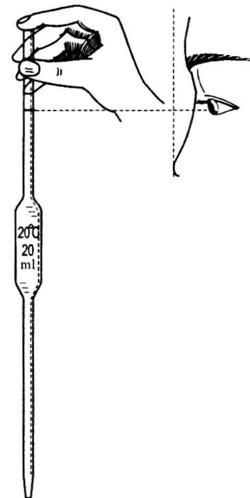
Distiliavimo aparatas



Taip piltuvas teisingai įstatomas į kolbą



Skysčių maišymas stikline lazdele stiklinėje: *a* – teisingai, *b* – neteisingai



Imant mėginį pipetė laikoma taip, kad žyma būtų akių lygyje

Chemija

TEORINĖ CHEMIJA

PAGRINDINĖS CHEMIJOS SĄVOKOS

Cheminė formulė:

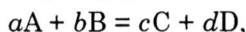


čia X, Y, Z,... – cheminių elementų simboliai, x, y, z – indeksai. Cheminės formulės būna molekulinės, empirinės ir struktūrinės. *Molekulinė formulė* rodo, kiek vieno elemento atomų yra molekulėje. *Empirinė formulė* rodo įvairių elementų atomų kiekių santykius sveikaisiais skaičiais. *Struktūrinė formulė* – atomų jungimosi molekulėje tvarką ir ryšių skaičių tarp atomų.

Junginių cheminės formulės

Pavadinimas	Molekulinė formulė	Empirinė formulė	Struktūrinė formulė
Sieros (IV) oksidas	SO_2	SO_2	O═S═O
Vandenilio peroksidas	H_2O_2	HO	H—O—O—H
Acto rūgštis	$C_2H_4O_2$	CH_2O	CH_3—C(═O)—O—H

Cheminės reakcijos lygtis:



čia a, b, c, d – stechiometriniai koeficientai, A, B, C, D – reagentų cheminės formulės.

Cheminių reakcijų tipai

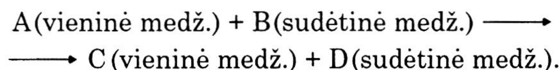
1. *Skilimo reakcija*:



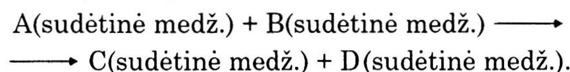
2. *Jungimosi reakcija*:



3. *Pavadavimo reakcija:*



4. *Mainų reakcija*:



Reakcijos produkto A išeiga

$$\eta(A) = m_{eksp}(A)/m_{teor}(A) = n_{eksp}(A)/n_{teor}(A).$$

Atominis masės vienetas (u)

$$1\ u = m(^{12}C)/12 = 1{,}66057 \cdot 10^{-27}\ kg = 1{,}66057 \cdot 10^{-24}\ g.$$

Elemento santykinė atominė masė

$$A_r = m(atomo)/1\ u.$$

Absoliučioji atominė masė

$$m(atomo) = A_r \cdot 1\ u.$$

Junginio santykinė molekulinė masė

$$M_r = m(molekulės)/1\ u.$$

Santykinė molekulinė masė lygi molekulę sudarančių atomų santykinių atominių masių sumai:

$$M_r(X_xY_yZ_z) = x \cdot A_r(X) + y \cdot A_r(Y) + z \cdot A_r(Z).$$

Absoliučioji molekulinė masė

$$m(molekulės) = M_r \cdot 1\ u.$$

Medžiagos kiekis (mol)

$$n = N/N_A,$$

čia N – atomų (molekulių) skaičius,
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ – Avogadro konstanta.

Medžiagos molinė masė

$$M = m/n,$$

čia m – medžiagos masė (g), n – medžiagos kiekis (mol).

Elemento X masės dalis junginyje $X_xY_yZ_z$:

$$w(X) = x \cdot A_r(X)/M_r(X_xY_yZ_z).$$

DUJŲ DĖSNIAI

Mendelejevo–Klapeirono lygtis idealiosioms dujoms:

$$PV = nRT,$$

arba

$$PV = (m/M) \cdot RT,$$

čia P – slėgis, V – tūris, n – dujinės medžiagos kiekis (mol), R – universalioji molinė dujų konstanta, lygi 8,314 J/(mol · K) = 0,082 l· atm/(mol · K), T – absoliučioji (termodinaminė) temperatūra, m – dujų masė, M – dujų molinė masė.

Boilio (Boyle)-Marioto (Mariotte) dėsnis:

$$PV = \text{const},$$

arba

$$P_1V_1 = P_2V_2,$$

galioja, jei T = const.

Gei-Liusako (Gay-Lussac) dėsnis:

$$V/T = \text{const},$$

arba

$$V_1/T_1 = V_2/T_2,$$

galioja, jei P = const.

Bendrasis dujų dėsnis:

$$PV/T = \text{const},$$

arba

$$P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2,$$

galioja, jei n = const.

Avogadro dėsnis:

$$V_1/V_2 = n_1/n_2$$

galioja, jei P = const ir T = const.

Molinis dujų tūris – vieno molio dujų tūris

$$V_m = V/n = RT/P.$$

Normaliomis sąlygomis (P = 101,3 kPa, T = 273 K) V_m = 22,4 l/mol.

Dujų tankis

$$\rho = m/V = (P/RT) \cdot M = M/V_m,$$

čia M – molinė masė, V_m – molinis tūris.

Santykinis dujų B tankis dujų A atžvilgiu

$$D_A(B) = \rho(B)/\rho(A) = M(B)/M(A),$$

čia M – dujų molinė masė.

Dujų A tūrio dalis mišinyje

$$\varphi(A) = V(A)/(V(A) + V(B) + ...);$$

$$\varphi(A) = \nu(A)/(\nu(A) + \nu(B) + ...),$$

čia V – dujų tūris, ν – dujinės medžiagos kiekis.

Mišinio, susidedančio iš *n* dujų, vidutinė molinė masė

$$M_{vid} = \frac{n_1 \cdot M_1 + ... + n_n \cdot M_n}{n_1 + ... + n_n};$$

$$M_{vid} = \frac{V_1 \cdot M_1 + ... + V_n \cdot M_n}{V_1 + ... + V_n};$$

$$M_{vid} = \varphi_1 \cdot M_1 + ... + \varphi_n \cdot M_n,$$

čia M – dujų molinė masė, n – dujinės medžiagos kiekis, V – dujų tūris, φ – dujų tūrinė dalis.

ATOMO SANDARA

Masės skaičius

$$A = Z + N,$$

čia Z – protonų skaičius, N – neutronų skaičius.

Elemento X žymėjimas: ${}^{A}_{Z}X$ (pavyzdžiui, ${}^{16}_{8}O$).

Masės defektas

$$\Delta m = Z \cdot m(p) + N \cdot m(n) - m(\text{branduolio}),$$

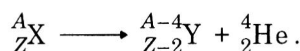
čia $Z \cdot m(p) + N \cdot m(n)$ – protonų ir neutronų, sudarančių branduolį, masė, m(branduolio) – branduolio masė.

Branduolio ryšio energija

$$E = \Delta m \cdot c^2,$$

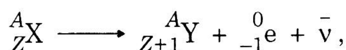
čia $c = 3 \cdot 10^8$ m/s – šviesos greitis.

Radioaktyvusis α skilimas – branduolys išspinduliuoja α daleles (${}^{4}_{2}He$):



$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He.$$

Radioaktyvusis β skilimas – branduolys išspinduliuoja elektronus:



$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu},$$

čia $\bar{\nu}$ – antineutrinas.

Radioaktyviojo skilimo lygtis:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-kt} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}},$$

čia $m(t)$ – branduolio masė laiko momentu t, m_0 – pradinė branduolio masė, k – radioaktyviojo skilimo konstanta, $T_{1/2} = \ln 2/k$ – pusėjimo trukmė.

De Broilio (De Broglie) lygtis:

$$\lambda = h/(m\nu),$$

čia λ – elektrono bangos ilgis, h – Planko konstanta, lygi $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s, m – elektrono masė, ν – elektrono judėjimo greitis.

Geizenbergo (Geisenberg) neapibrėžties lygtis:

$$\Delta x \cdot m\Delta\nu > \frac{h}{4\pi},$$

čia Δx, $\Delta\nu$ – atitinkamai koordinatės ir greičio matavimo paklaidos, m – elektrono masė.

Boro (Bohr) postulatai:

1. $m\nu r = nh/(2\pi)$,

čia m, ν – elektrono masė ir greitis, r – jo orbitos spindulys, n – pagrindinis kvantinis skaičius, h – Planko konstanta.

2. $E_n - E_m = h\nu$,

čia E_n, E_m – elektronų, pereinančių iš n-tosios į m-tąją orbitalę, išspinduliuota energija, ν – šviesos dažnis, kurį atomai išspinduliuoja arba sugeria pereinant elektronams.

Vandenilio atomo elektrono n-tojoje orbitalėje energija

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

čia $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C – elektrono krūvio absoliutus dydis.

Atomo elektrono kvantiniai skaičiai:

1. *Pagrindinis kvantinis skaičius*

$$n = 1, 2, 3, ..., \infty.$$

2. *Orbitinis (šalutinis) kvantinis skaičius*

$$l = 0, 1, ..., n - 1.$$

Duotajam kvantiniam skaičiui n galimos orbitinio kvantinio skaičiaus l skirtingos n reikšmės.

3. *Magnetinis kvantinis skaičius*

$$m_l = -l, -l + 1, ..., 0, ..., l - 1, l.$$

Duotajam kvantiniam skaičiui l galimos $2l + 1$ magnetinio kvantinio skaičiaus m_l reikšmės.

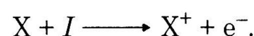
4. *Sukinio kvantinis skaičius*

$$m_s = \pm 1/2.$$

Atominių orbitalių užpildymo elektronais taisyklės:

1*s* 2*s* 2*p* 3*s* 3*p* 4*s* 3*d* 4*p* 5*s* 4*d* 5*p* 6*s* 4*f* 5*d* 6*p* 7*s* 5*f* 6*d*

Jonizacijos potencialas (energija) I – energija, kurios reikia iš atomo atimti silpniausiai surištą elektroną:



$$X + I \longrightarrow X^+ + e^-.$$

Elektroninis gimininingumas E – energija, kuri išsiskiria atomui prisijungus elektroną:



$$X + e \longrightarrow X^- + E.$$

Atomo elektrinis neigiamumas

$$EN = (I + E)/2.$$

FIZIKINĖS CHEMIJOS PRADMENYS

Cheminių reakcijų energija

Pirmasis termodinamikos dėsnis:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - A,$$

čia ΔU – sistemos vidinės energijos U pokytis pereinant sistemai iš 1 būsenos į 2, Q – sistemos gaunama šiluma, A – sistemos atliktas darbas.

Entalpija:

$$H = U + PV,$$

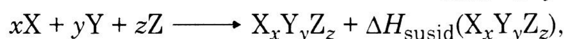
čia P – slėgis, V – tūris.

Cheminės reakcijos šiluminis efektas (slėgis nekinta):

$$Q = -\Delta H = H(\text{pradinių medžiagų}) - H(\text{reakcijos produktų});$$

reakcijoms tirpale $\Delta H \approx \Delta U$.

Medžiagos susidarymo entalpija $\Delta H_{susid}(X_xY_yZ_z)$:



$$xX + yY + zZ \longrightarrow X_xY_yZ_z + \Delta H_{susid}(X_xY_yZ_z),$$

čia ΔH_{susid} – entalpijos pokytis susidarant medžiagai iš vieninių medžiagų.

Susitarta, kad vieninės medžiagos susidarymo entalpija lygi 0.

Reakcijos $aA + bB \rightarrow cC + dD$ entalpijos pokytį galima išreikšti medžiagų susidarymo entalpijomis:

$$\Delta H = c \cdot \Delta H_{susid}(C) + d \cdot \Delta H_{susid}(D) - a \cdot \Delta H_{susid}(A) - b \cdot \Delta H_{susid}(B)$$

arba **medžiagų degimo entalpijomis:**

$$\Delta H = a \cdot \Delta H_{deg}(A) + b \cdot \Delta H_{deg}(B) - c \cdot \Delta H_{deg}(C) - d \cdot \Delta H_{deg}(D).$$

Jei $\Delta H < 0$, šiluma išsiskiria, reakcija yra **egzoterminė.**

Jei $\Delta H > 0$, šiluma sugeriama, reakcija yra **endoterminė.**

Cheminių reakcijų greitis

Cheminės reakcijos vidutinis greitis per laiką Δt:

$$v = \pm\frac{\Delta C}{\Delta t} = \pm\frac{C_2 - C_1}{t_2 - t_1},$$

čia C_2 ir C_1 – medžiagos molinės koncentracijos laiko momentais t_2, t_1. Ženklas „+“ rašomas, jei greitis nustatomas pagal reakcijos produktą, „–“ – jei pagal pradines medžiagas.

Momentinis greitis nustatomas iš koncentracijos išvestinės pagal laiką:

$$v = \pm\frac{dC}{dt} = \pm C'(t).$$

Veikiančiųjų masių dėsnis:

reakcijai $A \longrightarrow B + \ldots$ $v = k \cdot C_A$;

reakcijai $A + B \longrightarrow C + \ldots$ $v = k \cdot C_A \cdot C_B$;

reakcijai $2A + B \longrightarrow C + \ldots$ $v = k \cdot C_A^2 \cdot C_B$,

čia v – elementariosios cheminės reakcijos greitis, k – greičio konstanta, priklausanti nuo temperatūros, C_A, C_B – reaguojančių medžiagų koncentracijos.

Vant Hofo (vant Hoff) taisyklė:

pakėlus temperatūrą dešimčia laipsnių, daugumos reakcijų greitis padidėja 2–4 kartus:

$$v_{T_2} = v_{T_1} \cdot \gamma^{(T_2 - T_1)/10},$$

čia $\gamma = 2–4$ – reakcijos greičio temperatūrinis koeficientas.

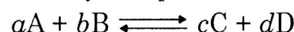
Arenijaus lygtis greičių konstantai:

$$k(T) = A \cdot e^{-E_A/(RT)},$$

čia A – konstanta, priklausanti nuo reaguojančių medžiagų prigimties, E_A – reakcijos aktyvacijos energija, R – universalioji (molinė) dujų konstanta.

Cheminė pusiausvyra

Grįžtamosios reakcijos tirpale



$$aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$$

pusiausvyros konstanta

$$K_c = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b},$$

indeksas c rodo, kad pusiausvyros konstanta išreikšta reakcijos produktų ir reaguojančių medžiagų pusiausvirosiomis molinėmis koncentracijomis (mol/l).

Analogiškai reakcijai dujose pusiausvyros konstanta bus tokia:

$$K_p = \frac{p_C^c \cdot p_D^d}{p_A^a \cdot p_B^b},$$

čia p – dujų parcialinis slėgis.

Pusiausvyros konstantos priklausomybė nuo temperatūros (tūris nekinta):

$$\frac{d\ln K_p}{dT} = \frac{\Delta H}{RT^2},$$

čia ΔH – reakcijos entalpijos pokytis.

Ši formulė rodo, kad pakėlus temperatūrą endoterminės reakcijos pusiausvyros konstanta padidėja ($\Delta H > 0$), o egzoterminės reakcijos sumažėja ($\Delta H < 0$).

TIRPALAI ELEKTROLITINĖ DISOCIACIJA

Tirpinio masės dalis

$$w = m(\text{medžiagos})/m(\text{tirpalo}).$$

Tirpumas s – medžiagos masė, kuri gali ištirpti 100 g tirpiklio. Tirpumas su masės dalimi susietas taip:

$$w = s/(s + 100),$$
$$s = 100w/(1 - w).$$

Molinė tirpinio dalis (bedimensis dydis)

$$x = n_i/\Sigma n_i,$$

čia n_i – tirpinio kiekis, Σn_i – visų medžiagų, sudarančių tirpalą, kiekis.

Molinė tirpinio koncentracija (mol/l)

$$C = n(\text{medžiagos})/V(\text{tirpalo}).$$

Molinė koncentracija susieta su medžiagos moline dalimis w lygtimi:

$$C = 1000w \cdot \rho(\text{tirpalo})/M(\text{medžiagos}),$$

čia ρ – tirpalo tankis (g/ml), M(medžiagos) – medžiagos molinė masė (g/mol).

Disociacijos laipsnis

$$\alpha = n'/n,$$

čia n' – molekulių, disocijavusių į jonus, skaičius, n – bendras ištirpusių molekulių skaičius.

α dydžio skaitinė vertė gali kisti nuo 0 (medžiagos nedisocijuoja) iki 1 (visiškai disocijuoja).

Disociacijos konstanta K – pusiausvyros konstanta, apibūdinanti elektrolito elektrolitinę disociaciją.

Rūgštys, kurių disociacijos lygtis yra



$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-,$$

čia A^- – rūgšties liekana,

disociacijos konstanta

$$K_r = \frac{[H^+] \cdot [A^-]}{[HA]}.$$

Tarp skliaustų rašomos jonų ir molekulių pusiausvirosios molinės koncentracijos tirpale.

Bazių, kurių disociacijos lygtis yra



$$BOH \rightleftharpoons B^+ + OH^-,$$

čia B^+ – bazės liekana,

disociacijos konstanta

$$K_b = \frac{[B^+] \cdot [OH^-]}{[BOH]}.$$

Ostvaldo (Ostwald) praskiedimo dėsnis

$$K = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \cdot C,$$

čia C – AB tipo elektrolito molinė koncentracija.

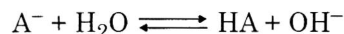
Vandens joninė sandauga K_v – vandens disociacijos konstanta

$$K_v = [H^+] \cdot [OH^-].$$

25 °C temperatūroje $K_v = 1 \cdot 10^{-14}$.

Hidrolizės konstanta – pusiausvyros konstanta, apibūdinanti jonų sąveiką su vandeniu.

Reakcijos



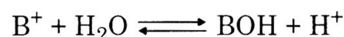
$$A^- + H_2O \rightleftharpoons HA + OH^-$$

hidrolizės konstanta

$$K = \frac{[HA] \cdot [OH^-]}{[A^-]} = \frac{K_v}{K_r},$$

čia K_r – rūgšties HA disociacijos konstanta.

Reakcijos



$$B^+ + H_2O \rightleftharpoons BOH + H^+$$

hidrolizės konstanta

$$K = \frac{[BOH] \cdot [H^+]}{[B^+]} = \frac{K_v}{K_b},$$

čia K_b – bazės BOH disociacijos konstanta.

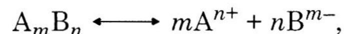
Vandenilio jonų rodiklis

$$pH = -\lg[H^+].$$

Gryno vandens ir neutralių tirpalų pH = 7, rūgščių tirpalų pH < 7, šarminių tirpalų pH > 7.

Tirpumo sandauga TS – tai pusiausvyros konstanta, apibūdinanti blogai tirpstančių medžiagų disociaciją.

Medžiagoms, kurių disociacijos lygtis yra



$$A_mB_n \longleftrightarrow mA^{n+} + nB^{m-},$$

$$TS(A_mB_n) = [A^{n+}]^m \cdot [B^{m-}]^n.$$

OKSIDACIJOS-REDUKCIJOS REAKCIJOS

Oksidacijos-redukcijos reakcijos (bendra schema):

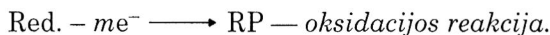


$$\text{Oks.} + \text{Red.} \longrightarrow \text{RP},$$

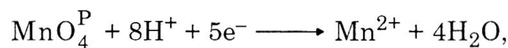
čia Oks. – oksidatorius, Red. – reduktorius, RP – reakcijos produktas.

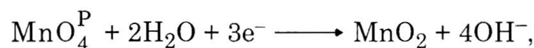
Oksidacijos-redukcijos reakcija susideda iš dviejų dalinių reakcijų:

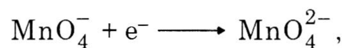

Oks. + $ne^- \longrightarrow$ RP — *redukcijos reakcija,*

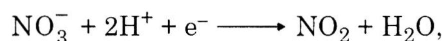

Red. – $me^- \longrightarrow$ RP — *oksidacijos reakcija.*

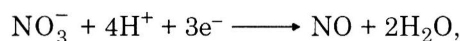
Svarbiausios redukcijos dalinės reakcijos:

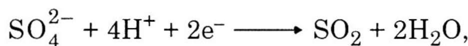

$MnO_4^{P} + 8H^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$,

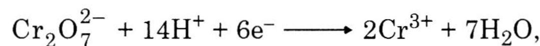

$MnO_4^{P} + 2H_2O + 3e^- \longrightarrow MnO_2 + 4OH^-$,

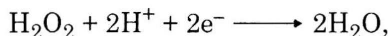

$MnO_4^- + e^- \longrightarrow MnO_4^{2-}$,

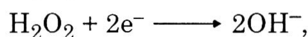

$NO_3^- + 2H^+ + e^- \longrightarrow NO_2 + H_2O$,

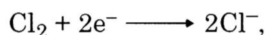

$NO_3^- + 4H^+ + 3e^- \longrightarrow NO + 2H_2O$,

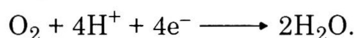

$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e^- \longrightarrow SO_2 + 2H_2O$,


$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \longrightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$,

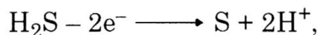

$H_2O_2 + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow 2H_2O$,

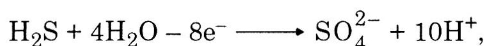

$H_2O_2 + 2e^- \longrightarrow 2OH^-$,

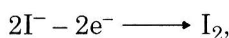

$Cl_2 + 2e^- \longrightarrow 2Cl^-$,

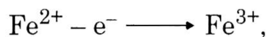

$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O$.

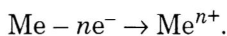
Svarbiausios oksidacijos dalinės reakcijos:


$H_2S - 2e^- \longrightarrow S + 2H^+$,


$H_2S + 4H_2O - 8e^- \longrightarrow SO_4^{2-} + 10H^+$,


$2I^- - 2e^- \longrightarrow I_2$,


$Fe^{2+} - e^- \longrightarrow Fe^{3+}$,


$Me - ne^- \rightarrow Me^{n+}$.

Standartinis vandenilio elektrodas – tai oksidacijos-redukcijos elektrodas, ant kurio vyksta dalinė reakcija


$$2H^+ + 2e^- \rightleftharpoons H_2,$$

kai vandenilio slėgis $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa (1 atm), vandenilio jonų H^+ koncentracija 1 mol/l ir temperatūra 25 °C.

Oksidacijos-redukcijos potencialas *E*

Oks. + $ne^- \longrightarrow$ RP oksidacijos gebos kiekybinė charakteristika lyginant su standartiniu vandenilio elektrodu:

$$E = E^0 + \frac{RT}{nF}\ln\frac{[\text{Oks}]}{[\text{Red}]},$$

čia E^0 – standartinis oksidacijos-redukcijos potencialas (jei [Oks.] = [Red.] = 1 mol/l), R – universalioji dujų konstanta, T – temperatūra, F – Faradėjaus konstanta (vieno molio elektronų krūvis): F = 96 500 C/mol.

Kuo didesnis potencialas E, tuo stipresnis oksidatorius Oks. ir tuo silpnesnis reduktorius Red.

Metalo standartinis elektrodo potencialas

E^0 – standartinis dalinės reakcijos


$$Me^{n+} + ne^- \longrightarrow Me$$

potencialas.

Metalų elektrocheminė įtampų eilė – metalų eilė, sudaryta pagal standartinio elektrocheminio potencialo vertes (didėjimo kryptimi):

Li K Ba Sr Ca Na Mg Al Mn Zn Cr Fe Cd Co Ni Sn Pb **H** Bi Cu Hg Ag Pt Au.

Faradėjaus elektrolizės dėsnis:

$$m = \frac{M}{nF} \cdot I \cdot t,$$

čia m – išsiskyrusios ant elektrodų medžiagos masė, M – medžiagos molinė masė, n – procese dalyvaujančių elektronų skaičius, I – srovės stipris (A), t – elektrolizės trukmė (s).

NEORGANINĖ CHEMIJA

VANDENILIS IR JO JUNGINIAI

Vandenilis H_2

G a v i m a s

1) $Zn + 2HCl = ZnCl_2 + H_2\uparrow$.

2) $2Al + 2NaOH + 6H_2O = 2Na[Al(OH)_4] + 3H_2\uparrow$.

3) $2NaCl + 2H_2O = H_2\uparrow + Cl_2\uparrow + 2NaOH$ (NaCl tirpalo elektrolizė).

4) $C + H_2O = CO\uparrow + H_2\uparrow$ (t = 1000 °C).

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $H_2 + Cl_2 = 2HCl$.

2) $2H_2 + O_2 = 2H_2O$.

3) $H_2 + S \overset{t}{=} H_2S\uparrow$.

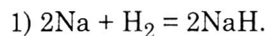
4) $3H_2 + N_2 \xrightarrow{t,\,P,\,\text{kat.}} 2NH_3\uparrow$.

5) $H_2 + 2Na = 2NaH$.

6) $CuO + H_2 \overset{t}{=} Cu + H_2O$.

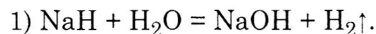
Metalų hidridai MeH_n (*n* – metalo valentingumas)

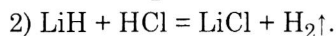
G a v i m a s


1) $2Na + H_2 = 2NaH$.

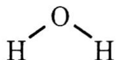

2) $Ca + H_2 = CaH_2$.

C h e m i n ė s s a v y b ė s


1) $NaH + H_2O = NaOH + H_2\uparrow$.

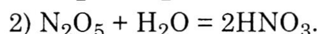

2) $LiH + HCl = LiCl + H_2\uparrow$.

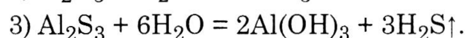
Vanduo H_2O

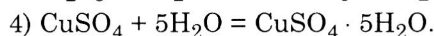


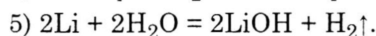
C h e m i n ė s s a v y b ė s


1) $Na_2O + H_2O = 2NaOH$.

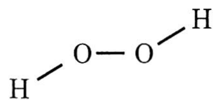

2) $N_2O_5 + H_2O = 2HNO_3$.


3) $Al_2S_3 + 6H_2O = 2Al(OH)_3 + 3H_2S\uparrow$.

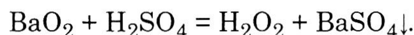

4) $CuSO_4 + 5H_2O = CuSO_4 \cdot 5H_2O$.


5) $2Li + 2H_2O = 2LiOH + H_2\uparrow$.

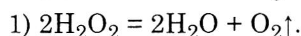
Vandenilio peroksidas H_2O_2

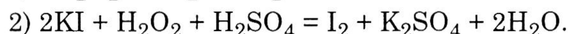


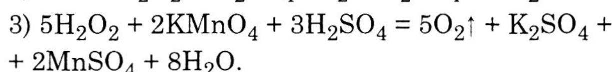
G a v i m a s


$BaO_2 + H_2SO_4 = H_2O_2 + BaSO_4\downarrow$.

C h e m i n ė s s a v y b ė s


1) $2H_2O_2 = 2H_2O + O_2\uparrow$.

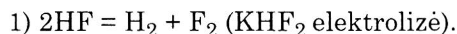

2) $2KI + H_2O_2 + H_2SO_4 = I_2 + K_2SO_4 + 2H_2O$.


3) $5H_2O_2 + 2KMnO_4 + 3H_2SO_4 = 5O_2\uparrow + K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 8H_2O$.

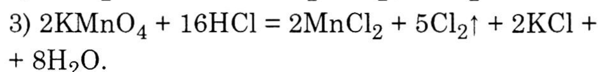
HALOGENAI IR JŲ JUNGINIAI

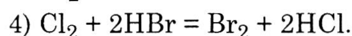
Halogenai X_2 (X — F, Cl, Br, I)

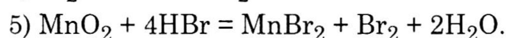
G a v i m a s

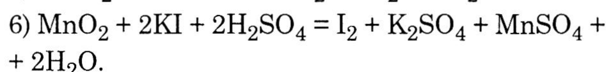

1) $2HF = H_2 + F_2$ (KHF_2 elektrolizė).


2) $MnO_2 + 4HCl = MnCl_2 + Cl_2\uparrow + 2H_2O$.

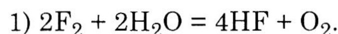

3) $2KMnO_4 + 16HCl = 2MnCl_2 + 5Cl_2\uparrow + 2KCl + 8H_2O$.

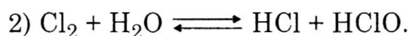

4) $Cl_2 + 2HBr = Br_2 + 2HCl$.


5) $MnO_2 + 4HBr = MnBr_2 + Br_2 + 2H_2O$.


6) $MnO_2 + 2KI + 2H_2SO_4 = I_2 + K_2SO_4 + MnSO_4 + 2H_2O$.

C h e m i n ė s s a v y b ė s

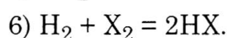

1) $2F_2 + 2H_2O = 4HF + O_2$.

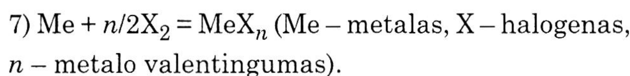

2) $Cl_2 + H_2O \rightleftarrows HCl + HClO$.


3) $2Cl_2 + 2H_2O = 4HCl + O_2\uparrow$ (šviesoje).

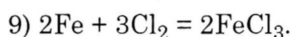

4) $Cl_2 + 2KOH = KCl + KClO + H_2O$.

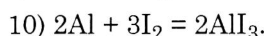

5) $3Cl_2 + 6KOH = 5KCl + KClO_3 + 3H_2O$ (kaitinant).


6) $H_2 + X_2 = 2HX$.


7) $Me + n/2X_2 = MeX_n$ (Me – metalas, X – halogenas, *n* – metalo valentingumas).

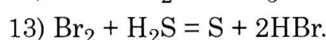

8) $2Na + Cl_2 = 2NaCl$.

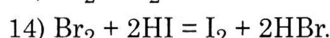

9) $2Fe + 3Cl_2 = 2FeCl_3$.


10) $2Al + 3I_2 = 2AlI_3$.


11) $2P + 3Cl_2 = 2PCl_3$.


12) $2P + 5Br_2 = 2PBr_5$.


13) $Br_2 + H_2S = S + 2HBr$.

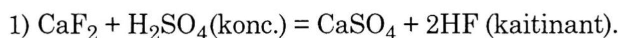

14) $Br_2 + 2HI = I_2 + 2HBr$.


15) $I_2 + H_2S = S + 2HI$.

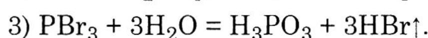

16) $I_2 + SO_2 + 2H_2O = H_2SO_4 + 2HI$.

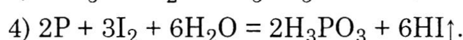
Vandenilio halogenidai HX

G a v i m a s

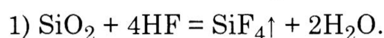

1) $CaF_2 + H_2SO_4$(konc.) $= CaSO_4 + 2HF$ (kaitinant).

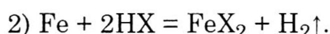

2) $NaCl + H_2SO_4$(konc.) $= NaHSO_4 + HCl\uparrow$ (kaitinant).

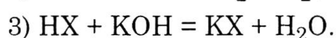

3) $PBr_3 + 3H_2O = H_3PO_3 + 3HBr\uparrow$.

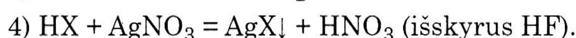

4) $2P + 3I_2 + 6H_2O = 2H_3PO_3 + 6HI\uparrow$.

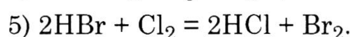
C h e m i n ė s s a v y b ė s

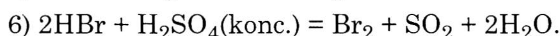

1) $SiO_2 + 4HF = SiF_4\uparrow + 2H_2O$.

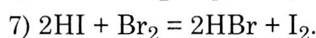

2) $Fe + 2HX = FeX_2 + H_2\uparrow$.

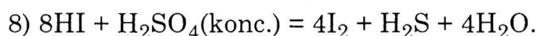

3) $HX + KOH = KX + H_2O$.


4) $HX + AgNO_3 = AgX\downarrow + HNO_3$ (išskyrus HF).

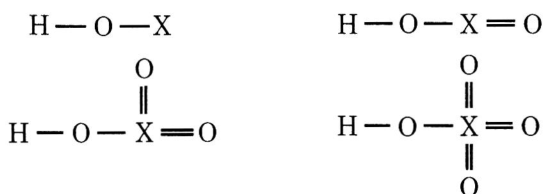

5) $2HBr + Cl_2 = 2HCl + Br_2$.


6) $2HBr + H_2SO_4$(konc.) $= Br_2 + SO_2 + 2H_2O$.


7) $2HI + Br_2 = 2HBr + I_2$.


8) $8HI + H_2SO_4$(konc.) $= 4I_2 + H_2S + 4H_2O$.

Deguoninės rūgštys HXO_n (n = 1—4)



Gavimas

1) $Cl_2 + H_2O \rightleftharpoons HCl + HClO$.
2) $Ba(ClO_3)_2 + H_2SO_4 = 2HClO_3 + BaSO_4\downarrow$.
3) $I_2 + 5Cl_2 + 6H_2O = 2HIO_3 + 10HCl$.
4) $KClO_4 + H_2SO_4 = KHSO_4 + HClO_4$.

Cheminės savybės

1) $HClO_n + KOH = KClO_n + H_2O$.
2) $2HClO = 2HCl + O_2\uparrow$ (šviesoje).
3) $2HI + HClO = I_2\uparrow + HCl + H_2O$.
4) $6P + 5HClO_3 = 3P_2O_5 + 5HCl$.

VIA GRUPĖ
Deguonis ir jo junginiai

Deguonis O_2

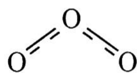
Gavimas

1) $2KMnO_4 \overset{t}{=} K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2\uparrow$.
2) $4K_2Cr_2O_7 \overset{t}{=} 4K_2CrO_4 + 2Cr_2O_3 + 3O_2\uparrow$.
3) $2KClO_3 \overset{t}{=} 2KCl + 3O_2\uparrow$.

Cheminės savybės

1) $4X + mO_2 = 2X_2O_m$ (X – metalas arba nemetalas).
2) $4NH_3 + 3O_2 = 2N_2 + 6H_2O$.
3) $2CuS + 3O_2 = 2CuO + 2SO_2$.

Ozonas O_3



Gavimas

$3O_2 \rightleftharpoons 2O_3$ (elektros išlydyje).

Cheminės savybės

1) $2KI + O_3 + H_2O = I_2 + O_2 + 2KOH$.
2) $3PbS + 4O_3 = 3PbSO_4$.

Oksidai X_mO_n

Gavimas

1) $Cu(OH)_2 \overset{t}{=} CuO + H_2O$.
2) $H_2SiO_3 \overset{t}{=} SiO_2 + H_2O$.
3) $2Pb(NO_3)_2 \overset{t}{=} 2PbO + 4NO_2 + O_2$.

Cheminės savybės

1) $CaO + H_2O = Ca(OH)_2$.
2) $P_2O_5 + 3H_2O = 2H_3PO_4$.
3) $BaO + SiO_2 = BaSiO_3$.
4) $Al_2O_3 + 3SO_3 = Al_2(SO_4)_3$.
5) $FeO + H_2SO_4 = FeSO_4 + H_2O$.
6) $CO_2 + Ca(OH)_2 = CaCO_3 + H_2O$.
7) $3CuO + 2NH_3 \overset{t}{=} 3Cu + N_2 + 3H_2O$.
8) $P_2O_5 + 5C \overset{t}{=} 2P + 5CO$.

Siera ir jos junginiai

Siera S

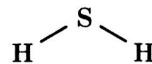
Gavimas

1) $2H_2S + O_2 = 2S + 2H_2O$ (trūkstant O_2).
2) $2H_2S + SO_2 = 3S + 2H_2O$.

Cheminės savybės

1) $2Al + 3S = Al_2S_3$.
2) $Hg + S = HgS$.
3) $S + O_2 = SO_2$.
4) $S + 2H_2SO_4(konc.) = 3SO_2 + 2H_2O$.
5) $S + 6HNO_3(konc.) = H_2SO_4 + 6NO_2 + 2H_2O$.

Vandenilio sulfidas H_2S



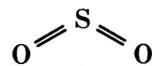
Gavimas

1) $H_2 + S = H_2S$ (kaitinant).
2) $FeS + 2HCl = FeCl_2 + H_2S\uparrow$.

Cheminės savybės

1) $H_2S + KOH = KHS + H_2O$, $H_2S + 2KOH = K_2S + {}$ ${} + 2H_2O$.
2) $H_2S + Br_2 = S + 2HBr$.
3) $H_2S + 2FeCl_3 = 2FeCl_2 + S + 2HCl$.
4) $H_2S + 4Cl_2 + 4H_2O = H_2SO_4 + 8HCl$.
5) $H_2S + H_2SO_4(konc.) = S + SO_2 + 2H_2O$.
6) $H_2S + Pb(NO_3)_2 = PbS\downarrow + 2HNO_3$.

Sieros(IV) oksidas SO_2

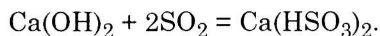


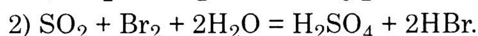
Gavimas

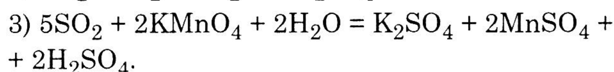
1) $4FeS_2 + 11O_2 = 2Fe_2O_3 + 8SO_2$.
2) $Na_2SO_3 + 2HCl = 2NaCl + SO_2\uparrow + H_2O$.
3) $Cu + 2H_2SO_4(konc.) = CuSO_4 + SO_2\uparrow + 2H_2O$.

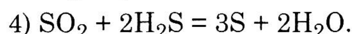
Cheminės savybės

1) $Ca(OH)_2 + SO_2 = CaSO_3\downarrow + H_2O$,

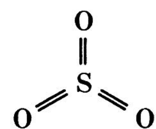

$Ca(OH)_2 + 2SO_2 = Ca(HSO_3)_2$.


2) $SO_2 + Br_2 + 2H_2O = H_2SO_4 + 2HBr$.


3) $5SO_2 + 2KMnO_4 + 2H_2O = K_2SO_4 + 2MnSO_4 +$
$+ 2H_2SO_4$.


4) $SO_2 + 2H_2S = 3S + 2H_2O$.

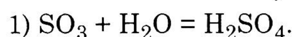
Sieros (VI) oksidas SO_3

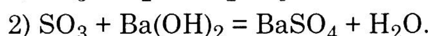


G a v i m a s

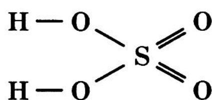

$2SO_2 + O_2 = 2SO_3$.

C h e m i n ė s s a v y b ė s

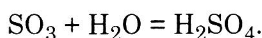

1) $SO_3 + H_2O = H_2SO_4$.


2) $SO_3 + Ba(OH)_2 = BaSO_4 + H_2O$.

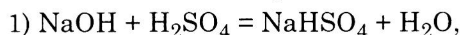
Sieros (sulfato) rūgštis H_2SO_4

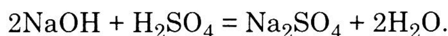


G a v i m a s

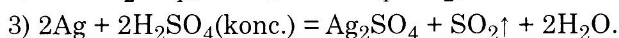

$SO_3 + H_2O = H_2SO_4$.

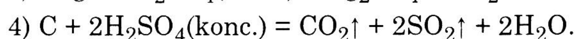
C h e m i n ė s s a v y b ė s

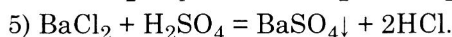

1) $NaOH + H_2SO_4 = NaHSO_4 + H_2O$,


$2NaOH + H_2SO_4 = Na_2SO_4 + 2H_2O$.


2) $Zn + H_2SO_4(prask.) = ZnSO_4 + H_2\uparrow$.


3) $2Ag + 2H_2SO_4(konc.) = Ag_2SO_4 + SO_2\uparrow + 2H_2O$.


4) $C + 2H_2SO_4(konc.) = CO_2\uparrow + 2SO_2\uparrow + 2H_2O$.


5) $BaCl_2 + H_2SO_4 = BaSO_4\downarrow + 2HCl$.

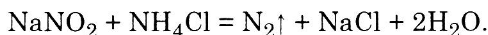
VA GRUPĖ

Azotas ir jo junginiai

Azotas N_2


$N\equiv N$

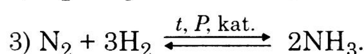
G a v i m a s


$NaNO_2 + NH_4Cl = N_2\uparrow + NaCl + 2H_2O$.

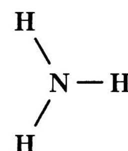
C h e m i n ė s s a v y b ė s


1) $6Li + N_2 = 2Li_3N$.

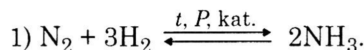

2) $N_2 + O_2 \rightleftarrows 2NO$ (elektros išlydyje).

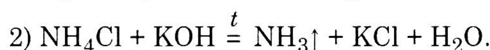

3) $N_2 + 3H_2 \xrightleftharpoons{t,\ P,\ kat.} 2NH_3$.

Amoniakas NH_3



G a v i m a s


1) $N_2 + 3H_2 \xrightleftharpoons{t,\ P,\ kat.} 2NH_3$.

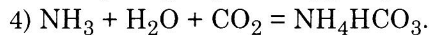

2) $NH_4Cl + KOH \overset{t}{=} NH_3\uparrow + KCl + H_2O$.

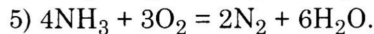
C h e m i n ė s s a v y b ė s

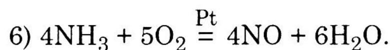

1) $NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4OH \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$.

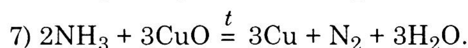

2) $NH_3 + HCl = NH_4Cl$.


3) $2NH_3 + H_2SO_4 = (NH_4)_2SO_4$.

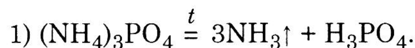

4) $NH_3 + H_2O + CO_2 = NH_4HCO_3$.


5) $4NH_3 + 3O_2 = 2N_2 + 6H_2O$.


6) $4NH_3 + 5O_2 \overset{Pt}{=} 4NO + 6H_2O$.


7) $2NH_3 + 3CuO \overset{t}{=} 3Cu + N_2 + 3H_2O$.

Amonio druskos
G a v i m a s – rūgštis veikiant amoniaku.
C h e m i n ė s s a v y b ė s


1) $(NH_4)_3PO_4 \overset{t}{=} 3NH_3\uparrow + H_3PO_4$.


2) $NH_4Cl \overset{t}{=} NH_3\uparrow + HCl\uparrow$.

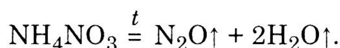

3) $NH_4HCO_3 \overset{t}{=} NH_3\uparrow + H_2O\uparrow + CO_2\uparrow$.


4) $(NH_4)_2Cr_2O_7 \overset{t}{=} N_2\uparrow + Cr_2O_3 + 4H_2O\uparrow$.

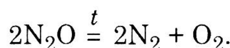
Azoto(I) oksidas N_2O


$N{=}N{=}O$

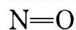
G a v i m a s


$NH_4NO_3 \overset{t}{=} N_2O\uparrow + 2H_2O\uparrow$.

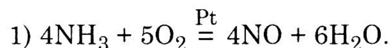
C h e m i n ė s s a v y b ė s

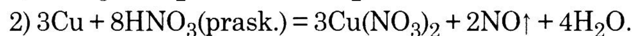

$2N_2O \overset{t}{=} 2N_2 + O_2$.

Azoto(II) oksidas NO

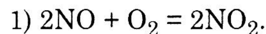

$N{=}O$

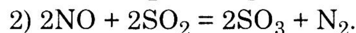
G a v i m a s


1) $4NH_3 + 5O_2 \overset{Pt}{=} 4NO + 6H_2O$.

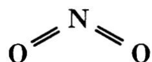

2) $3Cu + 8HNO_3(prask.) = 3Cu(NO_3)_2 + 2NO\uparrow + 4H_2O$.

C h e m i n ė s s a v y b ė s


1) $2NO + O_2 = 2NO_2$.


2) $2NO + 2SO_2 = 2SO_3 + N_2$.

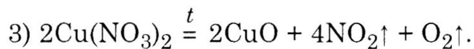
Azoto(IV) oksidas NO_2



G a v i m a s

1) $2NO + O_2 = 2NO_2$.

2) $Cu + 4HNO_3(\text{konc.}) = Cu(NO_3)_2 + 2NO_2\uparrow + 2H_2O$.



3) $2Cu(NO_3)_2 \overset{t}{=} 2CuO + 4NO_2\uparrow + O_2\uparrow$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $2NO_2 \rightleftarrows N_2O_4$.

2) $2NO_2 + H_2O = HNO_2 + HNO_3$.

3) $3NO_2 + H_2O \overset{t}{=} 2HNO_3 + NO\uparrow$.

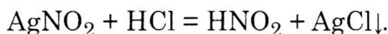
4) $4NO_2 + 2H_2O + O_2 = 4HNO_3$.

5) $2NO_2 + 2NaOH = NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O$.

6) $SO_2 + NO_2 = SO_3 + NO$.

Nitrito rūgštis HNO_2

G a v i m a s



$AgNO_2 + HCl = HNO_2 + AgCl\downarrow$.

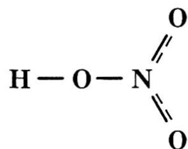
C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $NaOH + HNO_2 = NaNO_2 + H_2O$.

2) $2HNO_2 + 2HI = I_2 + 2NO + 2H_2O$.

3) $HNO_2 + Cl_2 + H_2O = HNO_3 + 2HCl$.

Azoto (nitrato) rūgštis HNO_3



G a v i m a s

1) $4NO_2 + 2H_2O + O_2 = 4HNO_3$.

2) $KNO_3(k) + H_2SO_4(\text{konc.}) \overset{t}{=} KHSO_4 + HNO_3\uparrow$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $KOH + HNO_3 = KNO_3 + H_2O$.

2) $CaO + 2HNO_3 = Ca(NO_3)_2 + H_2O$.

3) $Ag + 2HNO_3(\text{konc.}) = AgNO_3 + NO_2\uparrow + H_2O$.

4) $3Ag + 4HNO_3(\text{prask.}) = 3AgNO_3 + NO + 2H_2O$.

5) $3P + 5HNO_3 + 2H_2O = 3H_3PO_4 + 5NO\uparrow$.

6) $S + 2HNO_3(\text{konc.}) = H_2SO_4 + 2NO\uparrow$.

7) $4Mg + 10HNO_3(\text{prask.}) = 4Mg(NO_3)_2 + NH_4NO_3 +$
$+ 3H_2O$.

Nitratai $Me(NO_3)_n$ (Me – metalas, n – metalo valentingumas)

G a v i m a s – metalus, oksidus ir hidroksidus veikiant azoto rūgštimi.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $2NaNO_3 \overset{t}{=} 2NaNO_2 + O_2\uparrow$.

2) $4Fe(NO_3)_2 \overset{t}{=} 2Fe_2O_3 + 8NO_2\uparrow + O_2\uparrow$.

3) $2Pb(NO_3)_2 \overset{t}{=} 2PbO + 4NO_2\uparrow + O_2\uparrow$.

4) $Hg(NO_3)_2 \overset{t}{=} Hg + 2NO_2\uparrow + O_2\uparrow$.

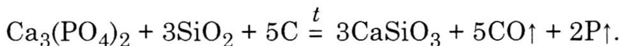
5) $2AgNO_3 \overset{t}{=} 2Ag + 2NO_2\uparrow + O_2\uparrow$.

6) $NH_4NO_3 \overset{t}{=} N_2O\uparrow + 2H_2O\uparrow$.

Fosforas ir jo junginiai

Fosforas P

G a v i m a s



$Ca_3(PO_4)_2 + 3SiO_2 + 5C \overset{t}{=} 3CaSiO_3 + 5CO\uparrow + 2P\uparrow$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $4P + 5O_2 = 2P_2O_5$.

2) $4P + 3O_2 = 2P_2O_3$ (trūkstant deguonies).

3) $2P + 5Cl_2 = 2PCl_5$.

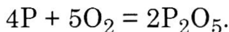
4) $3Mg + 2P = Mg_3P_2$.

5) $3P + 5HNO_3 + 2H_2O = 3H_3PO_4 + 5NO\uparrow$.

6) $4P + 3KOH + 3H_2O = PH_3\uparrow + 3KH_2PO_2$.

Fosforo(V) oksidas P_2O_5 (garuose – P_4O_{10})

G a v i m a s



$4P + 5O_2 = 2P_2O_5$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

1) $P_2O_5 + H_2O = 2HPO_3$.

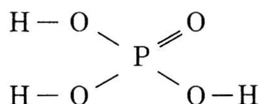
2) $P_2O_5 + 3H_2O = 2H_3PO_4$.

3) $P_2O_5 + 3CaO = Ca_3(PO_4)_2$.

4) $P_2O_5 + 6NaOH = 2Na_3PO_4 + 3H_2O$,
$P_2O_5 + 4NaOH = 2Na_2HPO_4 + H_2O$,
$P_2O_5 + 2NaOH + H_2O = 2NaH_2PO_4$.

5) $P_2O_5 + 2HNO_3 = 2HPO_3 + N_2O_5$.

Ortofosforo (fosforo) rūgštis, arba ortofosfato rūgštis H_3PO_4



Gavimas

1) $Ca_3(PO_4)_2 + 3H_2SO_4 = 3CaSO_4\downarrow + 2H_3PO_4$.
2) $3P + 5HNO_3 + 2H_2O = 3H_3PO_4 + 5NO\uparrow$.

Cheminės savybės

1) $3Ca(OH)_2 + 2H_3PO_4 = Ca_3(PO_4)_2 + 6H_2O$,
$Ca(OH)_2 + H_3PO_4 = CaHPO_4 + 2H_2O$,
$Ca(OH)_2 + 2H_3PO_4 = Ca(H_2PO_4)_2 + 2H_2O$.
2) $3Ag^+ + PO_4^{3P} = Ag_3PO_4\downarrow$.

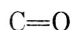
IVA GRUPĖ
Anglis ir jos junginiai

Anglis C

Cheminės savybės

1) $C + O_2 = CO_2$.
2) $2C + O_2 = 2CO$ (trūkstant deguonies).
3) $C + 2F_2 = CF_4$.
4) $Ca + 2C = CaC_2$.
5) $4Al + 3C = Al_4C_3$.
6) $2CuO + C \overset{t}{=} 2Cu + CO_2$.
7) $C + 2H_2SO_4(konc.) = CO_2\uparrow + 2SO_2\uparrow + 2H_2O$.
8) $BaSO_4 + 2C \overset{t}{=} BaS + 2CO_2$.

Anglies(II) oksidas,
arba anglies monoksidas CO


C═O

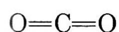
Gavimas

1) $HCOOH \xrightarrow{H_2SO_4} CO\uparrow + H_2O$.
2) $CO_2 + C \overset{t}{\rightleftharpoons} 2CO$.

Cheminės savybės

1) $2CO + O_2 = 2CO_2$.
2) $Fe_2O_3 + 3CO \overset{t}{=} 2Fe + 3CO_2$.
3) $Ni + 4CO = Ni(CO)_4$.

Anglies(IV) oksidas,
arba anglies dioksidas CO_2


O═C═O

Gavimas

1) $CaCO_3 \overset{t}{=} CaO + CO_2$.
2) $CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + H_2O + CO_2\uparrow$.

Cheminės savybės

1) $H_2O + CO_2 \rightleftharpoons H_2CO_3 \rightleftharpoons H^+ +$
$+ HCO_3^{P} \rightleftharpoons 2H^+ + CO_3^{2P}$.
2) $Na_2O + CO_2 = Na_2CO_3$.
3) $Ca(OH)_2 + CO_2 = CaCO_3\downarrow + H_2O$.
4) $Ca(OH)_2 + 2CO_2 = Ca(HCO_3)_2$.
5) $CO_2 + 2Mg \overset{t}{=} 2MgO + C$.

Silicis ir jo junginiai

Silicis Si

Gavimas

1) $SiO_2 + 2Mg \overset{t}{=} Si + 2MgO$.
2) $SiO_2 + 2C \overset{t}{=} Si + 2CO\uparrow$.

Cheminės savybės

1) $Si + 2F_2 = SiF_4\uparrow$.
2) $Si + O_2 = SiO_2$.
3) $2Mg + Si \overset{t}{=} Mg_2Si$.
4) $Si + 2NaOH + H_2O = Na_2SiO_3 + 2H_2\uparrow$.
5) $3Si + 4HNO_3 + 18HF = 3H_2[SiF_6] + 4NO\uparrow +$
$+ 8H_2O$.

Silicio dioksidas SiO_2

Gavimas


$Na_2SiO_3 + 2HCl \overset{t}{=} SiO_2\downarrow + 2NaCl + H_2O$.

Cheminės savybės

1) $CaO + SiO_2 = CaSiO_3$.
2) $SiO_2 + 2NaOH = Na_2SiO_3 + H_2O\uparrow$ (sulydžius).
3) $SiO_2 + K_2CO_3 = K_2SiO_3 + CO_2\uparrow$ (sulydžius).
4) $SiO_2 + 4HF = SiF_4\uparrow + 2H_2O$.

IA GRUPĖ
ŠARMINIAI METALAI
IR JŲ JUNGINIAI

Šarminiai metalai
(Me – Li, Na, K, Rb, Cs)

Gavimas

1) $2MeCl = 2Me + Cl_2\uparrow$ (chloridų lydalų elektrolizė).

2) $4MeOH = 4Me + 2H_2O + O_2\uparrow$ (hidroksidų lydalų elektrolizė).

Cheminės savybės

1) $2Me + 2H_2O = 2MeOH + H_2\uparrow$.
2) $4Li + O_2 = 2Li_2O$.
3) $2Na + O_2 = Na_2O_2$.
4) $K + O_2 = KO_2$.
5) $2Me + X_2 = 2MeX$ (X – halogenas).
6) $2Me + S = Me_2S$.
7) $6Me + N_2 = 2Me_3N$.
8) $2Me + H_2 = 2MeH$.

Šarminių metalų oksidai Me_2O

Gavimas

1) $Na_2O_2 + 2Na = 2Na_2O$.
2) $KO_2 + 3K = 2K_2O$.

Cheminės savybės

1) $Me_2O + H_2O = 2MeOH$.
2) $Me_2O + SO_3 = Me_2SO_4$.
3) $Me_2O + 2HCl = 2MeCl + H_2O$.

Šarminių metalų hidroksidai MeOH

Gavimas

1) $2MeCl + 2H_2O = 2MeOH + H_2\uparrow + Cl_2\uparrow$ (chloridų tirpalų elektrolizė).
2) $Me_2CO_3 + Ba(OH)_2 = BaCO_3\downarrow + 2MeOH$.

Cheminės savybės

1) $2MeOH + CO_2 = Me_2CO_3 + H_2O$.
2) $2MeOH + H_2SO_4 = Me_2SO_4 + 2H_2O$.

IIA GRUPĖ ŠARMINIŲ ŽEMIŲ METALAI IR JŲ JUNGINIAI

Šarminių žemių metalai
(Me – Be, Mg, Ca, Sr, Ba)

Gavimas

1) $BeF_2 + 2Mg \overset{t}{=} Be + 2MgF_2$.
2) $3BaO + 2Al \overset{t}{=} Al_2O_3 + 3Ba$.
3) $MeCl_2 = Me + Cl_2\uparrow$ (chloridų tirpalų elektrolizė).

Cheminės savybės

1) $Me + 2H_2O = Me(OH)_2 + H_2\uparrow$ (išskyrus Be).
2) $2Me + O_2 = 2MeO$.
3) $Ba + O_2 = BaO_2$.
4) $Me + Cl_2 = MeCl_2$.
5) $Me + S = MeS$.
6) $3Me + N_2 = Me_3N_2$.
7) $Me + H_2 = MeH_2$.
8) $Me + H_2SO_4 = MeSO_4 + H_2\uparrow$.
9) $Me + 2HCl = MeCl_2 + H_2\uparrow$.
10) $Be + 2NaOH + 2H_2O = Na_2[Be(OH)_4] + H_2\uparrow$.

Šarminių žemių metalų oksidai MeO

Gavimas

1) $MeCO_3 \overset{t}{=} MeO + CO_2$.
2) $2Me(NO_3)_2 \overset{t}{=} 2MeO + 4NO_2 + O_2$.

Cheminės savybės

1) $MeO + H_2O = Me(OH)_2$ (išskyrus BeO).
2) $MeO + SO_3 = MeSO_4$.
3) $MeO + 2HNO_3 = Me(NO_3)_2 + H_2O$.
4) $BeO + 2NaOH + H_2O = Na_2[Be(OH)_4]$.

Šarminių žemių metalų hidroksidai $Me(OH)_2$

Gavimas

$MeO + H_2O = Me(OH)_2$.

Cheminės savybės

1) $Me(OH)_2 + CO_2 = MeCO_3\downarrow + H_2O$.
2) $Me(OH)_2 + 2CH_3COOH = (CH_3COO)_2Me + 2H_2O$.
3) $Ba(OH)_2 + Na_2SO_4 = BaSO_4\downarrow + 2NaOH$.
4) $Be(OH)_2 + 2NaOH = Na_2[Be(OH)_4]$.

ALIUMINIS IR JO JUNGINIAI

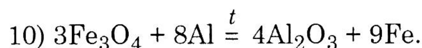
Aliuminis Al

Gavimas

$2Al_2O_3 = 4Al + 3O_2$ (Al_2O_3 lydalo elektrolizė).

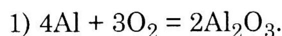
Cheminės savybės

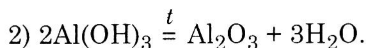
1) $2Al + 6H_2O = 2Al(OH)_3 + 3H_2\uparrow$.
2) $4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$.
3) $2Al + 3Cl_2 = 2AlCl_3$.
4) $2Al + 3S \overset{t}{=} Al_2S_3$.
5) $2Al + N_2 \overset{t}{=} 2AlN$.
6) $4Al + 3C \overset{t}{=} Al_4C_3$.
7) $2Al + 6HCl = 2AlCl_3 + 3H_2\uparrow$.
8) $2Al + 3H_2SO_4$(prask.) $= Al_2(SO_4)_3 + 3H_2\uparrow$.
9) $2Al + 2NaOH + 6H_2O = 2Na[Al(OH)_4] + 3H_2\uparrow$.


10) $3Fe_3O_4 + 8Al \overset{t}{=} 4Al_2O_3 + 9Fe$.

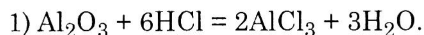
Aliuminio oksidas Al_2O_3

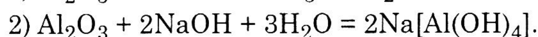
G a v i m a s

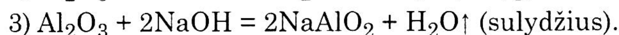

1) $4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$.


2) $2Al(OH)_3 \overset{t}{=} Al_2O_3 + 3H_2O$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s


1) $Al_2O_3 + 6HCl = 2AlCl_3 + 3H_2O$.

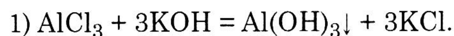

2) $Al_2O_3 + 2NaOH + 3H_2O = 2Na[Al(OH)_4]$.

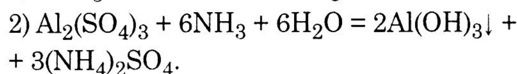

3) $Al_2O_3 + 2NaOH = 2NaAlO_2 + H_2O\uparrow$ (sulydžius).

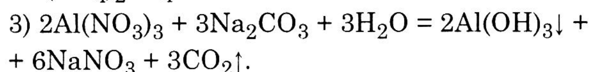

4) $Al_2O_3 + Na_2CO_3 = 2NaAlO_2 + CO_2\uparrow$ (sulydžius).

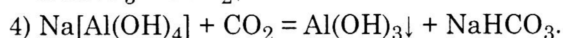
Aliuminio hidroksidas $Al(OH)_3$

G a v i m a s


1) $AlCl_3 + 3KOH = Al(OH)_3\downarrow + 3KCl$.


2) $Al_2(SO_4)_3 + 6NH_3 + 6H_2O = 2Al(OH)_3\downarrow +$
$+ 3(NH_4)_2SO_4$.


3) $2Al(NO_3)_3 + 3Na_2CO_3 + 3H_2O = 2Al(OH)_3\downarrow +$
$+ 6NaNO_3 + 3CO_2\uparrow$.


4) $Na[Al(OH)_4] + CO_2 = Al(OH)_3\downarrow + NaHCO_3$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

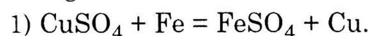

1) $Al(OH)_3 + KOH = K[Al(OH)_4]$.

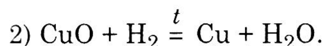

2) $Al(OH)_3 + 3HCl = AlCl_3 + 3H_2O$.

PEREINAMIEJI ELEMENTAI IR JŲ SAVYBĖS

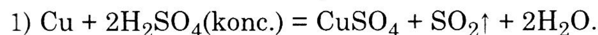
Varis ir jo junginiai

Cu   g a v i m a s

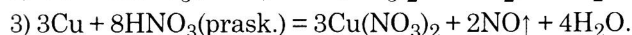

1) $CuSO_4 + Fe = FeSO_4 + Cu$.

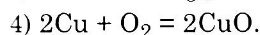

2) $CuO + H_2 \overset{t}{=} Cu + H_2O$.

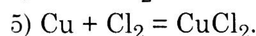
Cu   c h e m i n ė s   s a v y b ė s

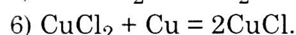

1) $Cu + 2H_2SO_4$(konc.) $= CuSO_4 + SO_2\uparrow + 2H_2O$.


2) $Cu + 4HNO_3$(konc.) $= Cu(NO_3)_2 + 2NO_2\uparrow + 2H_2O$.

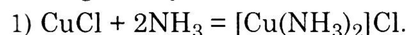

3) $3Cu + 8HNO_3$(prask.) $= 3Cu(NO_3)_2 + 2NO\uparrow + 4H_2O$.

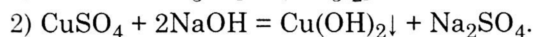

4) $2Cu + O_2 = 2CuO$.

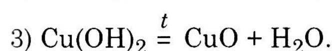

5) $Cu + Cl_2 = CuCl_2$.


6) $CuCl_2 + Cu = 2CuCl$.

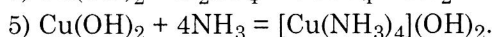
J u n g i n i ų   c h e m i n ė s   s a v y b ė s


1) $CuCl + 2NH_3 = [Cu(NH_3)_2]Cl$.


2) $CuSO_4 + 2NaOH = Cu(OH)_2\downarrow + Na_2SO_4$.

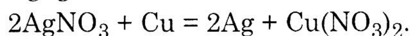

3) $Cu(OH)_2 \overset{t}{=} CuO + H_2O$.


4) $Cu(OH)_2 + H_2SO_4 = CuSO_4 + 2H_2O$.

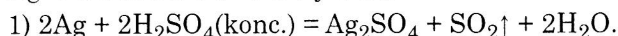

5) $Cu(OH)_2 + 4NH_3 = [Cu(NH_3)_4](OH)_2$.

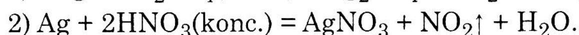
Sidabras ir jo junginiai

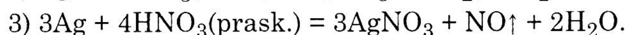
Ag   g a v i m a s


$2AgNO_3 + Cu = 2Ag + Cu(NO_3)_2$.

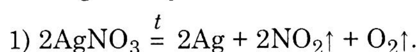
Ag   c h e m i n ė s   s a v y b ė s


1) $2Ag + 2H_2SO_4$(konc.) $= Ag_2SO_4 + SO_2\uparrow + 2H_2O$.

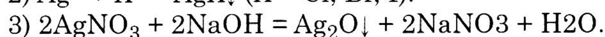

2) $Ag + 2HNO_3$(konc.) $= AgNO_3 + NO_2\uparrow + H_2O$.

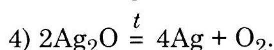

3) $3Ag + 4HNO_3$(prask.) $= 3AgNO_3 + NO\uparrow + 2H_2O$.

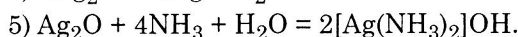
J u n g i n i ų   c h e m i n ė s   s a v y b ė s


1) $2AgNO_3 \overset{t}{=} 2Ag + 2NO_2\uparrow + O_2\uparrow$.


2) $Ag^+ + X^- = AgX\downarrow$ (X = Cl, Br, I).

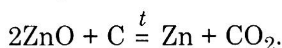

3) $2AgNO_3 + 2NaOH = Ag_2O\downarrow + 2NaNO3 + H2O$.


4) $2Ag_2O \overset{t}{=} 4Ag + O_2$.

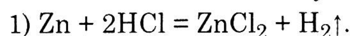

5) $Ag_2O + 4NH_3 + H_2O = 2[Ag(NH_3)_2]OH$.

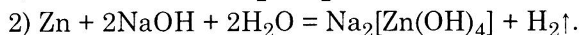
Cinkas ir jo junginiai

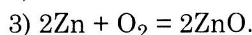
Zn   g a v i m a s


$2ZnO + C \overset{t}{=} Zn + CO_2$.

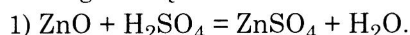
Zn   c h e m i n ė s   s a v y b ė s


1) $Zn + 2HCl = ZnCl_2 + H_2\uparrow$.

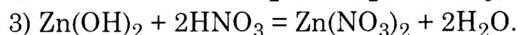

2) $Zn + 2NaOH + 2H_2O = Na_2[Zn(OH)_4] + H_2\uparrow$.


3) $2Zn + O_2 = 2ZnO$.

J u n g i n i ų   c h e m i n ė s   s a v y b ė s


1) $ZnO + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2O$.

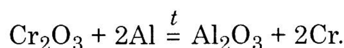

2) $ZnO + 2NaOH + H_2O = Na_2[Zn(OH)_4]$.


3) $Zn(OH)_2 + 2HNO_3 = Zn(NO_3)_2 + 2H_2O$.

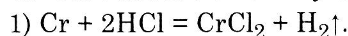

4) $Zn(OH)_2 + 2NaOH = Na_2[Zn(OH)_4]$.

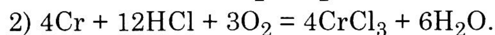
Chromas ir jo junginiai

Cr   g a v i m a s

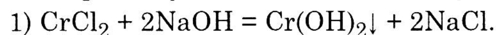

$Cr_2O_3 + 2Al \overset{t}{=} Al_2O_3 + 2Cr$.

Cr   c h e m i n ė s   s a v y b ė s

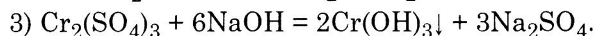

1) $Cr + 2HCl = CrCl_2 + H_2\uparrow$.


2) $4Cr + 12HCl + 3O_2 = 4CrCl_3 + 6H_2O$.

J u n g i n i ų   c h e m i n ė s   s a v y b ė s

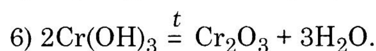

1) $CrCl_2 + 2NaOH = Cr(OH)_2\downarrow + 2NaCl$.


2) $Cr(OH)_2 + 2HCl = CrCl_2 + 2H_2O$.


3) $Cr_2(SO_4)_3 + 6NaOH = 2Cr(OH)_3\downarrow + 3Na_2SO_4$.


4) $2Cr(OH)_3 + 3H_2SO_4 = Cr_2(SO_4)_3 + 6H_2O$.

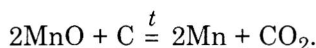

5) $Cr(OH)_3 + KOH = K[Cr(OH)_4]$.


6) $2Cr(OH)_3 \overset{t}{=} Cr_2O_3 + 3H_2O$.

7) $Cr_2O_3 + 6HCl = 2CrCl_3 + 3H_2O$.
8) $Cr_2O_3 + 2NaOH = 2NaCrO_2 + H_2O\uparrow$ (sulydžius).
9) $CrO_3 + 2KOH = K_2CrO_4 + H_2O$.
10) $2K_2CrO_4 + H_2SO_4 = K_2Cr_2O_7 + K_2SO_4 + H_2O$.
11) $K_2CrO_4 + BaCl_2 = BaCrO_4\downarrow + 2KCl$.
12) $K_2Cr_2O_7 + 2KOH = 2K_2CrO_4 + H_2O$.
13) $K_2Cr_2O_7 + 14HCl = 3Cl_2\uparrow + 2KCl + 2CrCl_3 + 7H_2O$.

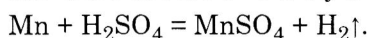
Manganas ir jo junginiai

Mn gavimas



$2MnO + C \overset{t}{=} 2Mn + CO_2$.

Mn cheminės savybės

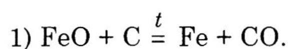


$Mn + H_2SO_4 = MnSO_4 + H_2\uparrow$.

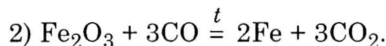
Junginių cheminės savybės
1) $MnSO_4 + Ba(NO_3)_2 = BaSO_4\downarrow + Mn(NO_3)_2$.
2) $Mn(NO_3)_2 \overset{t}{=} MnO_2 + 2NO_2$.
3) $MnO_2 + 4HCl = MnCl_2 + Cl_2\uparrow + 2H_2O$.
4) $K_2SO_3 + 2KMnO_4 + 2KOH = 2K_2MnO_4 + K_2SO_4 + H_2O$.
5) $Mn_2O_7 + 2KOH = 2KMnO_4 + H_2O$.
6) $MnO_4^{P} + 8H^+ + 5e^- = Mn^{2+} + 4H_2O$ (rūgščioje terpėje).
7) $MnO_4^{P} + e^- = MnO_4^{2P}$ (šarminėje terpėje).
8) $MnO_4^{P} + 2H_2O + 3e^- = MnO_2 + 4OH^-$ (neutralioje terpėje).

Geležis ir jos junginiai

Fe gavimas



1) $FeO + C \overset{t}{=} Fe + CO$.



2) $Fe_2O_3 + 3CO \overset{t}{=} 2Fe + 3CO_2$.

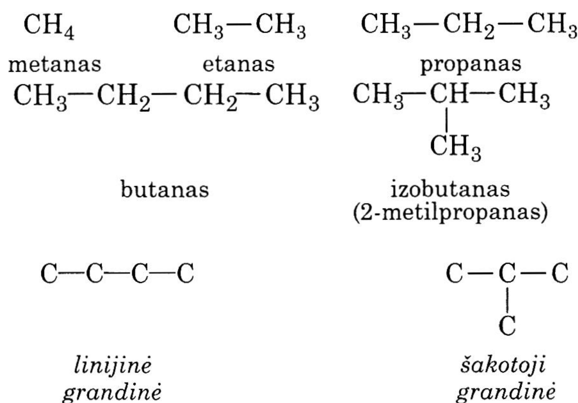
Fe cheminės savybės
1) $4Fe + 3O_2 + 6H_2O = 4Fe(OH)_3$.
2) $2Fe + 3Cl_2 = 2FeCl_3$.
3) $Fe + H_2SO_4 = FeSO_4 + H_2\uparrow$.
4) $2Fe + 6H_2SO_4(konc.) \overset{t}{=} Fe_2(SO_4)_3 + 3SO_2\uparrow + 6H_2O$.
5) $Fe + 6HNO_3(konc.) \overset{t}{=} Fe(NO_3)_3 + 3NO_2\uparrow + 3H_2O$.

Junginių cheminės savybės
1) $FeSO_4 + 2NaOH = Fe(OH)_2\downarrow + Na_2SO_4$.
2) $Fe(OH)_2 + H_2SO_4 = FeSO_4 + 2H_2O$.
3) $Fe(OH)_2 \overset{t}{=} FeO + H_2O$.
4) $4Fe(OH)_2 + O_2 + 2H_2O = 4Fe(OH)_3$.
5) $3FeCl_2 + 2K_3[Fe(CN)_6] = Fe_3[Fe(CN)_6]_2\downarrow + 6KCl$.
6) $4FeS_2 + 11O_2 = 2Fe_2O_3 + 8SO_2$.
7) $Fe_2O_3 + 3H_2SO_4 = Fe_2(SO_4)_3 + 3H_2O$.
8) $FeCl_3 + 3NaOH = Fe(OH)_3\downarrow + 3NaCl$.
9) $Fe(OH)_3 + 3HCl = FeCl_3 + 3H_2O$.
10) $2FeCl_3 + H_2S = S + 2FeCl_2 + 2HCl$.
11) $4FeCl_3 + 3K_4[Fe(CN)_6] = Fe_4[Fe(CN)_6]_3\downarrow + 12KCl$.

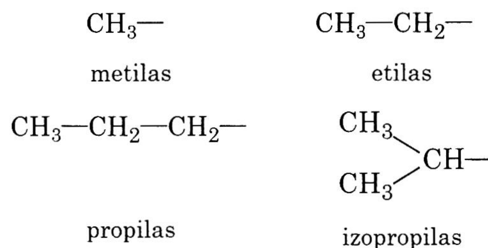
ORGANINĖ CHEMIJA

SOTIEJI ANGLIAVANDENILIAI

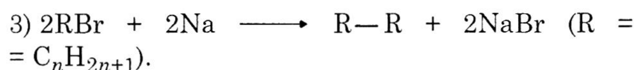
Alkanai C_nH_{2n+2}



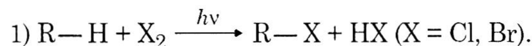
Sočiųjų angliavandenilių radikalai:

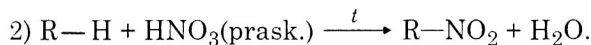


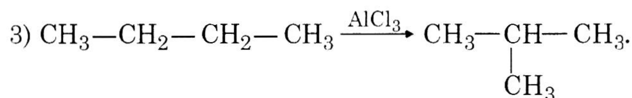
Gavimas
1) $CH_3COONa + NaOH \xrightarrow{t} CH_4\uparrow + Na_2CO_3$.
2) $CH_3—CH{=}CH_2 + H_2 \xrightarrow{Ni,\ t} CH_3—CH_2—CH_3$.

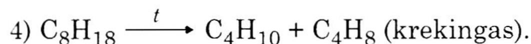

3) $2RBr + 2Na \longrightarrow R{-}R + 2NaBr$ ($R = C_nH_{2n+1}$).

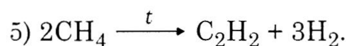
C h e m i n ė s s a v y b ė s

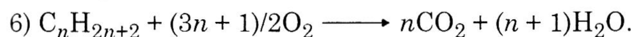

1) $R{-}H + X_2 \xrightarrow{h\nu} R{-}X + HX$ ($X = Cl, Br$).


2) $R{-}H + HNO_3(\text{prask.}) \xrightarrow{t} R{-}NO_2 + H_2O$.

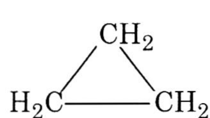

3) $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3 \xrightarrow{AlCl_3} CH_3{-}CH(CH_3){-}CH_3$.

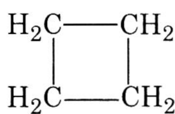

4) $C_8H_{18} \xrightarrow{t} C_4H_{10} + C_4H_8$ (krekingas).

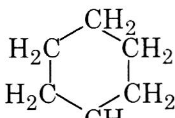

5) $2CH_4 \xrightarrow{t} C_2H_2 + 3H_2$.


6) $C_nH_{2n+2} + (3n + 1)/2O_2 \longrightarrow nCO_2 + (n + 1)H_2O$.

Cikloalkanai C_nH_{2n}

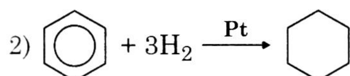

ciklopropanas


ciklobutanas

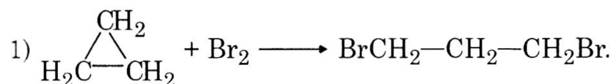

cikloheksanas

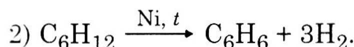
G a v i m a s


1) $Br{-}(CH_2)_n{-}Br + Mg \xrightarrow{t} C_nH_{2n} + MgBr_2$.


2) benzenas $+ 3H_2 \xrightarrow{Pt}$ cikloheksanas

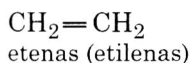
C h e m i n ė s s a v y b ė s

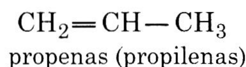

1) ciklopropanas $+ Br_2 \longrightarrow BrCH_2{-}CH_2{-}CH_2Br$.

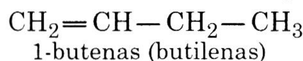

2) $C_6H_{12} \xrightarrow{Ni,\ t} C_6H_6 + 3H_2$.

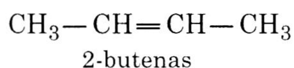
NESOTIEJI ANGLIAVANDENILIAI, TURINTYS DVIGUBŲJŲ RYŠIŲ

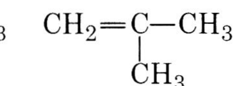
Alkenai C_nH_{2n}


$CH_2{=}CH_2$
etenas (etilenas)

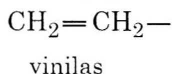

$CH_2{=}CH{-}CH_3$
propenas (propilenas)

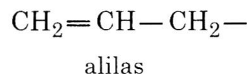

$CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$
1-butenas (butilenas)


$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_3$
2-butenas

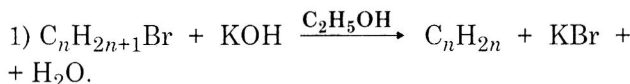

$CH_2{=}C(CH_3){-}CH_3$
izobutenas (2-metilpropenas)

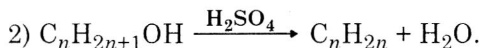
Nesočiųjų angliavandenilių radikalai:

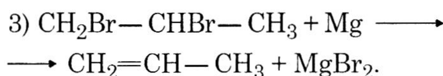

$CH_2{=}CH_2{-}$
vinilas

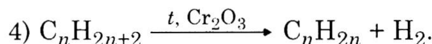

$CH_2{=}CH{-}CH_2{-}$
alilas

G a v i m a s

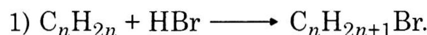

1) $C_nH_{2n+1}Br + KOH \xrightarrow{C_2H_5OH} C_nH_{2n} + KBr + H_2O$.

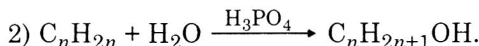

2) $C_nH_{2n+1}OH \xrightarrow{H_2SO_4} C_nH_{2n} + H_2O$.

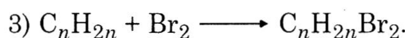

3) $CH_2Br{-}CHBr{-}CH_3 + Mg \longrightarrow CH_2{=}CH{-}CH_3 + MgBr_2$.

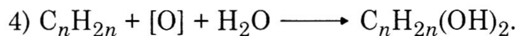

4) $C_nH_{2n+2} \xrightarrow{t,\ Cr_2O_3} C_nH_{2n} + H_2$.

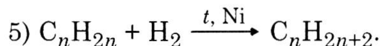
C h e m i n ė s s a v y b ė s

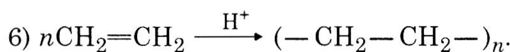

1) $C_nH_{2n} + HBr \longrightarrow C_nH_{2n+1}Br$.


2) $C_nH_{2n} + H_2O \xrightarrow{H_3PO_4} C_nH_{2n+1}OH$.

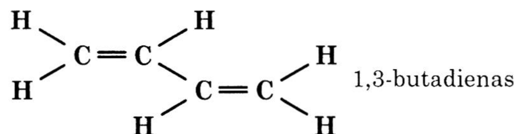

3) $C_nH_{2n} + Br_2 \longrightarrow C_nH_{2n}Br_2$.

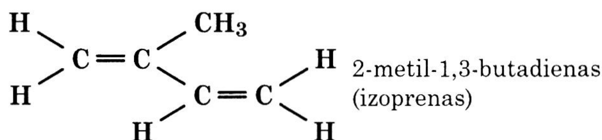

4) $C_nH_{2n} + [O] + H_2O \longrightarrow C_nH_{2n}(OH)_2$.


5) $C_nH_{2n} + H_2 \xrightarrow{t,\ Ni} C_nH_{2n+2}$.

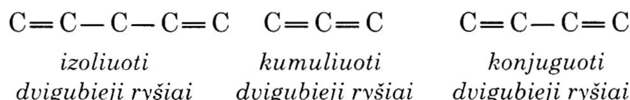

6) $nCH_2{=}CH_2 \xrightarrow{H^+} ({-}CH_2{-}CH_2{-})_n$.

Alkadienai (dienai) C_nH_{2n-2}

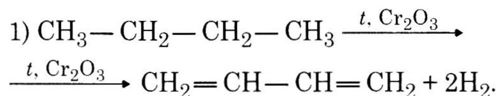

1,3-butadienas

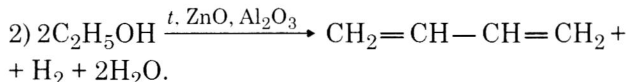

2-metil-1,3-butadienas (izoprenas)

D v i g u b ų j ų r y š i ų t i p a i :

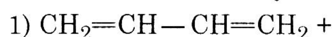

$C{=}C{-}C{-}C{=}C$ *izoliuoti dvigubieji ryšiai*; $C{=}C{=}C$ *kumuliuoti dvigubieji ryšiai*; $C{=}C{-}C{=}C$ *konjuguoti dvigubieji ryšiai*

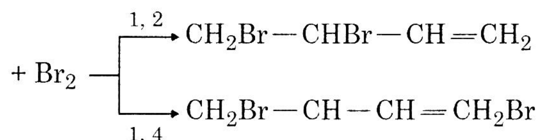
G a v i m a s

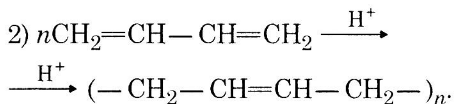

1) $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3 \xrightarrow{t,\ Cr_2O_3} CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2 + 2H_2$.

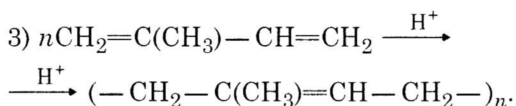

2) $2C_2H_5OH \xrightarrow{t,\ ZnO,\ Al_2O_3} CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2 + H_2 + 2H_2O$.

Cheminės savybės


1) $CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2 +$


$+ Br_2 \xrightarrow{1,\,2} CH_2Br{-}CHBr{-}CH{=}CH_2$
$+ Br_2 \xrightarrow{1,\,4} CH_2Br{-}CH{=}CH{-}CH_2Br$


2) $nCH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow{H^+}$
$\xrightarrow{H^+} (-CH_2{-}CH{=}CH{-}CH_2-)_n.$

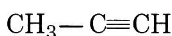

3) $nCH_2{=}C(CH_3){-}CH{=}CH_2 \xrightarrow{H^+}$
$\xrightarrow{H^+} (-CH_2{-}C(CH_3){=}CH{-}CH_2-)_n.$

NESOTIEJI ANGLIAVANDENILIAI, TURINTYS TRIGUBŲJŲ RYŠIŲ

Alkinai C_nH_{2n-2}


$HC{\equiv}CH$

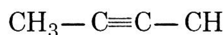
etinas (acetilenas)


$CH_3{-}C{\equiv}CH$

propinas

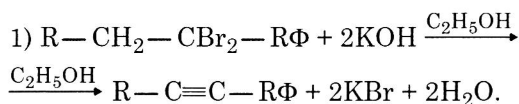

$CH_3{-}CH_2{-}C{\equiv}C$

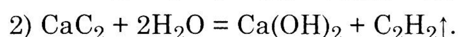
1-butinas


$CH_3{-}C{\equiv}C{-}CH$

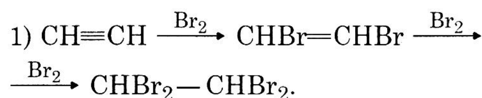
2-butinas

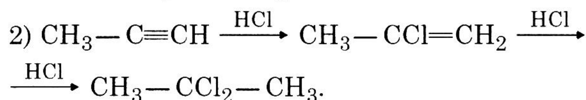
Gavimas

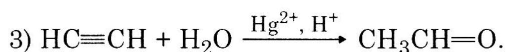

1) $R{-}CH_2{-}CBr_2{-}R\Phi + 2KOH \xrightarrow{C_2H_5OH}$
$\xrightarrow{C_2H_5OH} R{-}C{\equiv}C{-}R\Phi + 2KBr + 2H_2O.$

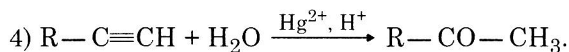

2) $CaC_2 + 2H_2O = Ca(OH)_2 + C_2H_2\uparrow.$

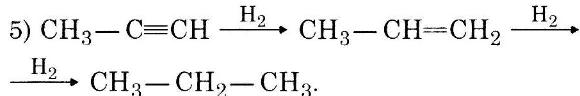
Cheminės savybės

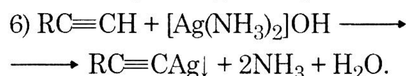

1) $CH{\equiv}CH \xrightarrow{Br_2} CHBr{=}CHBr \xrightarrow{Br_2}$
$\xrightarrow{Br_2} CHBr_2{-}CHBr_2.$

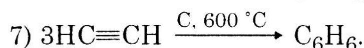

2) $CH_3{-}C{\equiv}CH \xrightarrow{HCl} CH_3{-}CCl{=}CH_2 \xrightarrow{HCl}$
$\xrightarrow{HCl} CH_3{-}CCl_2{-}CH_3.$


3) $HC{\equiv}CH + H_2O \xrightarrow{Hg^{2+},\,H^+} CH_3CH{=}O.$


4) $R{-}C{\equiv}CH + H_2O \xrightarrow{Hg^{2+},\,H^+} R{-}CO{-}CH_3.$

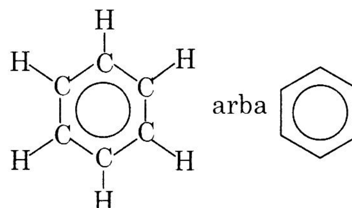

5) $CH_3{-}C{\equiv}CH \xrightarrow{H_2} CH_3{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow{H_2}$
$\xrightarrow{H_2} CH_3{-}CH_2{-}CH_3.$


6) $RC{\equiv}CH + [Ag(NH_3)_2]OH \longrightarrow$
$\longrightarrow RC{\equiv}CAg\downarrow + 2NH_3 + H_2O.$

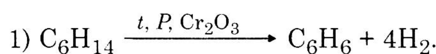

7) $3HC{\equiv}CH \xrightarrow{C,\ 600\ ^\circ C} C_6H_6.$

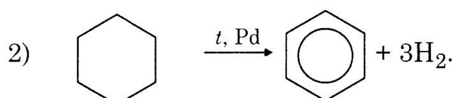
AROMATINIAI ANGLIAVANDENILIAI (ARENAI)

Benzenas C_6H_6

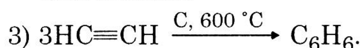


Gavimas

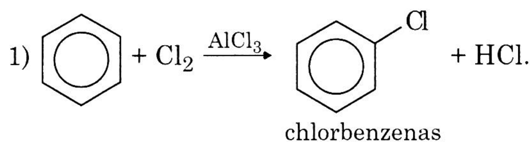

1) $C_6H_{14} \xrightarrow{t,\ P,\ Cr_2O_3} C_6H_6 + 4H_2.$



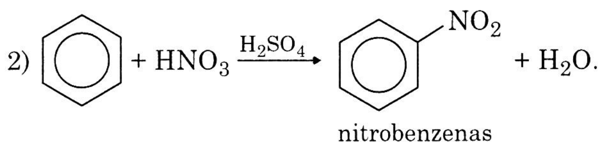
cikloheksanas


3) $3HC{\equiv}CH \xrightarrow{C,\ 600\ ^\circ C} C_6H_6.$

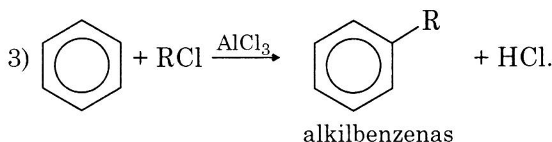
Cheminės savybės



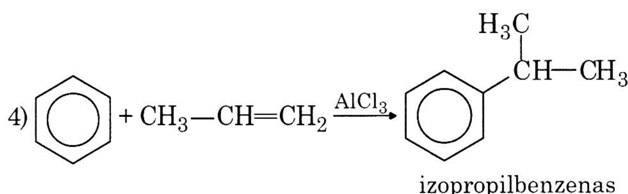
chlorbenzenas



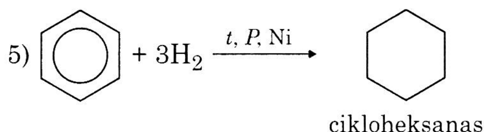
nitrobenzenas



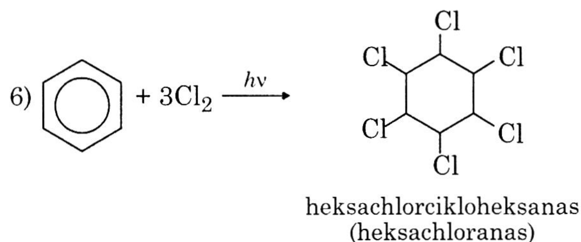
alkilbenzenas



izopropilbenzenas

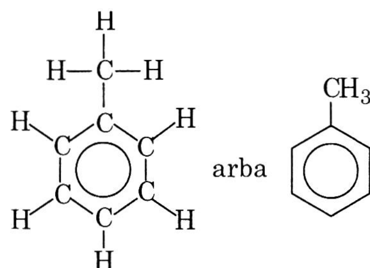


cikloheksanas

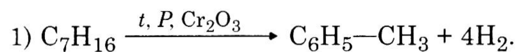


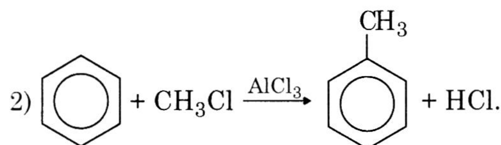
heksachlorcikloheksanas
(heksachloranas)

Toluenas C_7H_8

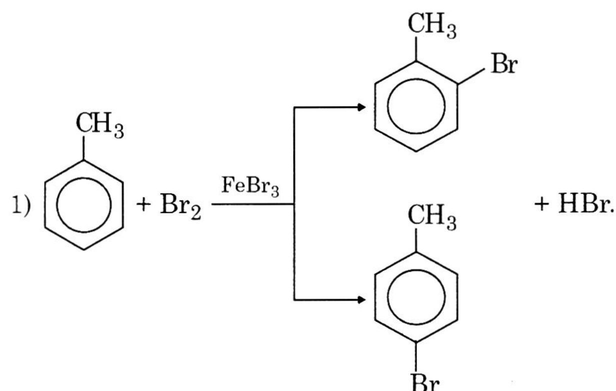


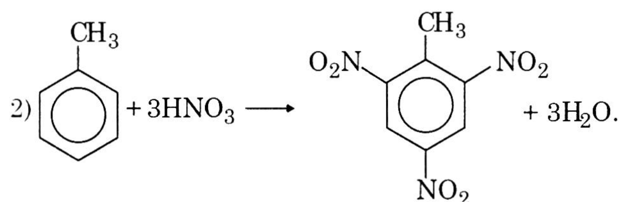
Gavimas

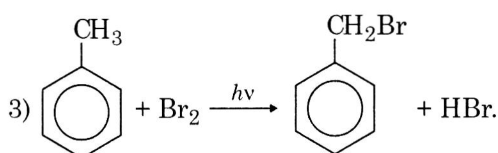


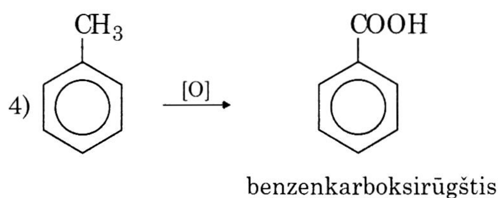


Cheminės savybės





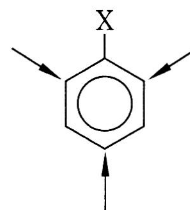




benzenkarboksirūgštis

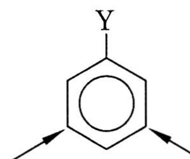
Orientavimo taisyklės pakaitų reakcijose

Orientantai į *orto-* ir *para-* padėtis:



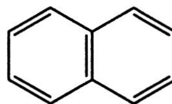
X = OH, NH_2, Hal, C_nH_{2n+1}
Rodyklės rodo pagrindines kryptis
pakaitų reakcijose

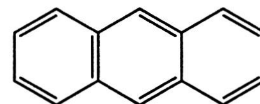
Orientantai į *meta-* padėtį:

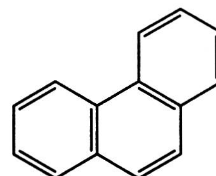


Y = NO_2, CHO, COOH, COOR
Rodyklės rodo pagrindinę kryptį
pakaitų reakcijose

Kondensuotieji aromatiniai angliavandeniliai

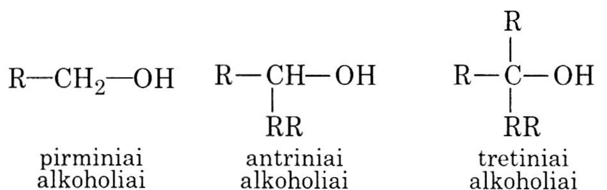

naftalenas

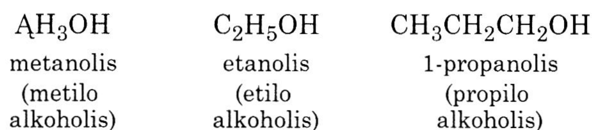

antracenas

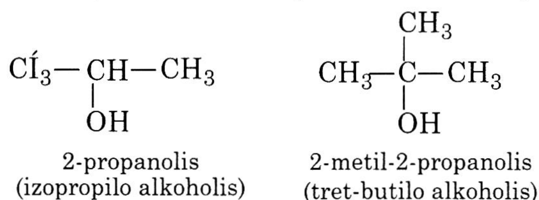

fenantrenas

HIDROKSIJUNGINIAI

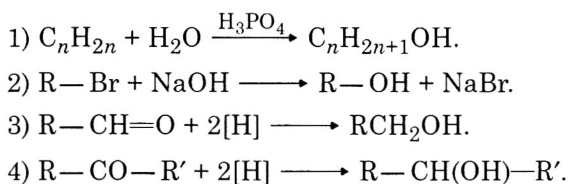
Vienhidroksiliai alkoholiai $C_nH_{2n+1}OH$







Gavimas



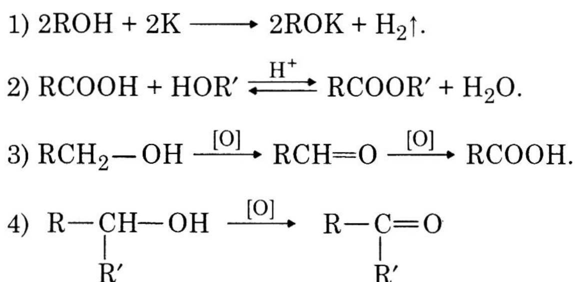
1) $C_nH_{2n} + H_2O \xrightarrow{H_3PO_4} C_nH_{2n+1}OH.$

2) $R—Br + NaOH \longrightarrow R—OH + NaBr.$

3) $R—CH{=}O + 2[H] \longrightarrow RCH_2OH.$

4) $R—CO—R' + 2[H] \longrightarrow R—CH(OH)—R'.$

Cheminės savybės

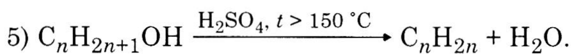


1) $2ROH + 2K \longrightarrow 2ROK + H_2\uparrow.$

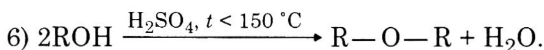
2) $RCOOH + HOR' \overset{H^+}{\rightleftarrows} RCOOR' + H_2O.$

3) $RCH_2—OH \xrightarrow{[O]} RCH{=}O \xrightarrow{[O]} RCOOH.$

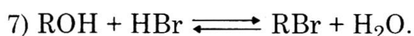
4) $R—CH(R')—OH \xrightarrow{[O]} R—C(R'){=}O$



5) $C_nH_{2n+1}OH \xrightarrow{H_2SO_4,\ t > 150\ °C} C_nH_{2n} + H_2O.$

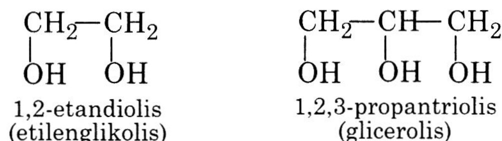


6) $2ROH \xrightarrow{H_2SO_4,\ t < 150\ °C} R—O—R + H_2O.$

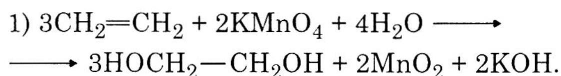


7) $ROH + HBr \rightleftarrows RBr + H_2O.$

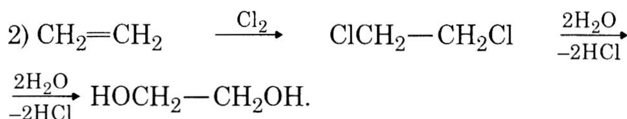
Daugiahidroksiliai alkoholiai $R(OH)_n$



Gavimas

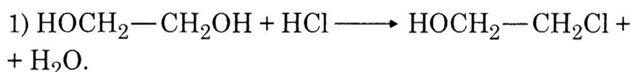


1) $3CH_2{=}CH_2 + 2KMnO_4 + 4H_2O \longrightarrow$
$\longrightarrow 3HOCH_2—CH_2OH + 2MnO_2 + 2KOH.$

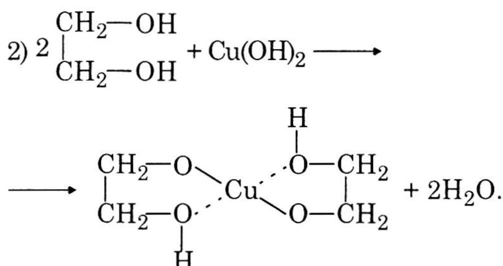


2) $CH_2{=}CH_2 \xrightarrow{Cl_2} ClCH_2—CH_2Cl \xrightarrow[-2HCl]{2H_2O}$
$\xrightarrow[-2HCl]{2H_2O} HOCH_2—CH_2OH.$

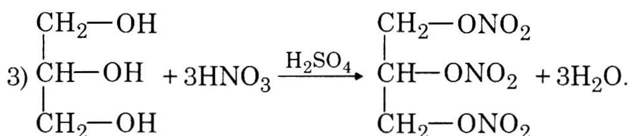
Cheminės savybės



1) $HOCH_2—CH_2OH + HCl \longrightarrow HOCH_2—CH_2Cl +$
$+ H_2O.$

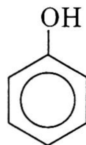


2) $2\ CH_2(OH)—CH_2(OH) + Cu(OH)_2 \longrightarrow$ (vario glikoliatas) $+ 2H_2O.$

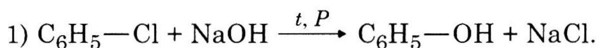


3) $CH_2(OH)—CH(OH)—CH_2(OH) + 3HNO_3 \xrightarrow{H_2SO_4} CH_2(ONO_2)—CH(ONO_2)—CH_2(ONO_2) + 3H_2O.$

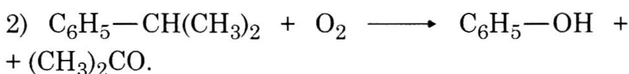
Fenolis C_6H_5OH



Gavimas

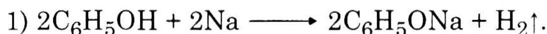


1) $C_6H_5—Cl + NaOH \xrightarrow{t,\ P} C_6H_5—OH + NaCl.$

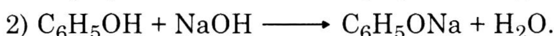


2) $C_6H_5—CH(CH_3)_2 + O_2 \longrightarrow C_6H_5—OH +$
$+ (CH_3)_2CO.$

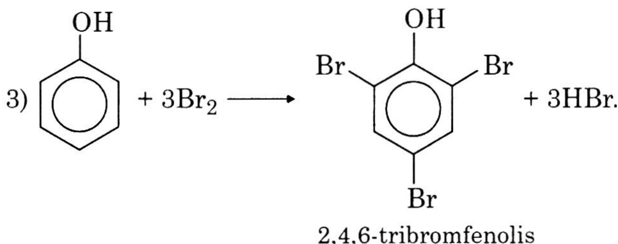
Cheminės savybės

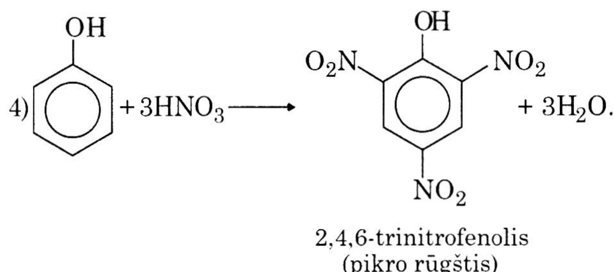


1) $2C_6H_5OH + 2Na \longrightarrow 2C_6H_5ONa + H_2\uparrow.$



2) $C_6H_5OH + NaOH \longrightarrow C_6H_5ONa + H_2O.$

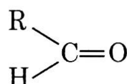


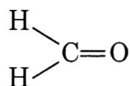


2,4,6-trinitrofenolis
(pikro rūgštis)

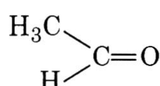
KARBONILINIAI JUNGINIAI

Aldehidai $C_nH_{2n}O$



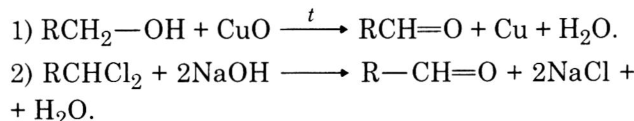


metanalis
(formaldehidas, skruzdžių rūgšties aldehidas)



etanalis
(acetaldehidas, acto rūgšties aldehidas)

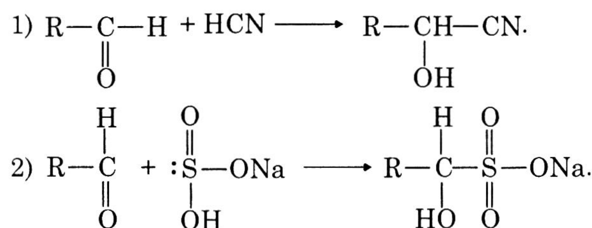
G a v i m a s

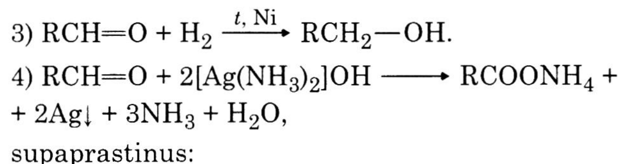


1) $RCH_2{-}OH + CuO \xrightarrow{t} RCH{=}O + Cu + H_2O$.

2) $RCHCl_2 + 2NaOH \longrightarrow R{-}CH{=}O + 2NaCl + H_2O$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s



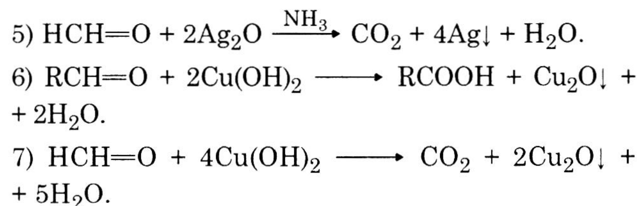


4) $RCH{=}O + 2[Ag(NH_3)_2]OH \longrightarrow RCOONH_4 + 2Ag\downarrow + 3NH_3 + H_2O$,

supaprastinus:



$RCH{=}O + Ag_2O \xrightarrow{NH_3} RCOOH + 2Ag\downarrow$.

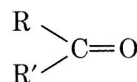


5) $HCH{=}O + 2Ag_2O \xrightarrow{NH_3} CO_2 + 4Ag\downarrow + H_2O$.

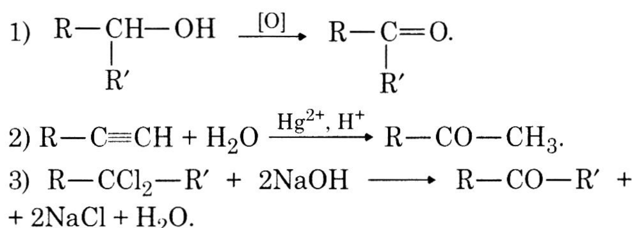
6) $RCH{=}O + 2Cu(OH)_2 \longrightarrow RCOOH + Cu_2O\downarrow + 2H_2O$.

7) $HCH{=}O + 4Cu(OH)_2 \longrightarrow CO_2 + 2Cu_2O\downarrow + 5H_2O$.

Ketonai $C_nH_{2n}O$



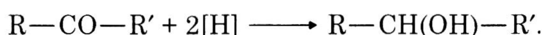
G a v i m a s



2) $R{-}C{\equiv}CH + H_2O \xrightarrow{Hg^{2+},\ H^+} R{-}CO{-}CH_3$.

3) $R{-}CCl_2{-}R' + 2NaOH \longrightarrow R{-}CO{-}R' + 2NaCl + H_2O$.

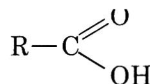
C h e m i n ė s   s a v y b ė s

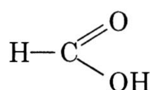


$R{-}CO{-}R' + 2[H] \longrightarrow R{-}CH(OH){-}R'$.

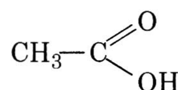
KARBOKSIRŪGŠTYS IR JŲ DARINIAI

Sočiosios monokarboksirūgštys $C_nH_{2n}O_2$



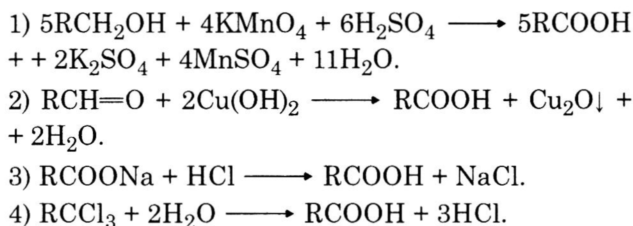


metano
(skruzdžių) rūgštis



etano
(acto) rūgštis

G a v i m a s



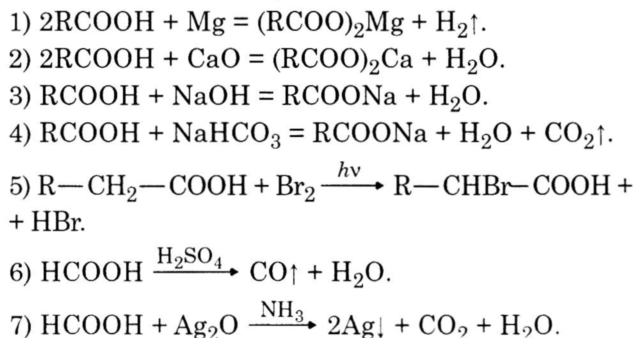
1) $5RCH_2OH + 4KMnO_4 + 6H_2SO_4 \longrightarrow 5RCOOH + 2K_2SO_4 + 4MnSO_4 + 11H_2O$.

2) $RCH{=}O + 2Cu(OH)_2 \longrightarrow RCOOH + Cu_2O\downarrow + 2H_2O$.

3) $RCOONa + HCl \longrightarrow RCOOH + NaCl$.

4) $RCCl_3 + 2H_2O \longrightarrow RCOOH + 3HCl$.

C h e m i n ė s   s a v y b ė s



1) $2RCOOH + Mg = (RCOO)_2Mg + H_2\uparrow$.

2) $2RCOOH + CaO = (RCOO)_2Ca + H_2O$.

3) $RCOOH + NaOH = RCOONa + H_2O$.

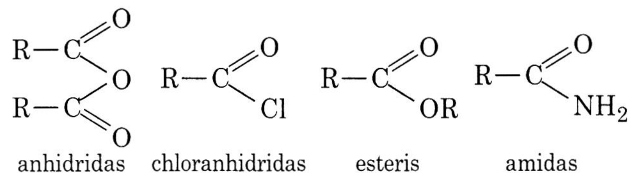
4) $RCOOH + NaHCO_3 = RCOONa + H_2O + CO_2\uparrow$.

5) $R{-}CH_2{-}COOH + Br_2 \xrightarrow{h\nu} R{-}CHBr{-}COOH + HBr$.

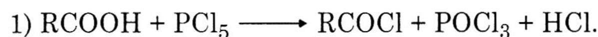
6) $HCOOH \xrightarrow{H_2SO_4} CO\uparrow + H_2O$.

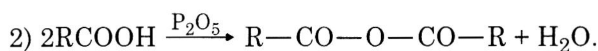
7) $HCOOH + Ag_2O \xrightarrow{NH_3} 2Ag\downarrow + CO_2 + H_2O$.

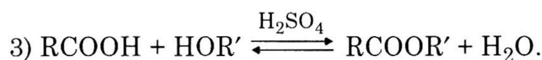
Karboksirūgščių funkciniai dariniai
R—CO—X



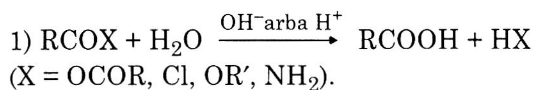
Gavimas


1) $RCOOH + PCl_5 \longrightarrow RCOCl + POCl_3 + HCl.$


2) $2RCOOH \xrightarrow{P_2O_5} R{-}CO{-}O{-}CO{-}R + H_2O.$

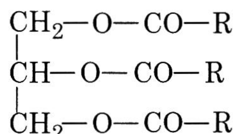

3) $RCOOH + HOR' \xrightleftharpoons{H_2SO_4} RCOOR' + H_2O.$

Cheminės savybės

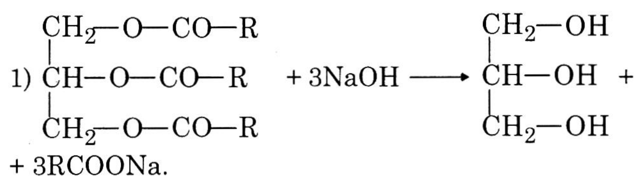

1) $RCOX + H_2O \xrightarrow{OH^- \text{ arba } H^+} RCOOH + HX$
$(X = OCOR, Cl, OR', NH_2).$

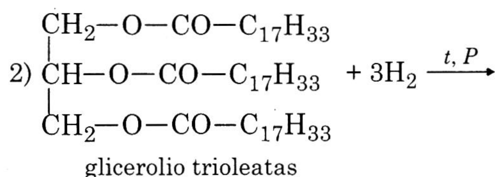

2) $RCOOR' + NaOH \longrightarrow RCOONa + R'OH.$

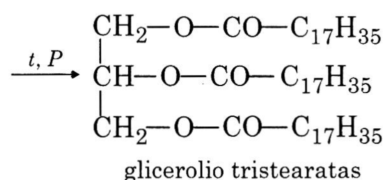
Riebalai



Cheminės savybės


+ 3RCOONa.

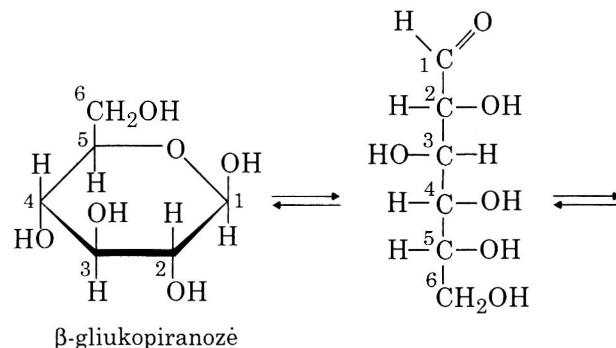


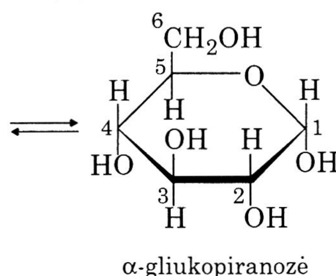


ANGLIAVANDENIAI

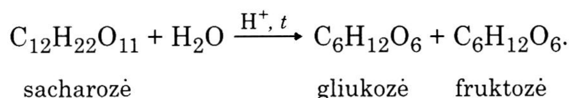
$C_m(H_2O)_n$

Gliukozė $C_6H_{12}O_6$

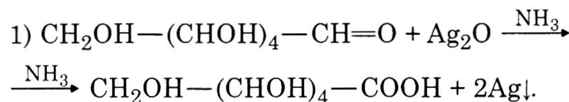


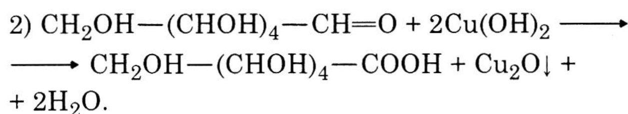


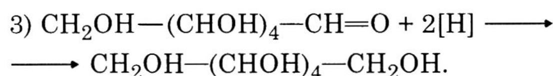
Gavimas

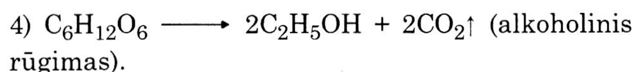

$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \xrightarrow{H^+,\, t} C_6H_{12}O_6 + C_6H_{12}O_6.$
sacharozė gliukozė fruktozė

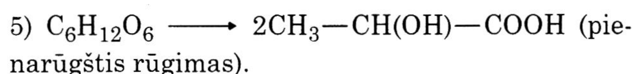
Cheminės savybės

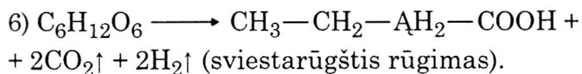

1) $CH_2OH{-}(CHOH)_4{-}CH{=}O + Ag_2O \xrightarrow{NH_3} CH_2OH{-}(CHOH)_4{-}COOH + 2Ag\downarrow.$


2) $CH_2OH{-}(CHOH)_4{-}CH{=}O + 2Cu(OH)_2 \longrightarrow CH_2OH{-}(CHOH)_4{-}COOH + Cu_2O\downarrow + 2H_2O.$


3) $CH_2OH{-}(CHOH)_4{-}CH{=}O + 2[H] \longrightarrow CH_2OH{-}(CHOH)_4{-}CH_2OH.$

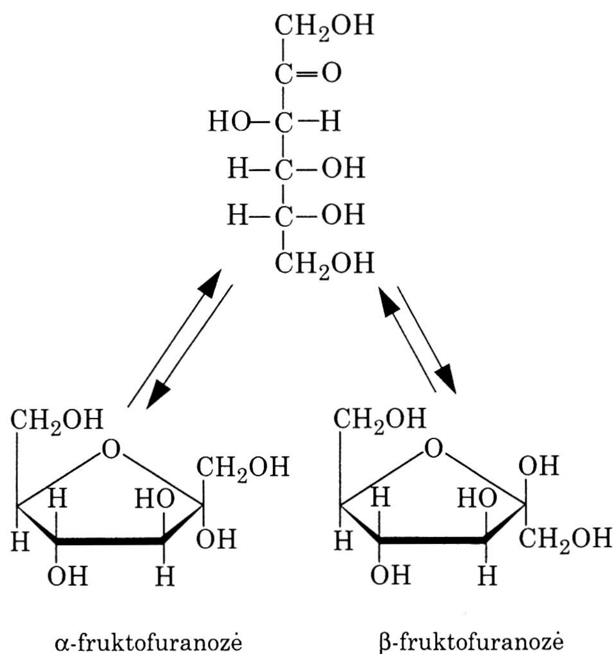

4) $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2\uparrow$ (alkoholinis rūgimas).


5) $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow 2CH_3{-}CH(OH){-}COOH$ (pienarūgštis rūgimas).

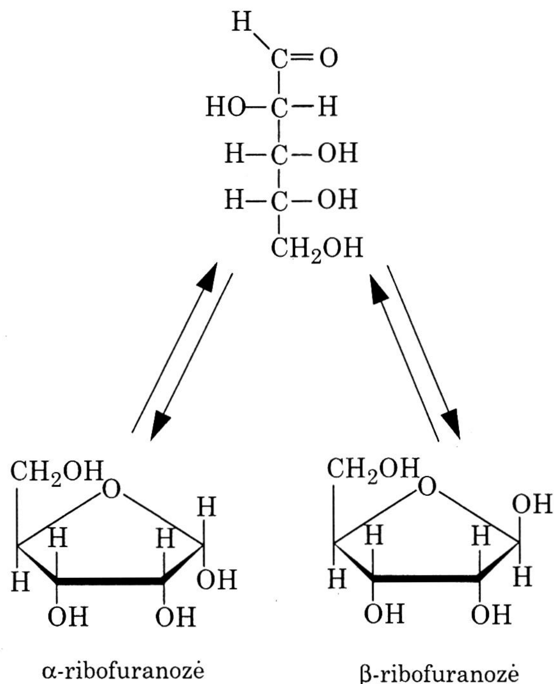


6) $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow CH_3—CH_2—CH_2—COOH +$
$+ 2CO_2\uparrow + 2H_2\uparrow$ (sviestarūgštis rūgimas).

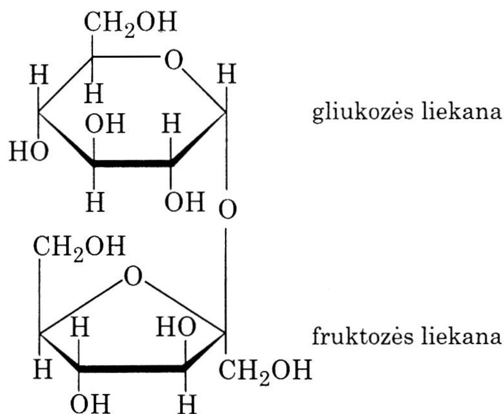
Fruktozė $C_6H_{12}O_6$



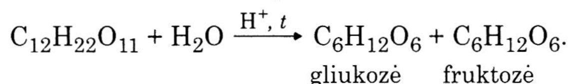
Ribozė $C_5H_{10}O_5$



Sacharozė $C_{12}H_{22}O_{11}$

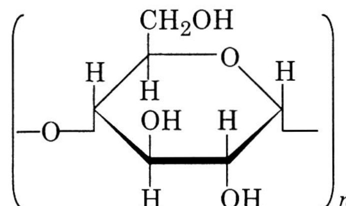


Cheminės savybės

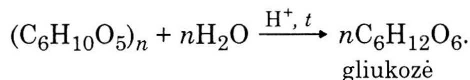


$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \xrightarrow{H^+,\ t} C_6H_{12}O_6 + C_6H_{12}O_6.$
gliukozė fruktozė

Krakmolas $(C_6H_{10}O_5)_n$

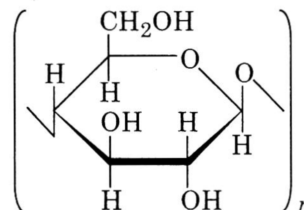


Cheminės savybės



$(C_6H_{10}O_5)_n + nH_2O \xrightarrow{H^+,\ t} nC_6H_{12}O_6.$
gliukozė

Celiuliozė $(C_6H_{10}O_5)_n$



Cheminės savybės

1) $(C_6H_{10}O_5)_n + nH_2O \xrightarrow{H^+,\ t} nC_6H_{12}O_6.$
gliukozė

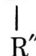
2) $(C_6H_7O_2(OH)_3)_n + 3nCH_3COOH \longrightarrow$
$\longrightarrow (C_6H_7O_2(OCOCH_3)_3)_n + 3nH_2O.$
triacetilceliuliozė

3) $(C_6H_7O_2(OH)_3)_n + 3nHNO_3 \longrightarrow$
$\longrightarrow (C_6H_7O_2(ONO_2)_3)_n + 3nH_2O.$
trinitroceliuliozė

AMINAI. AMINORŪGŠTYS

Aminai $C_nH_{2n+3}N$



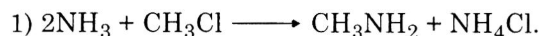



$R{-}NH_2$ — pirminiai aminai

$R{-}NH{-}RR'$ — antriniai aminai

$R{-}N(R''){-}R'$ — tretiniai aminai

G a v i m a s

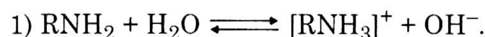


1) $2NH_3 + CH_3Cl \longrightarrow CH_3NH_2 + NH_4Cl.$

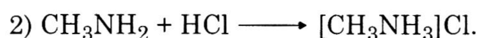


2) $RNO_2 + 6[H] \longrightarrow RNH_2 + 2H_2O.$

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

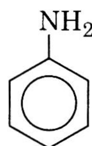


1) $RNH_2 + H_2O \rightleftharpoons [RNH_3]^+ + OH^-.$

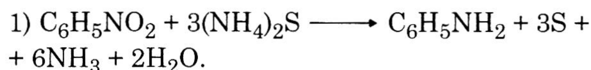


2) $CH_3NH_2 + HCl \longrightarrow [CH_3NH_3]Cl.$

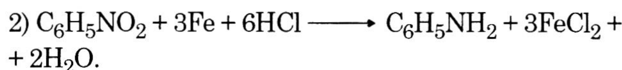
Anilinas $C_6H_5NH_2$



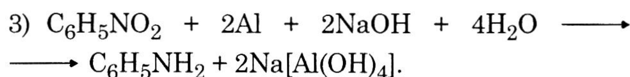
G a v i m a s



1) $C_6H_5NO_2 + 3(NH_4)_2S \longrightarrow C_6H_5NH_2 + 3S +$
$+ 6NH_3 + 2H_2O.$

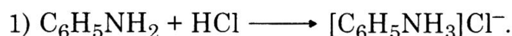


2) $C_6H_5NO_2 + 3Fe + 6HCl \longrightarrow C_6H_5NH_2 + 3FeCl_2 +$
$+ 2H_2O.$

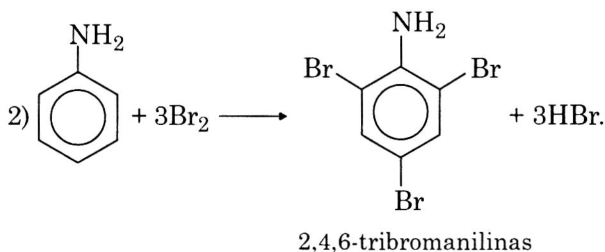


3) $C_6H_5NO_2 + 2Al + 2NaOH + 4H_2O \longrightarrow$
$\longrightarrow C_6H_5NH_2 + 2Na[Al(OH)_4].$

C h e m i n ė s   s a v y b ė s

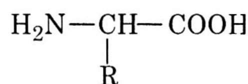


1) $C_6H_5NH_2 + HCl \longrightarrow [C_6H_5NH_3]Cl^-.$



2,4,6-tribromanilinas

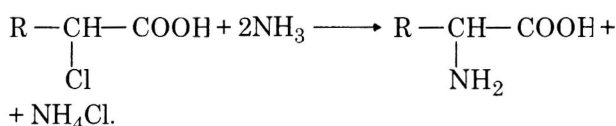
α-aminorūgštys



$H_2N{-}CH(R){-}COOH$

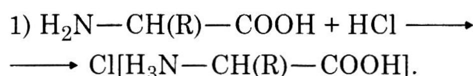
Amino-rūgštis	Sutrumpintas žymėjimas	R—
Glicinas	Gly	$H{-}$
Alaninas	Ala	$CH_3{-}$
Fenilalaninas	Phe	$C_6H_5{-}CH_2{-}$
Valinas	Val	$(CH_3)_2CH{-}$
Leucinas	Leu	$(CH_3)_2CHCH_2{-}$
Serinas	Ser	$HOCH_2{-}$
Tirozinas	Tyr	$HO{-}C_6H_4{-}CH_2{-}$
Glutamo rūgštis	Glu	$HOOC{-}CH_2CH_2{-}$
Cisteinas	Cys	$HSCH_2{-}$
Lizinas	Lys	$H_2N{-}CH_2CH_2CH_2{-}$

G a v i m a s

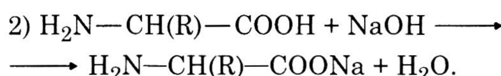


$R{-}CH(Cl){-}COOH + 2NH_3 \longrightarrow R{-}CH(NH_2){-}COOH +$
$+ NH_4Cl.$

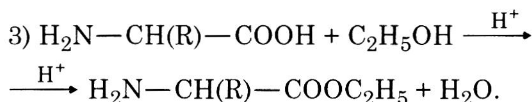
C h e m i n ė s   s a v y b ė s



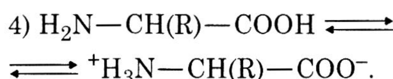
1) $H_2N{-}CH(R){-}COOH + HCl \longrightarrow$
$\longrightarrow Cl[H_3N{-}CH(R){-}COOH].$



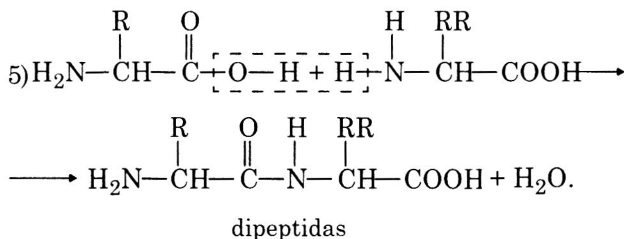
2) $H_2N{-}CH(R){-}COOH + NaOH \longrightarrow$
$\longrightarrow H_2N{-}CH(R){-}COONa + H_2O.$



3) $H_2N{-}CH(R){-}COOH + C_2H_5OH \xrightarrow{H^+}$
$\xrightarrow{H^+} H_2N{-}CH(R){-}COOC_2H_5 + H_2O.$



4) $H_2N{-}CH(R){-}COOH \rightleftharpoons$
$\rightleftharpoons {}^+H_3N{-}CH(R){-}COO^-.$

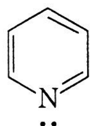


5) $H_2N{-}CH(R){-}C({=}O){-}O{-}H + H{-}N(H){-}CH(R'){-}COOH \longrightarrow$
$\longrightarrow H_2N{-}CH(R){-}C({=}O){-}N(H){-}CH(R'){-}COOH + H_2O.$

dipeptidas

AZOTO TURINTYS HETEROCIKLINIAI JUNGINIAI

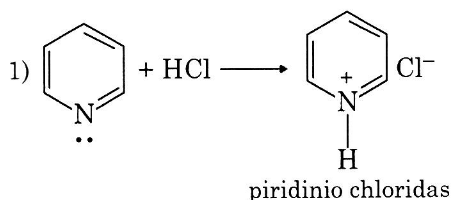
Piridinas C_5H_5N

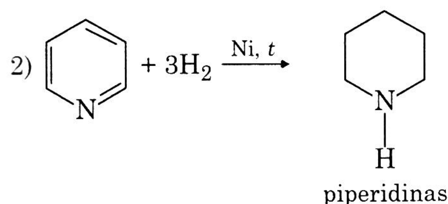


Gavimas

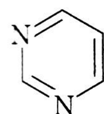


Cheminės savybės

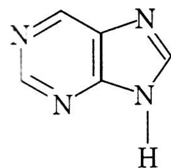




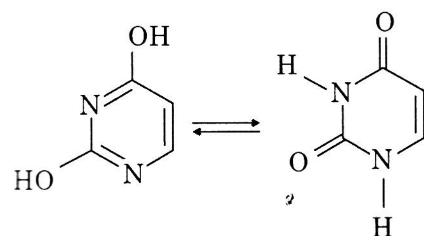
Pirimidinas $C_4H_4N_2$



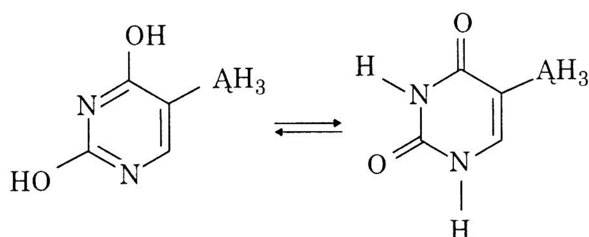
Purinas $C_5H_4N_4$



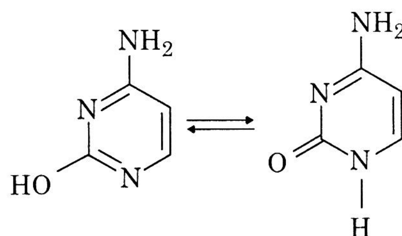
Pirimidino bazės



uracilas

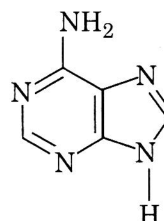


timinas

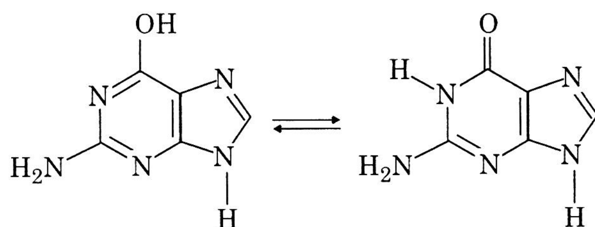


citozinas

Purino bazės



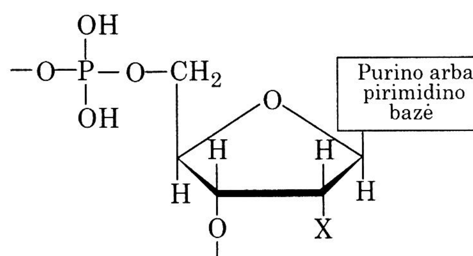
adeninas



guaninas

Nukleorūgštys

Nukleorūgščių struktūros fragmentas



DNR molekulėje X = H, RNR molekulėje X = OH.

Biologija

ĮVADAS

1 lentelė. **Gyvosios gamtos organizacijos lygmenys**

Lygmens pavadinimas	Lygmenį sudarantys komponentai
1	2
BIOSFEROS	Biogeocenozių visuma, apimanti visas gyvybės apraiškas Žemėje. Šiame lygmenyje vyksta visų gyvų organizmų veiklos lemiami medžiagų apykaitos ir energijos virsmų procesai
BIOGEOCENOZIŲ	Įvairių karalysčių ir rūšių organizmų, sąveikaujančių su jų gyvenamąja aplinka, visuma
RŪŠIŲ IR POPULIACIJŲ	Vienos rūšies organizmų, gyvenančių tam tikroje teritorijoje ir sudarančių joje populiaciją, visuma
ORGANIZMŲ	Tam tikros rūšies individas, gebantis vystytis kaip gyva sistema – nuo pat gimimo iki mirties
LĄSTELIŲ	Atskira ląstelė

1 lentelė. **Gyvosios gamtos organizacijos lygmenys**

1	2
MOLEKULIŲ	Organinių ir neorganinių medžiagų, sudarančių tiek ląsteles, tiek ir pačius organizmus, molekulės

2 lentelė. **Gyvųjų sistemų pagrindinės savybės**

Savybė	Savybės pasireiškimo būdas
CHEMINĖS SUDĖTIES VIENODUMAS	Visi gyvi organizmai sudaryti iš tų pačių cheminių elementų, kaip ir negyvosios gamtos objektai, tačiau tų elementų santykis gyvojoje ir negyvojoje gamtoje skirtingas. Gyvuosiuose organizmuose 98% cheminių junginių sudaryti iš keturių elementų: anglies, deguonies, azoto ir vandenilio
MEDŽIAGŲ IR ENERGIJOS APYKAITA	Visos gyvos sistemos ima iš aplinkos joms reikalingas medžiagas ir išskiria į aplinką gyvybinės veiklos produktus; taip jose vyksta medžiagų ir energijos apykaita. Medžiagų apykaita laiduoja organizmo cheminės sudėties santykinį pastovumą
DAUGINIMASIS	Dauginimosi procesas lemia bet kurios rūšies, o kartu ir visos gyvybės, egzistavimą; dauginimosi pagrindas – naujų molekulių bei struktūrų formavimasis, sąlygojamas DNR sukauptos informacijos
PAVELDIMUMAS	Pasireiškia organizmų gebėjimu iš kartos į kartą perduoti požymius, savybes, vystymosi ypatumus
KINTAMUMAS	Organizmų gebėjimas įgyti naujų požymių ir savybių
AUGIMAS IR VYSTYMASIS	Augimas pasireiškia organizmo apimties ir masės didėjimu, kartu išlaikant bendrus struktūrinius bruožus. Organizmas auga ir vystosi – įgauna kokybiškai naują išvaizdą ir savybes
JAUTRUMAS	Organizmų gebėjimas reaguoti į išorinius dirgiklius; organizmai atitinkamai reaguoja į aplinkos sąlygų pokyčius
DISKRETIŠKUMAS	Bet kuri biologinė sistema (ląstelė, organizmas, populiacija ir t. t.) susideda iš atskirų, bet tarpusavyje sąveikaujančių dalių, sudarančių visumą tiek struktūriniu, tiek funkciniu požiūriu
SAVIREGULIACIJA	Pasireiškia nuolat kintančioje aplinkoje gyvenančių organizmų gebėjimu išlaikyti savo pastovią cheminę sudėtį ir fiziologinių procesų intensyvumą

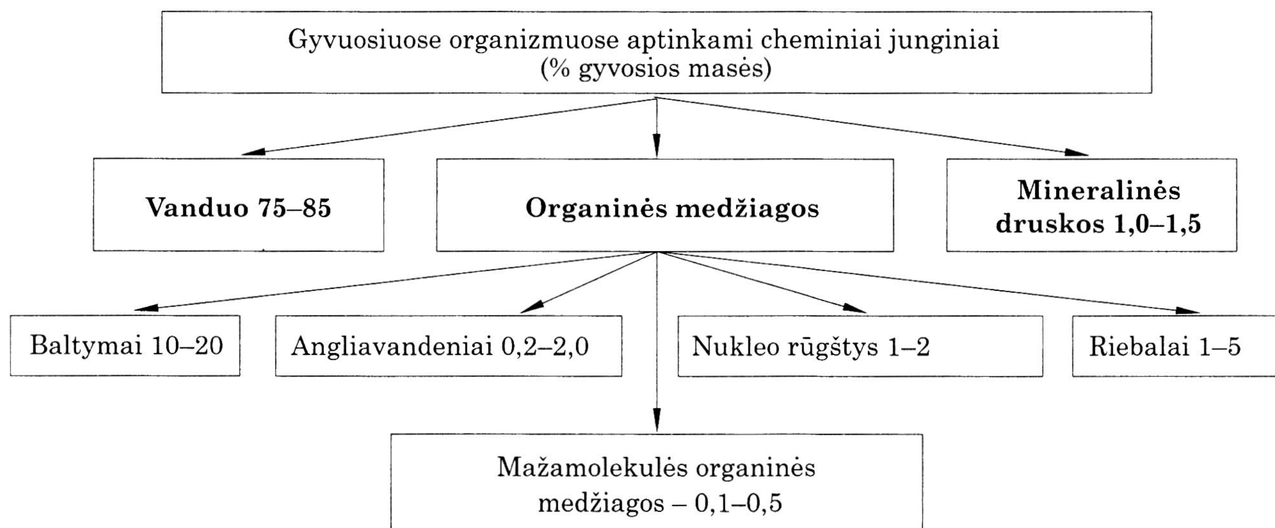
GYVOSIOS GAMTOS ORGANIZACIJOS MOLEKULIŲ LYGMUO

Visų gyvų sistemų gyvybinė veikla pasireiškia įvairių cheminių junginių molekulių sąveika. Aptikta daugiau kaip 80 cheminių elementų, įeinančių į gyvosios gamtos komponentų sudėtį, 27 iš šių elementų atlieka tam tikras funkcijas, kiti – patenka į organizmus su maistu, vandeniu ar oru

Visi elementai, priklausomai nuo jų kiekio gyvuosiuose organizmuose, skirstomi į tris grupes

Elementai, įeinantys į organizmo ląstelių sudėtį (%)		
MAKROELEMENTAI	MIKROELEMENTAI	ULTRAMIKROELEMENTAI
Deguonis 65–75 Anglis 15–18 Azotas 1,5–3 Vandenilis 8–10 Magnis 0,02–0,03 Kalis 0,15–0,4 Natris 0,02–0,03 Kalcis 0,04–2,00 Geležis 0,01–0,15 Siera 0,15–0,2 Fosforas 0,20–1,00	Aptinkami labai mažais kiekiais: nuo 0,001 iki 0,000001 Boras Kobaltas Varis Molibdenas Cinkas Vanadis Jodas Bromas	Kiekis neviršija 0,000001 Uranas Radis Auksas Gyvsidabris Berilis Cezis Selenas

1 schema. **Gyvuosiuose organizmuose aptinkami cheminiai junginiai**

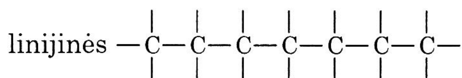


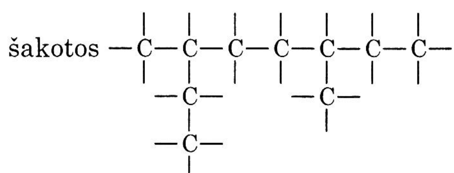
3 lentelė. **Neorganinės medžiagos**

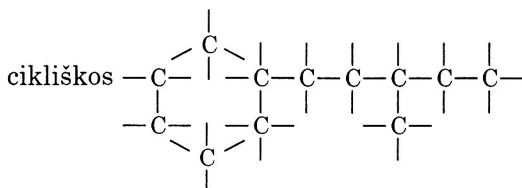
Pavadinimas	Sandaros ypatumai	Funkcijos
VANDUO	**Molekulės struktūra** **Dipolis** **Vandenilinio ryšio susidarymas**	• Universalus skiediklis • Gyvuosiuose organizmuose atlieka termoreguliacinę funkciją • Užtikrina makromolekulinių organinių junginių (baltymų, angliavandenių, riebalų) hidrolizę, oksidaciją • Veikia kaip osmoreguliatorius, įtakodamas ląstelės fizines savybes: tamprumą, turgorą, tūrio pokyčius • Laiduoja medžiagų pernašą bei išskyrimą iš ląstelės ir į ląstelę
MINERALINĖS DRUSKOS	a) katijonai: K^+, Na^+, Ca^{++}, Mg^{++} ir anijonai: $H_2PO_4^-$, Cl^-, HCO_3^-, HPO_4^{--} disocijuotame pavidale	TURI įtakos: • ląstelės bei organizmo vidinės terpės pastovumui, užtikrinant jos rūgštinę ir šarminę pusiausvyrą (buferiškumą) • osmotiniam slėgiui, vandens patekimui į ląstelę • aktyvuojant fermentus
	b) junginiuose su organinėmis medžiagomis atlieka daugelį funkcijų:	
	geležis	• Įeina į hemoglobino molekulės sudėtį
	magnis	• Įeina į chlorofilo sudėtį
	varis	• Yra daugelio oksiduojančių fermentų sudėtyje
	jodas	• Įeina į tiroksino molekulės sudėtį
	natris ir kalis	• Neuronų membranose užtikrina elektrinį krūvį
	kobaltas	• Yra vitamino B_{12} sudėtyje

ORGANINĖS MEDŽIAGOS

ORGANINĖS MEDŽIAGOS – junginiai, kurių sudėtyje yra anglies (išskyrus karbonatus). Tarp anglies atomų susidaro viengubos ar dvigubos jungtys, kurių dėka formuojasi anglies atomų grandinės:







Dauguma organinių medžiagų yra polimerai, kurie susideda iš pasikartojančių dalių – monomerų. Reguliariaisiais vadinami polimerai, sudaryti iš vienodų monomerų; nereguliariuosius sudaro įvairūs monomerai

4 lentelė. **Angliavandeniai**

Sudėtis ir struktūra	Funkcijos
BENDRA FORMULĖ – $C_n(H_2O)_n$, kur *n* yra ne mažiau kaip trys. MONOZĖS, arba monosacharidai: triozės (pavyzdžiui, glicerinas ir jo dariniai); pentozės (ribozė ir deoksiribozė); heksozės (gliukozė, fruktozė, galaktozė). OLIGOSACHARIDAI, arba disacharidai: sacharozė, laktozė, maltozė. POLISACHARIDAI susideda iš dešimčių ir šimtų monomerų – gliukozės molekulių: Krakmolą, glikogeną, ląstelieną, chitiną sudaro linijinės arba šakotos monosacharidų grandinės	**Energetinė** – pagrindinis energijos šaltinis ląstelėje, 1 g gliukozės oksidacijos metu išsiskiria 17,1 kJ energijos • Įeina į RNR ir DNR sudėtį • Mitybos grandinės bazinė organinė medžiaga **Struktūrinė** – angliavandeniai, įeinantys į ląstelių ir organelių, arba organoidų, sienelių sudėtį, aptinkami visuose audiniuose ir organuose **Atsarginių maisto medžiagų funkcija** – krakmolas augalinėse, glikogenas – gyvūnų ląstelėse

5 lentelė. **Baltymai**

Sudėtis ir struktūra	Funkcijos
BALTYMAI – nereguliarieji biopolimerai; juos sudarantys monomerai – 20 rūšių aminorūgščių **Bendra aminorūgščių formulė** $H_2N - CH(R) - C(=O) - OH$ aminogrupė, atliekanti bazės vaidmenį radikalo grupė – skirtinga kiekvienai rūgščiai karboksilo grupė, pasižyminti rūgštinėmis savybėmis Susijungiant aminorūgštims susidaro **peptidinė jungtis,** kurios dėka formuojasi junginys – **polipeptidas**	**Struktūrinė** – baltymai įeina į visų ląstelės bei ląstelės organoidų membranų sudėtį; susijungę su DNR – į chromosomų, su RNR – į ribosomų sudėtį **Transportinė** – cheminių elementų prijungimas prie baltymų ir pernaša į atitinkamas ląsteles **Judėjimo** – galintys susitraukti specialūs baltymai dalyvauja visose ląstelių bei organizmo judėjimo formose **Katalitinę** funkciją atlieka specialūs biologiniai katalizatoriai – **fermentai**, kurie ląstelėse ir organizmuose spartina ar lėtina biochemines reakcijas
Baltymo molekulės struktūra *Pirminė,* linijinė, kurią sudaro polipeptidinė grandinė: $-NH-CH(R_1)-C(=O)-NH-CH(R_2)-C(=O)-NH-CH(R_3)-C(=O)-$ *Antrinę* formuoja vandenilinės jungtys: spiralinė – α, armonikos pavidalo – β. *Tretinė,* globulinė, formuojasi dėl hidrofobinių sąveikų *Ketvirtinė* struktūra – tai kelių tretinės struktūros molekulių junginys	**Apsauginė** – pasireiškia antikūnų, sąlygojančių imuninę apsaugą, gamyba, kai į organizmą patenka svetimų baltymų (antigenų) **Energetinė** – skylant 1 g baltymo, išsiskiria 17,6 kJ energijos **Hormoninė, arba receptorinė,** – baltymai įeina į daugelio hormonų sudėtį, padeda reguliuoti gyvybinius procesus

BALTYMAI

- **globuliniai** – antikūniai, hormonai, fermentai
- **fibriliniai** – kolagenas, odos keratinas, elastinas

BALTYMAI

- **paprasti**
- **kompleksiniai**

Nukleorūgštys

NUKLEORŪGŠTYS – gamtiniai didelės molekulinės masės biopolimerai, laiduojantys paveldimos (genetinės) informacijos gyvuosiuose organizmuose saugojimą ir perdavimą

6 lentelė. Deoksiribonukleorūgštis (DNR)

Sudėtis, struktūra, savybės	Buvimo vieta ląstelėje, funkcijos
DNR – biopolimeras, sudarytas iš dviejų lygiagrečiai sujungtų polinukleotidinių grandinių. Monomerai – deoksiribonukleotidai **Nukleotido sandaros schema** **Azotinė bazė:** adeninas (A), arba timinas (T), arba citozinas (C), arba guaninas (G) — Deoksiribozė — Fosforo rūgšties liekana	Eukariotinėse ląstelėse DNR yra branduolyje, mitochondrijose ir plastidėse. Prokariotinėse ląstelėse DNR išsidėsčiusi citoplazmoje **Funkcijos:** chromosominės genetinės medžiagos (geno) cheminis pagrindas. Tripletas yra po nukleotido mažiausias genetinę informaciją pernešantis vienetas; tai yra trys vienas šalia kito išsidėstę nukleotidai; DNR yra užkoduota informacija apie baltymų struktūrą; DNR yra RNR molekulių susidarymo matrica, RNR formuojasi ant vienos iš DNR grandinių pagal komplementarumo principą. DNR grandinės yra antiparalelinės. Grandinės sukasi viena apie kitą, o taip pat apie bendrą darinio ašį ir taip formuoja dvigubą spiralę. Šią struktūrą palaiko daugiausia vandenilinės jungtys: dvi tarp T ir A, trys tarp G ir C
DNR molekulės fragmentas F — T═A — F F — A═T — F F — G≡C **Savybės:** savarankiškas grandinės padvigubėjimas komplementarumo (reduplikacijos) principu	

DNR molekulės reduplikacijos schema

—A═T—
—C≡G—
—T═A—

—A═   ═T—
—C≡   ≡G—
—T═   ═A—

—A═T—   —A═T—
—C≡G—   —C≡G—
—T═A—   —T═A—

7 lentelė. **Ribonukleorūgštis (RNR)**

Sudėtis, struktūra	Buvimo vieta ląstelėje, funkcijos
RNR yra polimeras, kurio monomerai – ribonukleotidai – formuoja viengubą polinukleotidinę grandinę **Ribonukleotido sandaros schema** **Azotinė bazė:** adeninas (A), uracilas (U), citozinas (C), guaninas (G) — Ribozė — Fosforo rūgšties liekana	Yra branduolėlyje, ribosomose, citoplazmoje, mitochondrijose, chloroplastuose. Pagal funkcijas skiriamos kelios rūšys **Informacinė, arba matricinė, RNR (iRNR)** perneša užkoduotą informaciją apie baltymo struktūrą iš chromosomų į ribosomas **Ribosominė RNR (rRNR)** yra ribosomų sudedamoji dalis **Transportinė RNR (tRNR)** perneša aminorūgštis ant ribosomų

8 lentelė. **Adenozintrifosfatas (ATP)**

Sudėtis, struktūra	Buvimo vieta ląstelėje, funkcijos
ATP molekulę sudaro azotinė bazė – adeninas, angliavandenis ribozė ir trys fosforo rūgšties liekanos, susietos makroerginėmis jungtimis. **ATP sandaros bei jos virtimo ADP schema** **ATP** Azotinė bazė (adeninas) — Ribozė — $P(=O)(OH)—O\sim P(=O)(OH)—O\sim P(=O)(OH)—OH + H_2O$ **ADP** Azotinė bazė (adeninas) — Ribozė — $P(=O)(OH)—O\sim P(=O)(OH)—OH + H_3PO_4 + Q$	ATP sintezė vyksta mitochondrijose, iš jų ATP molekulės patenka į įvairias ląstelės vietas, aprūpindamos energija visus gyvybinius procesus: biosintezę, mechaninį darbą (ląstelės dalijimąsi, raumenų susitraukimą), aktyviąją medžiagų pernašą per membranas, įvairių sekretų išskyrimą, membraninio potencialo palaikymą nervino impulso perdavimo metu. Vienos fosfatinės grupės atskilimo metu išskiriama 40 kJ energijos. Hidrolizės metu nuo ATP atsiskyrus vienai fosfatinei grupei susidaro ADP. Kitos grupės atskilimo metu susidaro AMP ir taip pat išskiriama energija

9 lentelė. **Lipidai**

Riebalai ir jiems artimos medžiagos bendrai vadinamos lipidais. Lipidai – skirtingos struktūros, bet panašių savybių organiniai junginiai. Jie netirpūs vandenyje, bet gerai tirpsta organiniuose tirpikliuose: eteryje, benzine, chloroforme ir kt. Lipidai plačiai paplitę gyvojoje gamtoje

Sudėtis, struktūra	Funkcijos
RIEBALAI – sudėtingi tris anglies atomus turinčio alkoholio – glicerino ir didelės molekulinės masės riebalų rūgščių junginiai: $H_2C-O-\overset{O}{\overset{\parallel}{C}}-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-(CH_2)_5$ $HC-O-\overset{O}{\overset{\parallel}{C}}-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-(CH_2)_7$ $H_2C-O-\overset{O}{\overset{\parallel}{C}}-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-(CH_2)_3$ glicerino liekana; riebalų rūgščių trijų molekulių liekanos	**Energetinė** – lipidai tiekia 25–30% organizmui reikalingos energijos. Visiškai suskilus 1 g riebalų išsiskiria 38,9 kJ energijos, tai yra beveik dukart daugiau, negu skylant angliavandeniams ir baltymams **Maisto atsargų funkcija.** Riebalai yra savotiški „energijos konservai“. Atsarginėmis maisto medžiagomis gali būti riebalų lašeliai ląstelėje
Glicerino, riebalų rūgščių ir fosforo rūgšties liekanos junginiai vadinami **fosfolipidais** Lipidų ir angliavandenių junginiai sudaro sudėtingas medžiagas – **glikolipidus**	**Struktūrinė:** fosfolipidai – pagrindiniai ląstelės membranų komponentai; dalyvauja formuojant daugelį biologiškai svarbių junginių Glikolipidai įeina į smegenų ir nervinių ląstelių sudėtį Daugelis riebalų yra vitaminų komponentai, taigi atlieka ir **reguliacines funkcijas** **Termoreguliacinė** – riebalai blogai praleidžia šilumą. Jie kaupiasi po oda, kai kuriuose gyvūnuose sudarydami dideles sankaupas **Apsauginė** – apsaugo nuo smūgių, atlieka hidrotermoizoliacinę funkciją
Kompleksiniai įvairių baltymų ir lipidų junginiai vadinami **lipoproteidais**	
Riebalai – endogeninio vandens tiekėjai	

GYVOSIOS GAMTOS ORGANIZACIJOS LĄSTELIŲ LYGMUO

10 lentelė. **Ląstelės struktūrinė organizacija**

Eukariotinės augalų, gyvūnų ir grybų ląstelės yra sudėtingos ir įvairios, bet turi bendrų sandaros bruožų. Svarbiausios ląstelės dalys, neatskiriamai susijusios viena su kita, yra citoplazma ir branduolys. Citoplazmoje išsidėstę organoidai. Struktūrinė ląstelės organizacija pagrįsta membraniniu formavimosi principu. Membraną sudaro du lipidų sluoksniai, į kuriuos iš vidinės ir išorinės pusės panirę daugybė įvairiausių baltymų molekulių	Augalinė / Gyvūninė
Organo pavadinimas	Sandaros ypatybės, funkcijos
1. IŠORINĖ CITOPLAZMINĖ MEMBRANA	Atskiria citoplazmos turinį nuo išorinės aplinkos; per membranos poras į ląstelės vidų veikiant fermentams gali pakliūti jonai ir smulkios molekulės; palaiko ryšį audiniuose tarp ląstelių; turi receptorius, priima signalus. Be citoplazminės, augalinė ląstelė dar turi storą celiuliozinę membraną – ląstelės sienelę, kurios nėra gyvūninėse ląstelėse
2. CITOPLAZMOS MATRIKSAS	Skysta citoplazmos terpė, kurioje plūduriuoja organoidai ir intarpai. Terpę sudaro skysta koloidinė sistema su įvairių medžiagų molekulėmis
3. PLASTIDĖS (LEUKOPLASTAI, CHROMOPLASTAI, CHLOROPLASTAI)	Tai dviguba membrana padengti organoidai, būdingi tik augalinėms ląstelėms. Žaliosios plastidės – chloroplastai yra organoidai, kurie gali atsinaujinti ir turi ypatingus darinius – tilakoidus (granas), kuriuose dėka chlorofilo vyksta fotosintezė
4. ENDOPLAZMINIS TINKLAS	Iš membranų sudarytas šakotas ertmių ir kanalų tinklas, išsidėstęs aplink branduolį: lygusis ET dalyvauja anglies ir riebalų apykaitoje; grūdėtasis kartu su ribosomomis užtikrina baltymų sintezę
5. BRANDUOLYS	Jame yra DNR, t. y. genai; atlieka genetinės informacijos saugojimo ir atgaminimo funkciją; reguliuoja ląstelės medžiagų apykaitą. Branduolį gaubia dviguba membranos sienelė, jame glūdi chromatinas, branduolio sultys ir branduolėlis

10 lentelė. **Ląstelės struktūrinė organizacija**

Organo pavadinimas	Sandaros ypatybės, funkcijos
6. LIZOSOMOS	Ovalūs, trisluoksnės membranos gaubiami kūneliai, kuriuose gali būti iki 30 įvairių fermentų, skaidančių organines ir kitokias medžiagas; susidaro iš Goldžio komplekso arba ET membraninių struktūrų
7. LĄSTELĖS CENTRAS	Savaime atsinaujinantis ląstelės organoidas, sudarytas iš statmenai vienas kitam išsidėsčiusių labai smulkių kūnelių (centriolių)
8. GOLDŽIO KOMPLEKSAS	Sudaro plokščių membraninių maišelių paketai su vamzdeliais, kurių galuose formuojasi mažos pūslelės – neaktyvios lizosomos; išskiria sekretą
9. BRANDUOLĖLIS	Kompaktiškas apvalus kūnelis; tai nėra savarankiškas struktūrinis branduolio vienetas. Susiformuoja aplink chromosomos dalį, koduojančią rRNR; jame susidaro ribosomų subvienetai
10. MITOCHONDRIJOS	Dvigubos membranos dariniai, vidinė membrana formuoja išaugas – kristas, kurių fermentai dalyvauja oksidaciniame energijos apykaitos etape
11. VAKUOLĖS	Organoidai, esantys visose augalinėse ląstelėse; vakuolėse tirpalų pavidalu sukauptos organinės ir mineralinės medžiagos; aptinkamos ir gyvūninėse ląstelėse
12. RIBOSOMOS	Iš dviejų subvienetų sudarytos sferinės dalelės, laisvai išsidėsčiusios citoplazmoje arba prisitvirtinusios ant ET membranų. Vykdo baltymų sintezę
CITOSKELETAS	Baltyminių skaidulų mikrovamzdelių ir pūslelių, glaudžiai susijusių su išorine membrana ir branduolio apvalkalėliu, sistema
ŽIUŽELIAI IR BLAKSTIENĖLĖS	Judėjimo organoidai, pasižymintys bendrais struktūriniais bruožais. Žiuželių ir blakstienėlių judėjimas paremtas mikrovamzdelių slydimu

11 lentelė. **Prokariotinės ir eukariotinės ląstelės**

Požymiai	Prokariotai	Eukariotai
1	2	3
BRANDUOLIO MEMBRANA	Nėra	Yra
PLAZMINĖ MEMBRANA	Yra	Yra
MITOCHONDRIJOS	Nėra	Yra
ET	Nėra	Yra

11 lentelė. **Prokariotinės ir eukariotinės ląstelės**

1	2	3
RIBOSOMOS	Yra	Yra
VAKUOLĖS	Nėra	Yra (ypač būdingos augalams)
LIZOSOMOS	Nėra	Yra
LĄSTELĖS SIENELĖ	Yra, sudaryta iš sudėtingos heteropolimerinės medžiagos	Gyvūninėse ląstelėse nėra, augalinėse sudaryta iš celiuliozės
KAPSULĖ	Jei yra, sudaryta iš baltymų ir cukrų junginių	Nėra
GOLDŽIO KOMPLEKSAS	Nėra	Yra
DALIJIMASIS	Paprastas	Mitozė, amitozė, mejozė

12 lentelė. **Medžiagų apykaita (metabolizmas)**

METABOLIZMAS – visų fermentinių ląstelės reakcijų, susijusių tarpusavyje ir su išorine aplinka, visuma; susideda iš medžiagų ir energijos apykaitos

Medžiagų (plastinė) apykaita (anabolizmas, arba asimiliacija) – biologinės sintezės reakcijos, kurių metu iš paprastų medžiagų sintetinamos didelės molekulinės masės medžiagos, kartu naudojant energiją

Energijos apykaita (katabolizmas, arba disimiliacija) yra didelės molekulinės masės medžiagų skaidymo reakcijų, kurių metu išskiriama energija, visuma

ASIMILIACIJOS FORMOS, arba ląstelių mitybos būdai			
Medžiagų apykaitos tipai		Organinių medžiagų sintezei naudojama energija	Organizmų pavyzdžiai
AUTOTROFAI	Fototrofai	Saulės šviesos energija	Visi žalieji augalai, purpurinės, žaliosios bakterijos
	Chemoautotrofai	Egzoterminių reakcijų energija, susidaranti oksiduojantis neorganiniams junginiams, pavyzdžiui, amoniakui	Nitrobakterijos, sierabakterės, gelžbakterės
HETEROTROFAI	Organizmų mitybos tipai: holozojinis	Naudoja jau pagamintas organines medžiagas, ieško ir vartoja maistui organizmus ar jų dalis, virškina ir įsiurbia mitybines medžiagas	Dauguma gyvūnų, žolėdžiai, mėsėdžiai (plėšrūnai)

12 lentelė. **Medžiagų apykaita (metabolizmas)**

HETEROTROFAI	Saprotrofai	Būtinas neorganines medžiagas įsisavina per ląstelių sieneles, nerydami kieto maisto	Mielės, pelėsiniai grybai, dauguma bakterijų
	Parazitai	Gyvena augalų ar gyvūnų, vadinamų šeimininkais, paviršiuje arba viduje ir minta jų organizmo medžiagomis	Parazitinės kirmėlės, erkės, vabzdžiai, virusai, fagai, bakterijos, parazitiniai grybai
MIKSOTROFAI		Tarpinio mitybos tipo organizmai, naudojantys ir saulės šviesos energiją, ir jau pagamintas organines medžiagas	Euglena, saulašarė, amalas ir kt.

Įvairiausi heterotrofiniai organizmai gali skaidyti visas medžiagas, kurias tik susintetina autotrofai, o taip pat ir mineralines medžiagas, kurias sukūrė žmogus; jie kartu su autotrofais Žemėje formuoja vieningą, trofiniais ryšiais susietą biologinę sistemą.

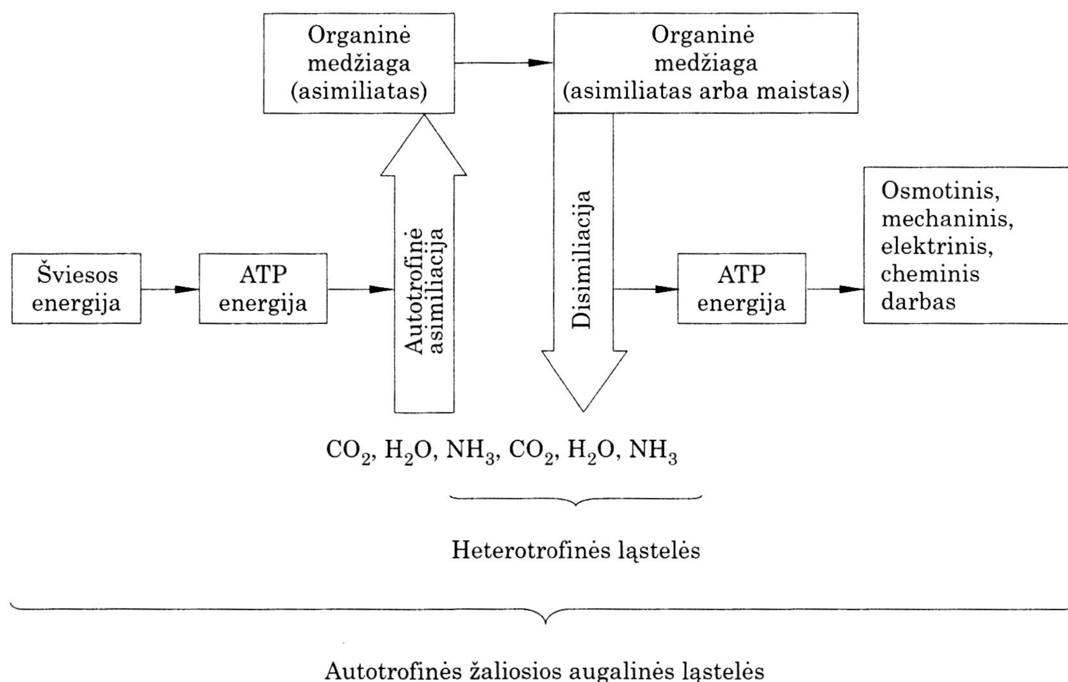
13 lentelė. **Baltymo biosintezė**

BALTYMO BIOSINTEZĖ – baltymo molekulių gamyba yra svarbiausias procesas gyvojoje gamtoje. Remiasi DNR, glūdinčios branduolyje, struktūroje užkoduota informacija apie aminorūgščių seką pirminėje baltymo struktūroje	
Biosintezės etapai	Etapų ypatybės
TRANSKRIPCIJA, arba perrašymas	Vyksta chromosomose esančioje DNR matricinės sintezės principu. Dalyvaujant fermentams RNR-polimerazėms ant atitinkamų DNR molekulės sektorių (genų) sintetinamos visos RNR (iRNR, rRNR, tRNR). Per branduolio apvalkalėlį į citoplazmą patenka iRNR ir tRNR, rRNR įsiterpia į ribosomų subvienetus
TRANSLIACIJA, arba genetinės informacijos perdavimas	Ribosoma prisitvirtina prie vieno iRNR galo (būtent to, nuo kurio prasideda jos sintezė branduolyje) ir ima ja judėti tripletas po tripleto. Vienai su kita jungiantis aminorūgštims, kurias prie atitinkamų iRNR sektorių atgabena transportinė RNR, auga ir polipeptidinė grandinė. Kiekvieną aminorūgštį prie tRNR jungia savas fermentas

2 schema. **Paveldimos informacijos perdavimas iš DNR į iRNR ir į baltymą**

DNR (fragmentas)	G T G C A C	G G A C C T	T T T A A A	C G T G C A
iRNR (fragmentas)	G U G	G G A	U U U	C G U
tRNR antikodonai	C A C	C C U	A A A	G C A
Polipeptidas (fragmentas)	Val	Gli	Fe	Arg

3 schema. **Medžiagų ir energijos apykaita autotrofinėse ir heterotrofinėse ląstelėse**



14 lentelė. **Fotosintezė**

FOTOSINTEZĖ yra organinių medžiagų susidarymo žaliųjų augalų ląstelėse, veikiant šviesos energijai, procesas

Fotosintezės fazės ir jų vyksmo vieta ląstelėje	Procesai, vykstantys kiekvienoje fazėje
ŠVIESOS fazė, vykstanti granų tilakoiduose	Šviesos kvantai – fotonai – sąveikauja su chlorofilo molekulėmis, kurios pereina į aukštesnį energetinį lygmenį – „sužadintą" būseną. Sužadintų molekulių energija veikia vandens molekules ir vyksta fotolizė – vandens skaidymas šviesos energijos dėka, kurios pasekmė – molekulinio deguonies išsiskyrimas. Šviesos energija lemia ATP susidarymą iš ADP
TAMSOS fazė, vykstanti chloroplastų stromoje	Svarbiausia dalis – CO_2 surišimas. Dalyvauja šviesos fazėje susidariusios ATP molekulės ir H atomai, susidarę vandens fotolizės proceso metu ir susiję su molekulėmis-nešėjomis. Anglies dioksidas jungiasi su ląstelėje esančiomis pentozės molekulėmis, kurios dalyvauja Kalvino cikle, ir formuojasi angliavandeniai

15 lentelė. **Energijos apykaita – katabolizmas (disimiliacija)**

DISIMILIACIJA – makromolekulinių junginių skaidymo reakcijų, kurių metu išskiriama energija, visuma; tai procesas, priešingas sintezei, arba asimiliacijai. Išsiskirianti energija fiksuojama ATP molekulių, universalaus energijos šaltinio, makroerginėse jungtyse

Energijos apykaitos etapai

Etapas, jo vyksmo vieta ląstelėje	Etapo ypatumai	Energetinė vertė
1	2	3
I. PARENGIAMASIS virškinimo organuose	Sudėtingų organinių junginių molekulės, veikiamos fermentų, skyla į paprastesnes: BALTYMAI → aminorūgštys; ANGLIAVANDENIAI → monosacharidai; Nukleorūgštys → nukleotidai; RIEBALAI → glicerinas, riebalų rūgštys	Nedidelis energijos kiekis, išsisklaidantis šilumos pavidalu
II. ANAEROBINIS (nepilnas), glikolizė; mikroorganizmuose – RŪGIMAS, vykstantis ne ant membranų, bet hialoplazmoje	Tolesnis molekulių skaidymas dėka fermentų į paprastesnius junginius. Gliukozė skyla į dvi pirovynuogių rūgšties ($C_3H_4O_3$) molekules, kurios po to virsta pieno rūgštimi ($C_3H_6O_3$); reakcijose dalyvauja H_3PO_4 ir ADP: $C_6H_{12}O_6 + 2H_3PO_4 + 2ADP \rightarrow 2C_3H_6O_3 + 2ATP + 2H_2O$	Skylant gliukozei 60% energijos išsiskiria šilumos pavidalu, o 40% panaudojama dviejų ATP molekulių sintezei ir pastaroji energijos dalis

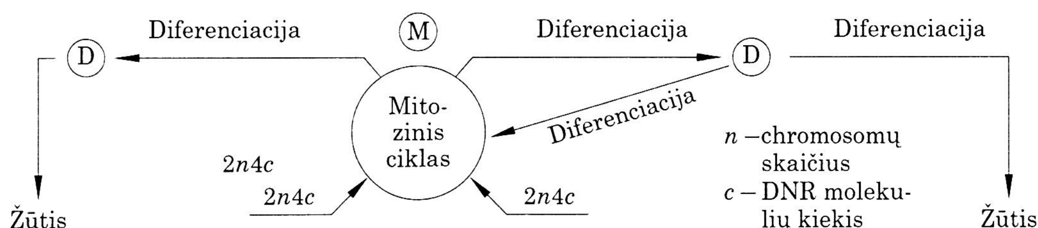
15 lentelė. **Energijos apykaita – katabolizmas (disimiliacija)**

1	2	3
	Mielėse vyksta alkoholinis rūgimas: $C_6H_{12}O_6 + 2H_3PO_4 + 2ADP \rightarrow$ $\rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2 + 2ATP + 2H_2O$	Išsaugoma
III. AEROBINIS, vyksta mitochondrijų matrikse ir ant jų vidinių membranų	Į ląstelę pakliuvus deguoniui ankstesniame etape susidariusios medžiagos oksiduojasi iki CO_2 ir H_2O: $2C_3H_6O_3 + 6O_2 + 36H_3PO_4 + 36ADP \rightarrow$ $\rightarrow 6CO_2 + 38H_2O + 36ATP$ Susidariusios ATP molekulės palieka mitochondrijas ir dalyvauja visuose ląstelėje vykstančiuose procesuose, kur reikalinga energija	Oksiduojantis dviems pieno rūgšties molekulėms susidaro 36 ATP molekulės

4 schema. **Gyvybinis ląstelės ciklas**

GYVYBINIS LĄSTELĖS ciklas – tai laikotarpis nuo ląstelės atsiradimo dalijimosi dėka iki jos žūties arba iki paskutinio jos dalijimosi

Ląstelės gyvybinio ciklo schema



Ląstelės dalijimasis – mitozė

MITOZĖ – eukariotinių ląstelių dalijimosi būdas, kai kiekviena iš dviejų naujai susidariusių ląstelių gauna motininei ląstelei identišką genetinę medžiagą. Interfazė – periodas tarp dalijimųsi. Interfazė su mitoze sudaro ląstelės ciklą – ląstelės gyvavimo nuo vieno iki kito dalijimosi periodą

5 schema. **Mitozės fazės. Ląstelės dalijimasis**

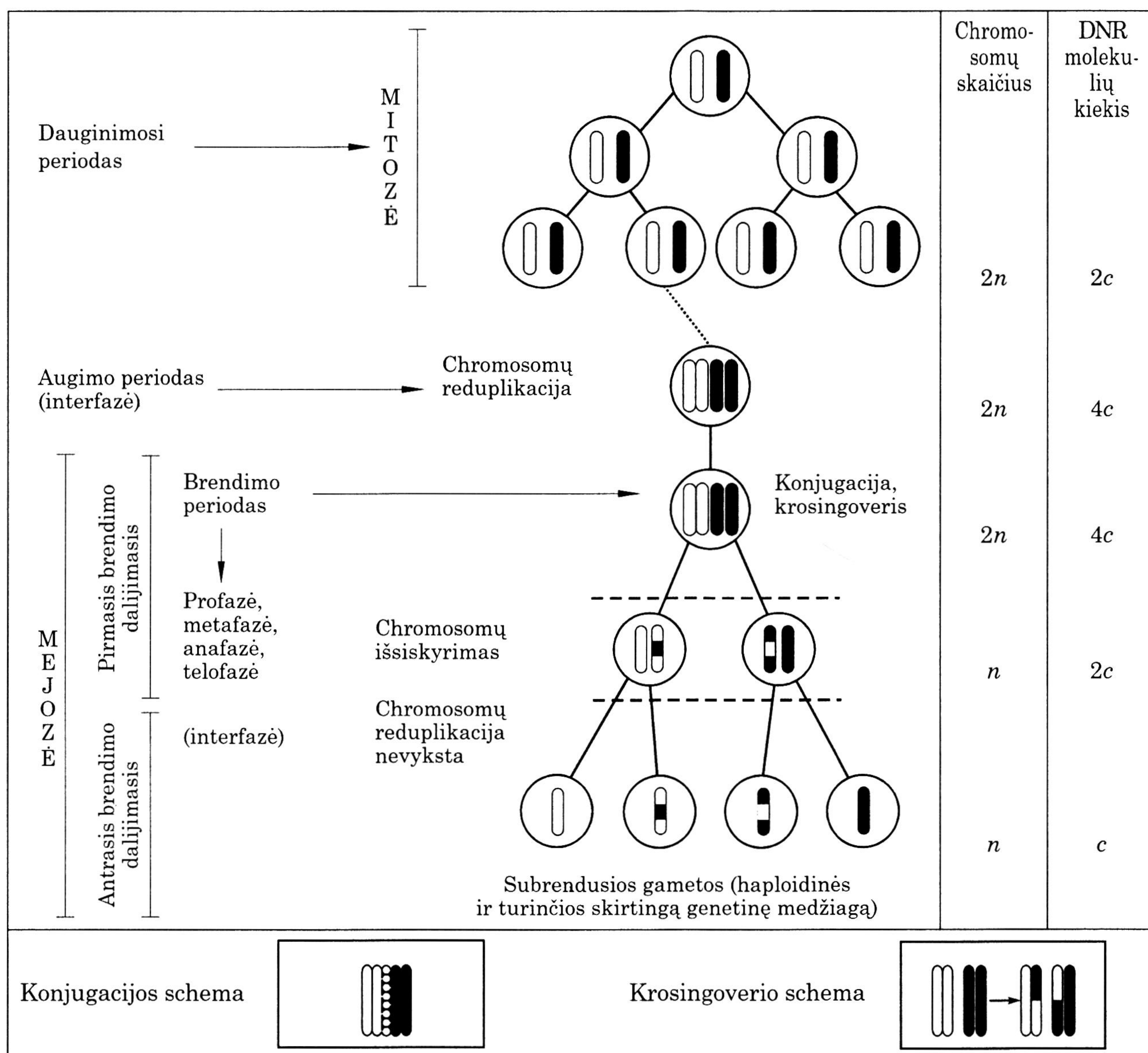
I. Profazė – chromosomos storėja ir tampa matomos; dvi centriolės nukeliauja į polius; pranyksta branduolėlis, branduolio apvalkalėlis; dalijimosi verpstės mikrovamzdeliai jungiasi prie centromerų; pradeda judėti chromosomos	**II. Metafazė** – kiekvieną chromosomą sudaro dvi seserinės chromatidės, besijungiančios centromeriniuose sektoriuose; sutrumpėjusios chromosomos juda ląstelės pusiaujo link. Visiškai susiformuoja mitozinė verpstė

5 schema. **Mitozės fazės. Ląstelės dalijimasis**

III. Anafazė – chromatidės, padvigubėjusios dar interfazės metu, virsta savarankiškomis dukterinėmis chromosomomis ir keliauja į ląstelės polius. Ląstelės polių link chromosomas traukia dalijimosi verpstės siūlai	**IV. Telofazė** – pasiekusios polius chromosomos išsivynioja, formuojasi branduolio membrana; iš kompaktiškų chromosomos vėl virsta plonomis ir ilgomis; formuojasi branduolėliai. Telofazė baigiasi citoplazmos dalijimusi – citokineze

GYVOSIOS GAMTOS ORGANIZACIJOS ORGANIZMŲ LYGMUO

6 schema. **Gametogenezė**



16 lentelė. Organizmų dauginimasis

DAUGINIMASIS – organizmų savybė palikti palikuonis; gyvojoje gamtoje aptinkamos dvi formos: nelytinis ir lytinis

Dauginimosi formų charakteristikos

Parametrai	Dauginimosi formos	
	nelytinis	lytinis
Reprodukcinių organizmų, reikalingų naujam organizmui pradėti, skaičius	Vienas individas	Paprastai du individai
Pirminės ląstelės	Viena arba kelios somatinės nelytinės ląstelės	Specializuotos lytinės ląstelės – gametos; susijungusios vyriškos ir moteriškos gametos sudaro zigotą
Kiekvienos formos esmė	Palikuonių turimoje paveldimoje medžiagoje užfiksuota genetinė informacija – tiksli tokios informacijos, esančios motininiame organizme, kopija	Palikuonių turimoje paveldimoje medžiagoje užfiksuota genetinė informacija – dviejų skirtingų reprodukcinių organizmų gametų genetinės informacijos junginys
Pagrindinis ląstelių susidarymo mechanizmas	Mitozė	Mejozė
Evoliucinė reikšmė	Užtikrina geriausių organizmo prisitaikymų prie esančių aplinkos sąlygų išsaugojimą, stiprina natūraliosios atrankos stabilizuojantį vaidmenį	Krosingoveris ir kombinacinis kintamumas laiduoja genetinę rūšies individų įvairovę; padeda prisitaikyti prie kintančių aplinkos sąlygų, lemia evoliucines rūšies perspektyvas
Organizmų, pasižyminčių šia dauginimosi forma, pavyzdžiai	Pirmuonys (amebos, euglena ir kt.); vienaląsčiai dumbliai; kai kurie augalai; duobagyviai	Augalai, dumbliai, kerpės, pataisainiai, asiūklainiai, paparčiai, plikasėkliai ir gaubtasėkliai; visi gyvūnai, grybai ir kt.

17 lentelė. Lytinio proceso evoliucija

Lytinio dauginimosi būdas		Būdo ypatybės	Organizmai
Be apvaisinimo	Konjugacija	Nepilnas apsikeitimas paveldima informacija per citoplazminius tiltelius	Infuzorija – klumpelė Prokariotai
	Partenogenezė	Moteriškos gametos – kiaušialąstės – virsta gemalu be apvaisinimo	Dirbtinė partenogenezė – daugelis gyvūnų ir augalų; Natūrali – amarai ir kiti vabzdžiai

17 lentelė. **Lytinio proceso evoliucija**

Lytinio dauginimosi būdas		Būdo ypatybės	Organizmai
Be apvaisinimo	Ginogenezė	Spermatozoidai, patekę į kiaušialąstę, žūva, kiaušialąstė virsta gemalu	Kai kurios žuvys, apvaliosios kirmėlės
	Androgenezė	Kiaušialąstė vystosi, kai, patekus spermatozoidui, žūva jos branduolys ir jį pakeičia spermatozoido medžiaga	Eksperimento būdu pavyko sukelti kai kuriems augalams
	Izogamija	Lytinės ląstelės nespecializuotos, vienodo dydžio, judrios	Žaliadumbliai ir rudadumbliai
Su apvaisinimu	Heterogamija	Gametos skirtingos: moteriškos didelės, vyriškos – smulkios, judrios	Žaliadumbliai ir rudadumbliai
	oogamija	Gametų diferenciacija: moteriškos nejudrios, formuojasi lytiniuose organuose	Saprolegnija

7 schema. **Apvaisinimas**

I. Spermatozoido susiliejimas su kiaušialąste

II. Spermatozoido branduolys zigotos citoplazmoje

III. Pirmasis zigotos dalijimasis

a – kiaušialąstės branduolys; *b* – spermatozoidas; *c* – apvaisinimo gumburėlis; *d* – spermatozoido branduolys; *e* – centriolė

18 lentelė. **Nelytinis dauginimasis**

Dauginimosi būdas	Dauginimosi ypatybės	Organizmų pavyzdžiai
1	2	3
Ląstelės dalijimasis pusiau	Pirminė (motininė) ląstelė mitoziškai dalijasi į dvi dalis, kurių kiekviena virsta nauja savarankiška ląstele	Prokariotai. Vienaląsčiai eukariotai (sarkodiniai – ameba)
Ląstelės dalijimasis daug kartų	Pirminė ląstelė dalijasi (subyra) į keletą dalių, kurių kiekviena virsta nauja savarankiška ląstele	Vienaląsčiai eukariotai (žiuželiniai, sporagyviai)
Netolygus ląstelės dalijimasis (pumpuravimasis)	Motininėje ląstelėje formuojasi gumburėlis, kuriame glūdi branduolys. Pumpuras auga, pasiekia motininės ląstelės dydį, atsiskiria	Vienaląsčiai eukariotai, kai kurios infuzorijos, mielės

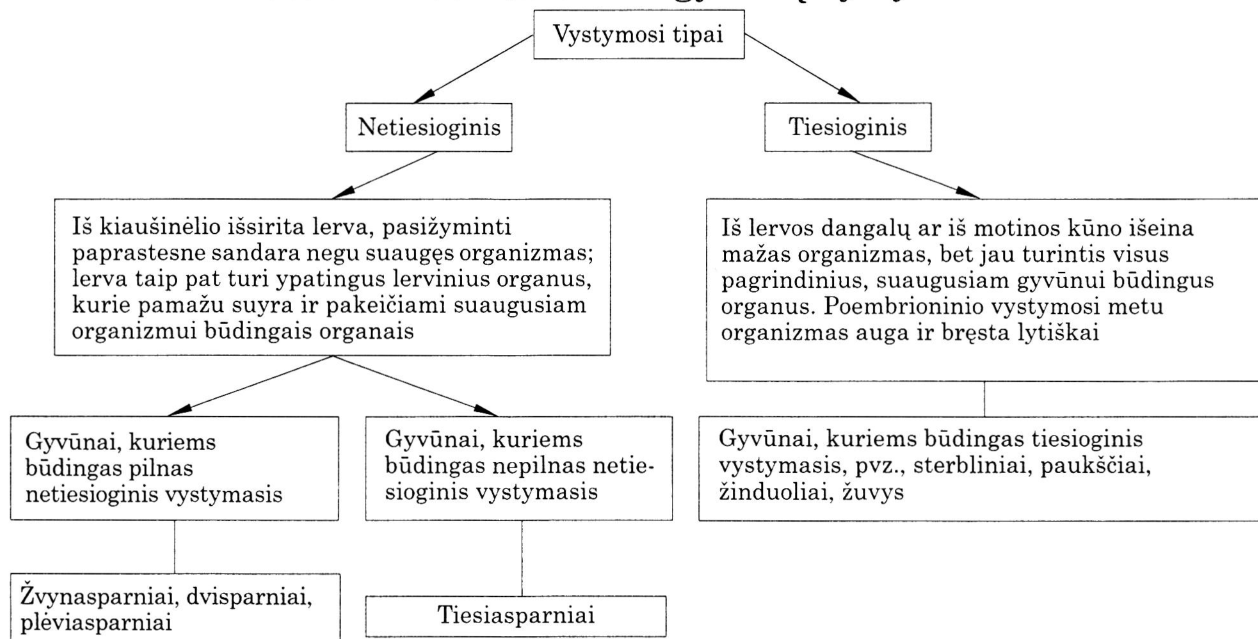
18 lentelė. **Nelytinis dauginimasis**

1	2	3
Dauginimasis sporomis	Spora – ypatinga ląstelė, ją dengia tvirta sienelė, sauganti nuo išorinio poveikio	Sporiniai augalai; kai kurie pirmuonys
Vegetatyvinis dauginimasis:	Rūšies individų skaičius didėja nuo motininio organizmo vegetatyvinio kūno atsiskiriant gyvybingoms dalims	Augalai, gyvūnai
– augalų	Pumpurų, šakniagumbių, šakniavaisių, svogūnų, šakniastiebių formavimasis	Lelijiniai, bulviniai, kryžmažiedžiai ir kt
– gyvūnų	Simetrinis ir asimetrinis dalijimasis	Duobagyviai, jūrų žvaigždės, žieduotosios kirmėlės

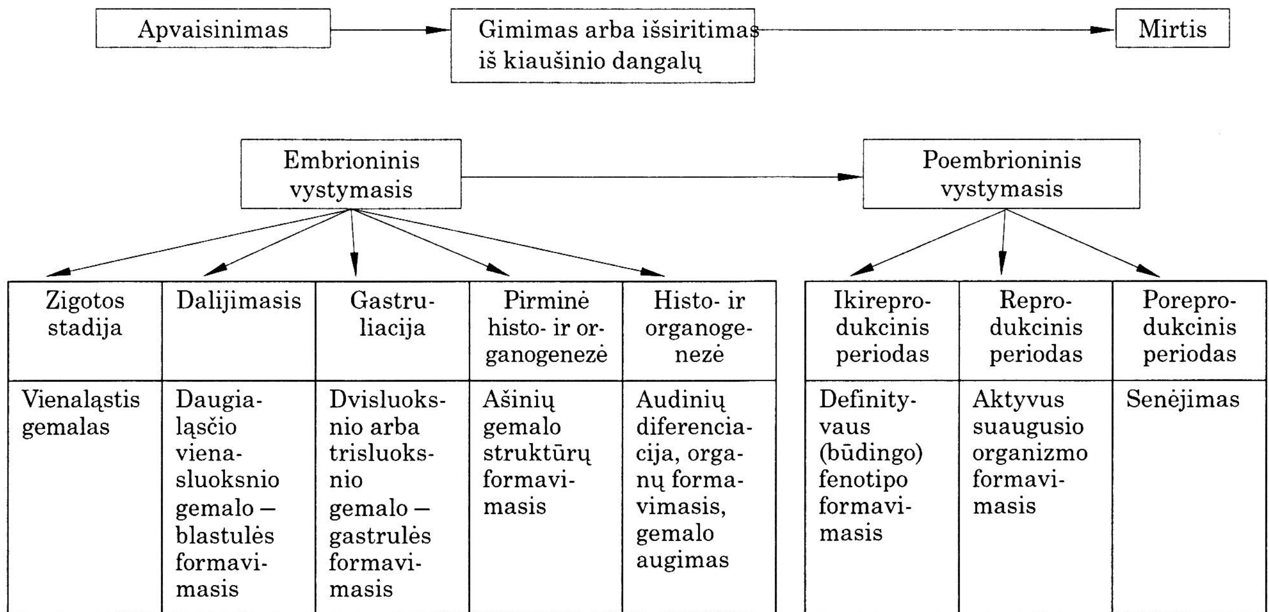
19 lentelė. **Gyvūnų embrioninis vystymasis. Gemaliniai lapeliai, iš jų susiformuojantys audiniai ir organai**

Lapelio pavadinimas	Iš lapelio išsivystantys audiniai ir organai
EKTODERMA	Kūno dangalai (išorinis epitelis, odos liaukos, raginiai žvynai, paviršinis dantų sluoksnis), nervų sistema, priekinė ir užpakalinė žarnyno dalys
ENTODERMA	Vidurinės žarnos epitelis ir virškinimo liaukos, kvėpavimo sistemos epitelis
MEZODERMA	Visi raumeniniai ir jungiamieji audiniai, šalinimo organų kanalai, kraujotakos sistema, dalis lytinių organų audinių

8 schema. **Poembrioninis gyvūnų vystymasis**



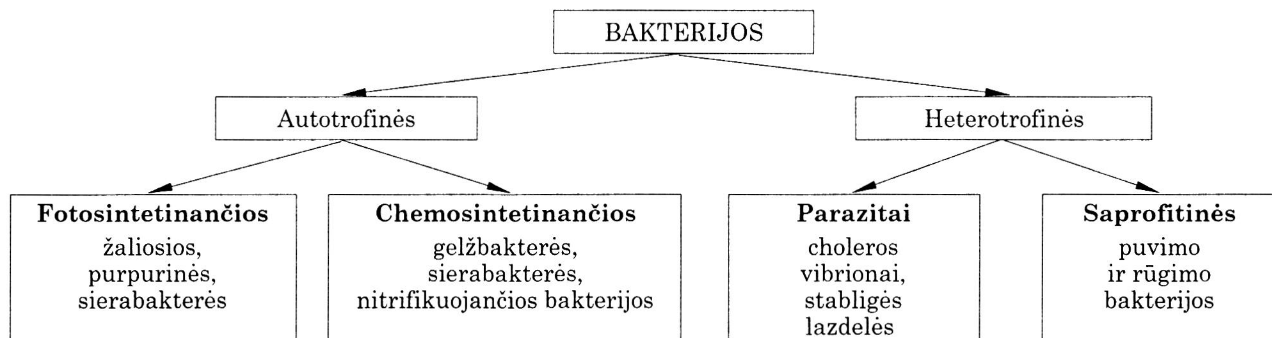
20 lentelė. **Gyvūnų ontogenezės periodai**



21 lentelė. **Bakterijos**

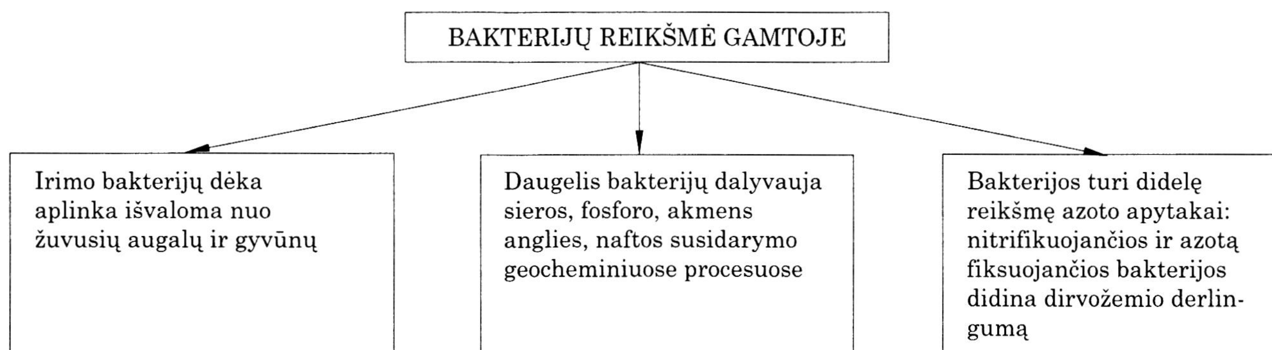
Būdingi požymiai	Požymių pasireiškimo ypatybės
Gyvenamoji terpė	Paplitusios visur: atmosferoje, hidrosferoje, litosferoje, žmonių, gyvūnų organizmuose, augaluose. (1 g dirvos – iki 2 mlrd., 1 cm^3 pieno – iki 1 mln., 1 m^3 miesto oro vasarą – iki 25 tūkst., žiemą – iki 5 tūkst.)
Pagrindinės bakterinių ląstelių formos	kokai, bacilos, vibrionai, spirochetos, spirilos
Bakterinės ląstelės sandara	Bakterinę ląstelę iš išorės gaubia tvirtas apvalkalėlis – ląstelės sienelė, o vidinį karkasą atstoja glikopeptidas mureinas. Citoplazmoje yra ribosomos (iki 10 000 kiekvienoje ląstelėje), citoplazminės membranos įlinkiai, atliekantys daugelio organoidų funkcijas; intarpai, kuriuose glūdi mitybinių medžiagų atsargos. Prokariotai. Nepalankiomis sąlygomis formuojasi ypatinga bakterijos būsena – spora
Bakterijos genetinė medžiaga	Paveldimos informacijos nešėja – DNR (paprastai uždaro žiedo formos) arba RNR. Nėra gerai išreikšto branduolio
Bakterijos dauginimasis	Dalijimosi būdu, kuris vyksta po bakterinės chromosomos – žiedinės DNR – padvigubėjimo. Lytinio dauginimosi procesas – genetinės medžiagos mainų tarp individų formos

9 schema. **Bakterijų įvairovė priklausomai nuo jų mitybos būdo**



22 lentelė. **Bakterijų reikšmė žmogui**

Naudojimo sritis	Neigiamas poveikis	Teigiamas poveikis
MEDICINA VETERINARIJA	**Parazitinės (patogeninės) bakterijos** sukelia ligas – žmogaus: marą, cholerą, tuberkuliozę, dizenteriją, meningitą, šiltinę ir kt.; – naminių gyvūnų: bruceliozę; – kultūrinių augalų: bakteriozes	Naudojamos serumams ir vakcinoms ruošti; antibiotikų (streptomicino, nistatino, eritromicino, oleandomicino ir kt.) gamybos pagrindas
PRAMONĖS, ŽEMĖS ŪKIO ŠAKOS	Puvimo ir rūgimo bakterijos gadina maisto produktus Bakterijų gyvybinė veikla sukelia daugelio gamybinių medžiagų – metalų, medžio, popieriaus ir kitų – biologinį irimą ar biologinę koroziją	Pienarūgščio rūgimo bakterijos naudojamos raugintо pieno produktams gaminti, kopūstams ir agurkams rauginti, žemės ūkyje – pašarams silosuoti Acto rūgimo bakterijos naudojamos vyno actui, kuris naudojamas vaisiams ir daržovėms marinuoti; odos ir tekstilės pramonėje; mikrobiologinėje pramonėje



23 lentelė. **Melsvabakterės**

Požymiai	Požymių pasireiškimo ypatybės
Gyvenamoji aplinka	Plačiai visur paplitusios, geba gyventi pačiose įvairiausiose sąlygose: esant –83 °C Antarktidoje ir +85–90 °C karštuosiuose šaltiniuose. Apsigyvena ant plikų uolų, lavos srautų, vulkaninėse salose, ten, kur nėra jokių kitos gyvybės ženklų
Ląstelės forma	Apvalios, stipriai ištęstos, plokščios. Ląstelės gyvena pavieniui arba formuoja siūlus ir kolonijas
Ląstelės sandara	Tipiška prokariotinės ląstelės struktūra, genetinė medžiaga (žr. 11 lentelę) susideda iš vienos chromosomos, neatskirta nuo citoplazmos. Gerai išvystytas ląstelių fotosintezės aparatas, yra apie 30 įvairių viduląstelinių fermentų
Dauginimasis	Pagrindinis dauginimosi būdas – ląstelės dalijimasis pusiau arba dauginimasis sporomis. Storu apvalkalu padengtos sporos leidžia išgyventi nepalankiomis aplinkos sąlygomis ir ilgą laiką užtikrina ląstelės gyvybingumą
Gyvybinės veiklos ypatumai	Fotosintezės produktas – glikoproteidas, į citoplazmą patenkantis granulių pavidalu. Melsvabakterių, gyvenančių sieringuose vandens telkiniuose, citoplazmoje yra sieros. Gali fiksuoti atmosferos azotą, todėl yra specialiai auginamos ryžių laukuose

Neigiamas melsvabakterių poveikis pasireiškia masiniu dauginimusi vandens telkiniuose, sukeliančiu vandens žydėjimą, todėl vanduo tampa netinkamas vartoti. Tokiuose telkiniuose taip pat pablogėja visų kitų organizmų gyvenimo sąlygos

24 lentelė. **Grybų karalystė**

Būdingos savybės:
heterotrofinis mitybos būdas (įsiurbiant), atsarginė mitybinė medžiaga – glikogenas, ląstelės sienelėje yra chitino, medžiagų apykaitos produktas – karbamidas

Grybų reikšmė

Gamtoje	Žmogaus gyvenime
• Formuoja derlingojo dirvožemio sluoksnį • Ksilofitai ardo gyvą ir negyvą medieną • Funkcionuoja kaip mitybinių grandinių grandys • Yra augalų ir gyvūnų parazitai	• Žmogaus, gyvūnų, kultūrinių augalų ligų sukėlėjai • Produkuoja biologiškai aktyvias medžiagas, fermentus, organines rūgštis • Yra mitybos produktai • Naudojami biotechnologijoje ir mikrobiologijoje

24 lentelė. **Grybų karalystė**

Paplitimas ir reikšmė	Išorinė išvaizda ir sandara	Dauginimasis
Grybai prisitaikę prie įvairių aplinkos sąlygų: dirvožemyje daugelis grybų gyvena simbiozėje su medžių šaknimis, formuodami **mikorizę**; dalyvauja organinių medžiagų mineralizacijoje, sudarydami **humusą**; kai kurios dirvožemyje gyvenančių grybų rūšys ardo miško paklotę; plėšrūs dirvožemio grybai gaudo smulkias apvaliąsias kirmėles; gali parazituoti augalų ir gyvūnų organizmuose; vandenyje gyvena ant augalinių liekanų	Grybų dydis labai įvairus – nuo mikroskopiškai mažų (vienaląstės formos, pavyzdžiui, mielės) iki didelių egzempliorių, kurių vaisiakūnis siekia 0,5 m ir daugiau. Vaisiakūnį sudaro grybiena, arba micelis, kuri yra besišakojančių siūlų – hifų – sistema. Hifai pasižymi viršūniniu augimu ir šoniniu šakojimusi. Žemesniųjų grybų micelis – viena gigantiška ląstelė. Aukštesniųjų grybų hifai prasiskverbia į dirvožemį, vaisiakūnyje formuojasi sporos	Dauginimasis → Nelytinis →→ Micelio dalimis → Vystosi naujas micelis →→ Sporomis → Vystosi ant ypatingų hifų – sporangėkočių → Lytinis →→ Specializuotomis ląstelėmis (gametomis) →→→ Gametogamija →→→ Somatogamija →→→ Gametangiogamija

25 lentelė. **Kerpių* skyrius**

KERPĖS – simbiontiniai organizmai, kurių kūną (talomą) sudaro du komponentai: autotrofinis (melsvabakterės, žaliadumbliai, auksadumbliai ir rudadumbliai) ir heterotrofinis (grybas). Kerpės išskiria ypatingų medžiagų, kurių neaptinkama kitose organizmų grupėse

Gyvenamoji aplinka ir ekologinis vaidmuo	• Plačiai paplitusios, vaidina svarbų vaidmenį tundros, miškatundrės ir miško ekosistemų augalinės dangos formavime; kerpės, nors ir nebūdamos parazitais, gali daryti netiesioginę žalą medžiams, jų talome slepiasi vabzdžiai-kenkėjai • Pirmosios apsigyvena negyvenamuose plotuose ir sudaro sąlygas augti aukštesniesiems augalams; prisideda prie kalnų uolienų cheminio dūlėjimo • Svarbus vaidmuo sausumos biogeocenozėse • Jautrios oro užterštumui, ypač sieros junginiais, todėl yra oro kokybės indikatoriai

Požymiai	Požymių pasireiškimo ypatybės
Sandara	Vegetatyvinis kerpės kūnas (gniužulas) susideda iš susipynusių grybo hifų, tarp kurių išsidėsčiusios dumblių ląstelės Daugumos kerpių tankios grybo hifų sankaupos suformuoja viršutinį ir apatinį žievės sluoksnius. Po viršutiniu sluoksniu išsidėstęs dumblių sluoksnis. Žemiau – šerdis, sudaryta iš padrikai išsidėsčiusių hifų ir oro ertmių

* Dėl tikslios sistematinės kerpių padėties nėra vieningos nuomonės

25 lentelė. **Kerpių skyrius**

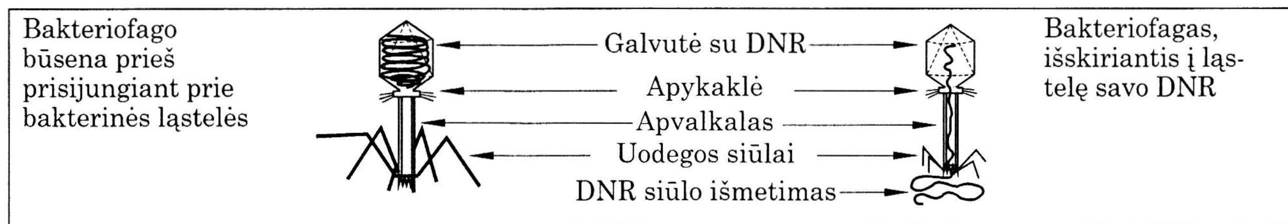
Požymiai	Požymių pasireiškimo ypatybės
Talomo formos:	
skrotelinė (žieviška)	• Žievelės pavidalo, standžiai priaugusi prie substrato, iki 5 mm storio, auga žemės paviršiuje, ant medžių ir krūmų žievės
lapiškoji	• Sudėtingesnės negu žieviška sandaros, apvalios formos, dažniausiai su karpytais kraštais ar suskaldyta į nedideles, iki 20 cm skersmens skiauteles Prie substrato tvirtinasi grybų hifų, padengtų žieviniu sluoksniu, gumbureliais
krūmiškoji	• Sudėtingiausios sandaros; gniužulo forma – vertikalus arba kabantis, iki 50 cm aukščio, krūmelis. Epifitinės kabančiosios kerpės yra ypač didelės – iki 8 m
Dauginimasis	• Grybo suformuotomis sporomis arba vegetatyviškai – lūžusiomis talomo dalimis, kurios savarankiškai auga naujoje vietoje • Po viršutine gniužulo danga besiformuojančiais ypatingais dariniais, kuriuos sudaro dumblių ląstelės, apraizgytos grybo hifų

26 lentelė. **Virusai**

VIRUSAI – neląstelinė gyvybės forma. Tai – parazitai, galintys gyventi tik vienaląsčiuose ar daugialąsčiuose organizmuose. Jų, kitaip negu ląstelių, neįmanoma išauginti dirbtinėje mitybinėje terpėje. Virusai yra labai maži, lengvai praeina pro bakterinius filtrus

Virusų sandara	Virusų gyvybinės veiklos etapai
Viruso genetinė medžiaga (DNR arba RNR) apgaubta baltyminiu apvalkalu. SU APVALKALU **dviguba DNR** raupų virusai; herpesvirusai **vienguba RNR** tymų, kiaulytės virusai; gripo virusai; pasiutligės virusai; leukozės, AIDS virusai BE APVALKALO **dviguba DNR** irido-virusai; adeno-virusai	1. Virusas, susijungęs su ląstelės paviršiuje esančiu baltymu-receptoriumi, patenka į ląstelę. 2. Virusas dauginasi, reduplikuojant jo genomui; šį procesą skatina viruso genome užkoduoti atitinkami fermentai. 3. Virusinių baltymų sintezė ir kapsidės (baltyminio apvalkalo) susiformavimas. 4. Vėl susidariusios viruso dalelės palieka ląstelę, užkrėsdamos kaimynines ląsteles Virusinės infekcijos tipai Šeimininko ląstelė → • Gyvena ir dalijasi; viruso genomas yra chromosomoje • Suardoma ir žūva • Gyvena toliau ir gamina naujus virusus

10 schema. **Bakteriofago įsiskverbimo į ląstelę būdai**



GENETIKA

GENETIKA yra mokslas, tiriantis visiems organizmams būdingų savybių – kintamumo ir paveldimumo – dėsnius

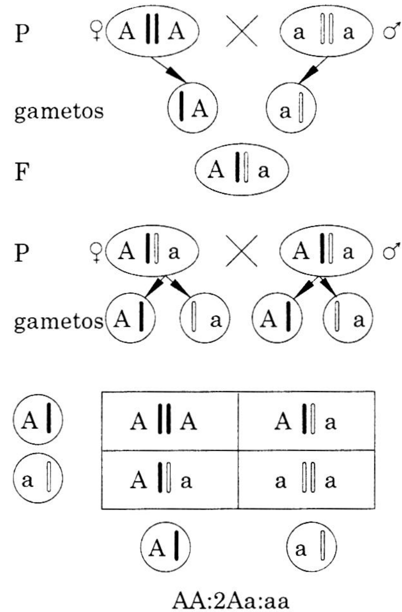
27 lentelė. **Genetikos metodai**

Metodo pavadinimas	Metodo esmė
HIBRIDIZACIJOS	Atliekama atskirų lytiškai besidauginančių organizmų požymių ir savybių paveldėjimo dėsnių bei genų kintamumo ir jų kombinatorikos analizė. Metodo pradininkas – G. Mendelis
CITOLOGINIS	Paveldimumas ląsteliniame ir subląsteliniame lygmenyje (chromosomos, DNR) tiriamas šviesinio ir elektroninio mikroskopo pagalba
CITOGENETINIS	Hibridizacijos ir citologinio metodų sintezė leidžia analizuoti žmogaus kariotipą, struktūrinius ir kiekybinius chromosomų pokyčius
POPULIACINIS-STATISTINIS	Šiuo metodu vertinami skirtingų genų aptikimo populiacijoje dažniai, apskaičiuojamas heterozigotinių organizmų kiekis. Padeda prognozuoti individų, kuriems gali pasireikšti patologinis (mutantinis) genas, kiekį
BIOCHEMINIS	Tiriami genų mutacijų sukelti medžiagų (baltymų, riebalų, angliavandenių, mineralinių medžiagų) apykaitos pažeidimai
MATEMATINIS	Kiekybinis požymių paveldėjimo apskaičiavimas
GENEALOGINIS	Atliekamas genealoginių eilių ir medžių (žmogaus, gyvūnų) sudarymo principu. Leidžia nustatyti paveldimų požymių tipą ir charakterį
DVYNIŲ	Tiriami vienodo genotipo dvyniai, taip nustatant aplinkos poveikį požymių formavimuisi
ONTOGENETINIS	Padeda tirti genų veiklą individualaus vystymosi procese; kartu su biocheminiu metodu leidžia heterozigotiniuose individuose pagal fenotipą aptikti recesyvinius genus

28 lentelė. **G. Mendelio atrasti požymių paveldėjimo dėsniai**

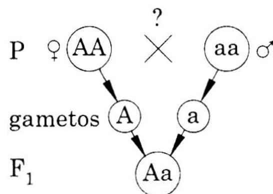
<table>
<tr><td>
I MENDELIO DĖSNIS
Pirmos kartos hibridų vienodumo dėsnis
Kryžminantis dviems skirtingų grynųjų linijų organizmams (dviems homozigotiniams organizmams), kurie vienas nuo kito skiriasi viena alternatyvių požymių pora, visi pirmos kartos (F_1) hibridai bus vienodi ir turės vieno iš tėvų požymį
</td><td>
Žirnio spalva — Žirnio forma
geltona, žalia; lygi, raukšlėta
P: AA × aa; BB × bb
gametos: A, a; B, b
F_1: Aa; Bb
geltoni žirniai; lygūs žirniai
</td></tr>
<tr><td>
II MENDELIO DĖSNIS
Požymių išsiskyrimo dėsnis
Kryžminant pirmos kartos palikuonis (du heterozigotinius individus) tarpusavyje, antroje kartoje požymiai išsiskirs tokiu santykiu: pagal fenotipą 3:1, pagal genotipą 1:2:1
</td><td>
F_1: Aa × Aa
gametos: A, a, A, a
F_2: AA, Aa, Aa, aa
geltoni, žali
žirniai
</td></tr>
<tr><td>
III MENDELIO DĖSNIS
Nepriklausomo požymių paveldėjimo dėsnis
Kryžminant du homozigotinius individus, besiskiriančius tarpusavyje dviem ir daugiau alternatyvių požymių, genai ir juos atitinkantys požymiai paveldimi nepriklausomai vienas nuo kito ir gali pasiskirstyti visais įmanomais rinkiniais. Nepriklausomo požymių pasiskirstymo (paveldėjimo) dėsnis pasireiškia tada, kai požymius nulemiantys genai išsidėsto skirtingose chromosomų porose
</td><td>
žirniai: spalva, forma
geltoni, lygūs; žali, raukšlėti
P: AABB; aabb
F_1: AaBb
geltoni, lygūs
<table>
<tr><td>gametos</td><td>AB</td><td>Ab</td><td>aB</td><td>ab</td></tr>
<tr><td>AB</td><td>AABB</td><td>AABb</td><td>AaBB</td><td>AaBb</td></tr>
<tr><td>Ab</td><td>AABb</td><td>AAbb</td><td>AaBb</td><td>Aabb</td></tr>
<tr><td>aB</td><td>AaBB</td><td>AaBb</td><td>aaBB</td><td>aaBb</td></tr>
<tr><td>ab</td><td>AaBb</td><td>Aabb</td><td>aaBb</td><td>aabb</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

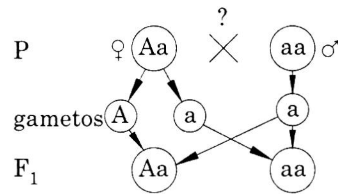
29 lentelė. Citologiniai Mendelio dėsnių pagrindai

Citologiniai pagrindai yra tokie:	
• Chromosomos yra porinės (t. y. genai, lemiantys vieną ar kitą požymį, yra poriniai) • Mejozės ypatybės (procesai, mejozės metu užtikrinantys nepriklausomą chromosomų su jose esančiais genais išsiskirstymą į priešingus ląstelės polius, o vėliau ir į skirtingas gametas) • Apvaisinimo proceso ypatybės (atsitiktinis chromosomų, turinčių po vieną alelių poros geną, pasiskirstymas)	

11 schema. Analizuojamasis kryžminimas

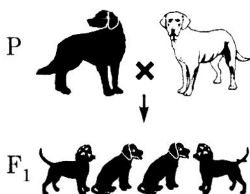
Šis kryžminimo būdas taikomas atskiro individo genotipui (heterozigotiniam ar homozigotiniam) nustatyti

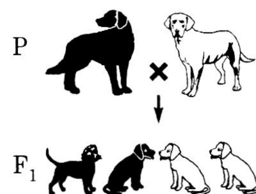




Aa – 100%; visi palikuonys turi vienodą genotipą su **dominuojančiais požymiais**

Aa – 50%, aa – 50%; pusė palikuonių su dominuojančiais, pusė – su **recesyviniais požymiais**





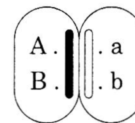
12 schema. **Sukibusių genų paveldėjimas**

Morgano dėsnis
Genai, esantys vienoje chromosomoje, paveldimi kartu

Genai:
A, a – muselės drozofilos kūno spalvos
B, b – sparnų forma

A . | . a
B . | . b

Gametos:



GENŲ SUKIBIMO SUARDYMAS

pilko kūno genas — A . | . a — tamsaus kūno genas

normalių sparnų genas — B . | . b — rudimentinių sparnų genas

Mejozės metu homologinės chromosomos konjuguoja ir šio proceso metu gali apsikeisti savo dalimis

A . | . a
b . | . B

13 schema. **Sukibimo grupės**

Visi į vienos chromosomos sudėtį įeinantys genai paveldimi kartu ir sudaro vieną sukibimo grupę

- Žmogus 23 grupės
- Šuo 36 grupės
- Sazanas 52 grupės
- Paprastasis uosis 23 grupės
- Šimpanzė 24 grupės
- Tritonas 12 grupių
- Ešerys 14 grupių
- Maliarinis plazmodijus 1 grupė
- Eglė 12 grupių
- Naminė musė 6 grupės

14 schema. **Nealelinių genų sąveika**

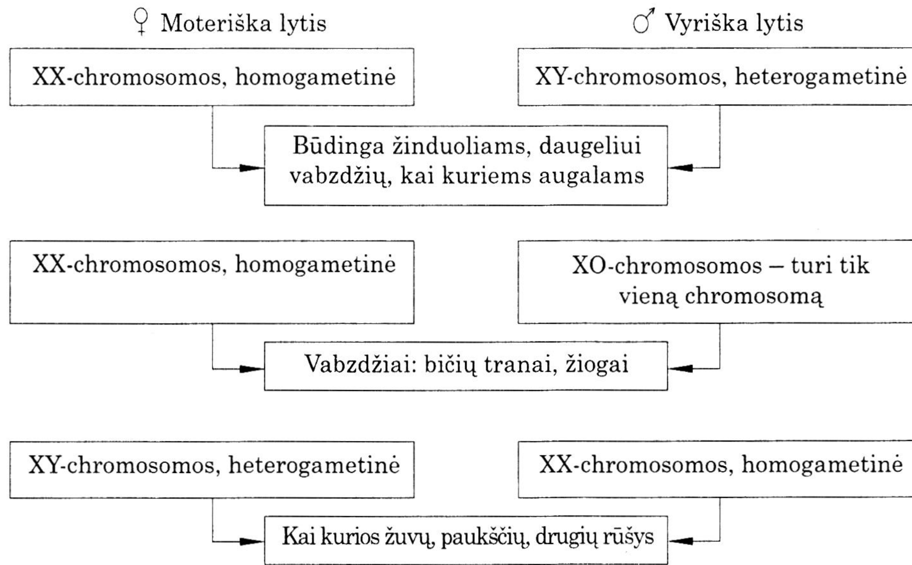
Daugelio požymių paveldėjimas ir vystymasis priklauso nuo nealelinių genų sąveikos tipo

KOMPLEMENTARUMAS	Nealeliniai genai, pasireikšdami kartu, suformuoja naują požymį Pavyzdys: kvapiojo pelėžirnio žiedų spalvos paveldėjimas **Žiedai** P: baltas AAbb × baltas aaBB F_1: purpurinis AabB F_2: 9/16 purpuriniai A- ir -B; 7/16 balti aa- ir -bb
POLIMERIŠKUMAS	Pasireiškia tada, kai požymio išsivystymas priklauso nuo dominantinių genų, lemiančių tą požymį, kiekio Pavyzdys: kviečio grūdo spalvos paveldėjimas **Grūdai** P: raudonas $A_1A_1A_2A_2$ × baltas $a_1a_1a_2a_2$ F_1: raudonas $A_1a_1A_2a_2$ F_2: raudonas $A_1A_1A_2A_2$; raudonas $A_1A_1a_2a_2$; raudonas $a_1a_1A_2A_2$; baltas $a_1a_1a_2a_2$
EPISTAZĖ	Reiškinys, priešingas komplementarumui; vienos alelių poros genai – supresoriai, arba stelbėjai, – slopina kitos alelių poros genų pasireiškimą Pavyzdys: kiaulių šerių spalvos paveldėjimas, sąveikaujant dviems genų poroms P: juodas plaukas EEii × baltas plaukas eeII F_1: baltas plaukas EeIi F_2: baltas plaukas 12/16 ---i; juodas plaukas 3/16 E -iI; raudonas plaukas 1/16 eeii

15 schema. Lyties genetika

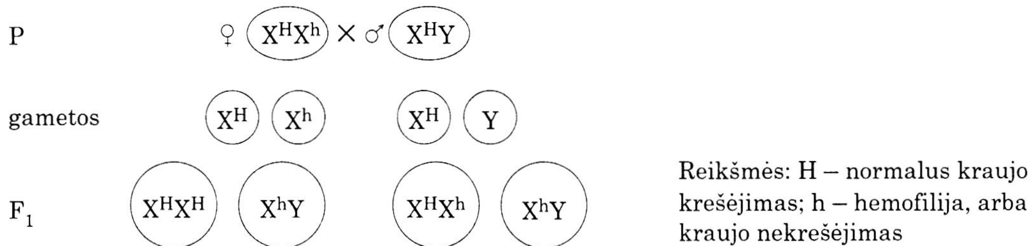
LYTIS – visuma organizmo savybių ir požymių, lemiančių palikuonių vedimą ir genetinės informacijos perdavimą gametomis

Chromosominis lyties apsprendimas



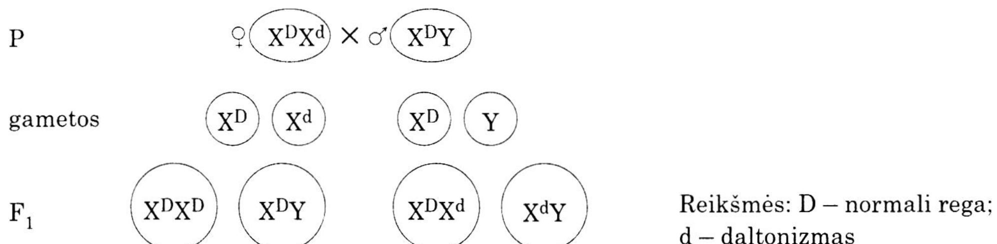
16 schema. Sukibusių su lytimi požymių paveldėjimas

Hemofilijos paveldėjimas



Reikšmės: H – normalus kraujo krešėjimas; h – hemofilija, arba kraujo nekrešėjimas

Daltonizmo paveldėjimas

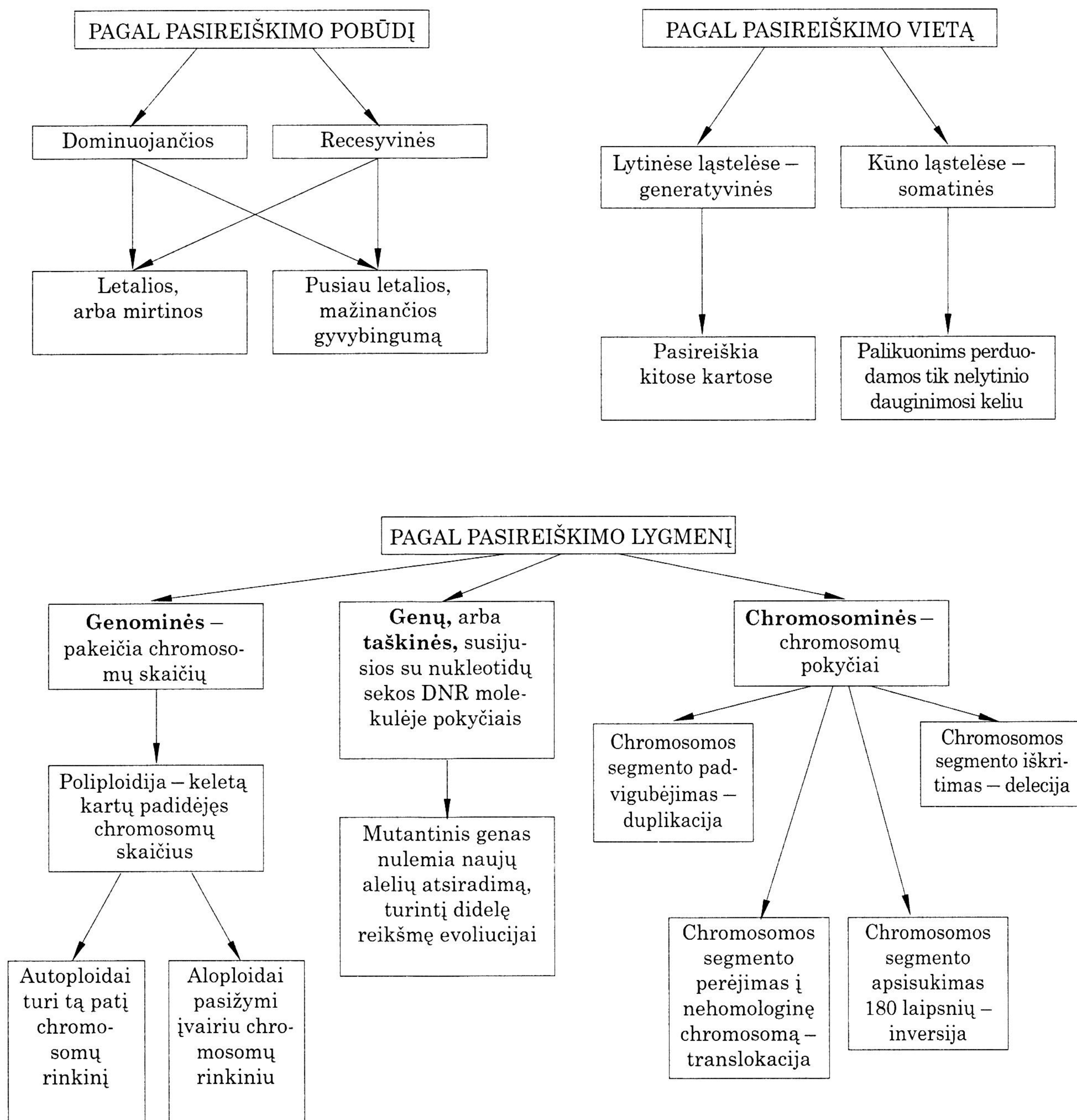


Reikšmės: D – normali rega; d – daltonizmas

17 schema. **Paveldimas kintamumas (genotipinis)**

Paveldimas kintamumas – tai organizmo požymių pokyčiai, nulemti genotipo ir išliekantys keliose kartose. Mutacijos – paveldimi genetinės medžiagos pokyčiai

Mutacijų klasifikacija



30 lentelė. **Homologinių eilių paveldimo kintamumo dėsnis (suformulavo N. Vavilovas)**

Genetiškai artimos rūšys ir gentys apibūdinamos tapačiomis paveldimo kintamumo eilėmis

Bendra varpinių šeimos rūšių veislinio (rasinio) kintamumo schema (pagal. N. Vavilovą)

Paveldėjimo procese įvairuojantys augalų požymiai			Rugys	Kvietys	Miežis	Aviža	Sora	Sorgas	Kukurūzas	Ryžis	Varputis
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ŽIEDYNAS	Padengimas apsaugine plėvele	Su plėvele	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		Plikas	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	Akuotumas	Su akuotais	+	+	+	+		+		+	+
		Be akuotų	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		Trumpaakuotis	+	+	+	+	+	+		+	+
		Su diferencijuotais akuotais	+	+	+						
		Su akuoto formos išaugomis ant žvynelių	+	+	+						
GRŪDAS	Spalva	Balta	+	+	+	+	+	+	+	+	
		Raudona	+	+	+			+	+	+	+
		Žalia (pilkai žalia)	+	+	+	+	+		+	+	+
		Juoda (pilkai juoda)	+	+	+			+	+	+	
		Violetinė (antociano)	+	+	+				+	+	+
	Forma	Apvali	+	+	+	+	+	+	+	+	
		Pailga	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	Konsistencija	Stikliška	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		Matinė (krakmolinė)	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		Vaškinė (kitaip, negu matinio tipo, reaguoja su jodu)		+	+		+	+	+	+	
BIOLOGINIAI POŽYMIAI	Gyvenimo būdas	Žieminis	+	+	+	+				+	
		Vasarinis	+	+	+	+	+	+	+	+	
		Pusiau žieminis	+	+	+	+	+	+	+	+	
	Brendimas	Vėlyvas	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		Ankstyvas	+	+	+	+	+	+	+	+	+

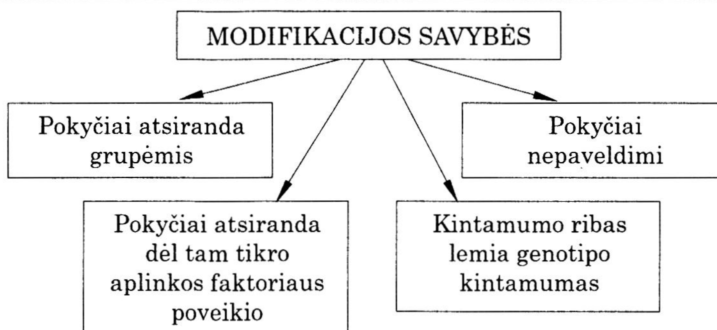
30 lentelė. **Homologinių eilių paveldimo kintamumo dėsnis (suformulavo N. Vavilovas)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
BIOLOGINIAI POŽYMIAI	Ekologinis tipas	Hidrofilinis	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		Kserofilinis	+	+	+	+	+	+	+		+
	Atsparumas šalčiui	Silpnas	+	+	+	+	+	+	+	+	
		Aukštas	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	Reakcija į tręšimą	Stipri	+	+	+	+			+		
		Silpna	+	+	+	+			+		

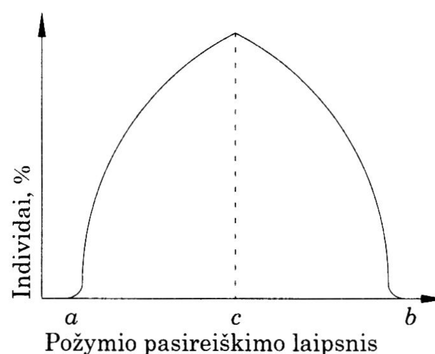
Taikant homologinių eilių paveldimo kintamumo dėsnį biologiniais metodais galima sukurti norimus paveldimus pokyčius; selekcininkams tai leidžia numatyti dirbtinės atrankos kryptis.

18 schema. **Modifikacinis kintamumas**

MODIFIKACINIS KINTAMUMAS – organizmų savybė veikiant aplinkos faktoriams įgyti tam tikrus požymius



Reakcijos norma – modifikacinio kintamumo ribos



Kintamumo, arba reakcijos normos, kreivė: *a*, *b* – modifikacinio kintamumo ribos, *c* – vidutinė norma

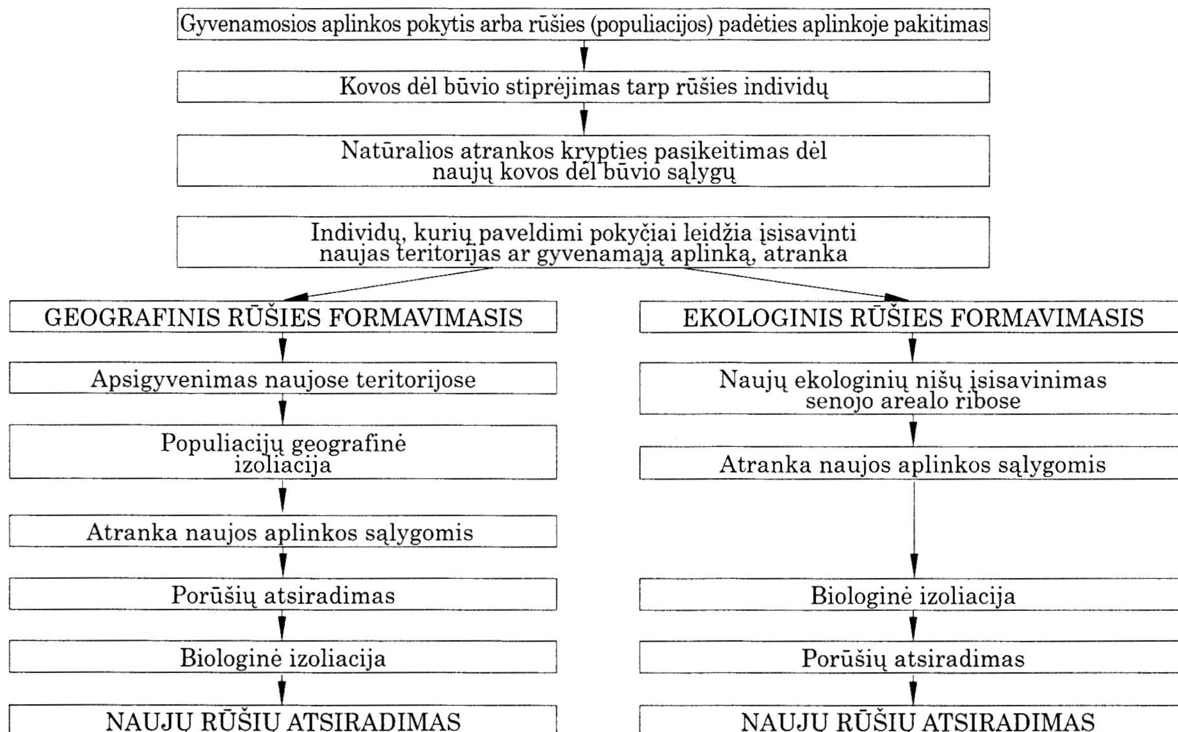
31 lentelė. **Rūšis, rūšies kriterijai**

RŪŠIS – visuma geografiškai ir ekologiškai artimų, galinčių natūraliomis sąlygomis tarpusavyje kryžmintis, populiacijų. Jos pasižymi bendromis morfofiziologinėmis savybėmis ir biologiškai izoliuotos nuo kitų rūšių populiacijų

RŪŠIES KRITERIJAI – tam tikrų požymių, būdingų tik vienai kuriai nors rūšiai, visuma

Rūšies kriterijai	Kiekvieno kriterijaus rodikliai
Morfologinis	Išorinės ir vidinės vienos rūšies individų sandaros panašumas; vienos rūšies atstovų sandaros ypatybių charakteristika
Fiziologinis	Visų gyvybinės veiklos procesų, visų pirma dauginimosi, panašumas. Skirtingų rūšių atstovai paprastai nesikryžmina arba jų palikuonys nevaisingi
Biocheminis	Rūšinis baltymų ir nukleorūgščių specifiškumas
Genetinis	Kiekviena rūšis pasižymi tik jai būdingu chromosomų rinkiniu, chromosomų struktūra ir skirtingomis spalvomis
Ekologinis ir geografinis	Ekologinė niša – paplitimo arealas ir gyvenamoji aplinka. Kiekviena rūšis turi savą gyvenamąją aplinką ir paplitimo arealą

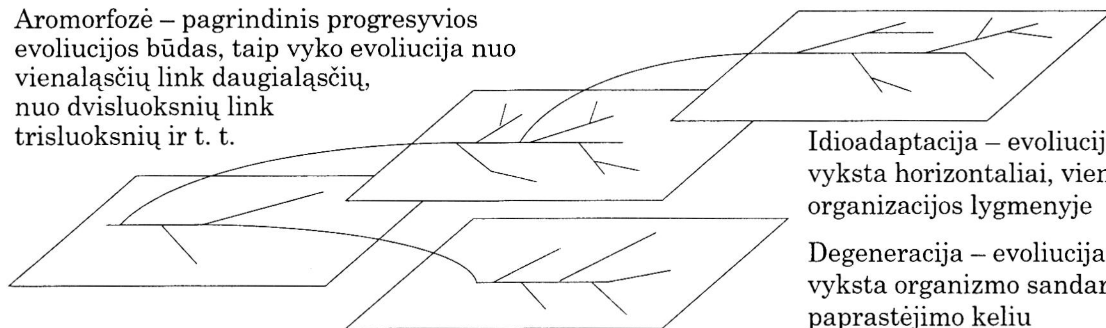
19 schema. **Rūšies formavimosi etapai**



32 lentelė. **Rūšies susidarymo būdai**

Rūšies susidarymo variantai	Atitinkamo varianto būdai
ALOPATRINIS (GEOGRAFINIS)	Nauja rūšis atsiranda iš vienos ar kelių pradinės rūšies populiacijų, esančių pradinės rūšies paplitimo arealo pakraštyje
SIMPATRINIS	Nauja rūšis susiformuoja pradinės rūšies arealo viduje
DIVERGENTINIS	Pradinė rūšis skyla į dvi ar daugiau dėl izoliuojančių barjerų tarp populiacijų atsiradimo ir natūralios atrankos skatinamų skirtumų didėjimo iki visiškos genetinės izoliacijos; rūšių skaičius didėja
FILITINIS	Nauja rūšis susidaro iš vienos rūšies laipsniško keitimosi nevykstant pradinių grupių divergencijos procesui. Tai lemia sąlygų visame rūšies areale kitimas
HIBRIDOGENINIS	Nauja rūšis susiformuoja hibridizacijos metu vykstant alopoliploidijai – dvigubėjant chromosomų skaičiui

20 schema. **Evoliucijos proceso pagrindinės kryptys**



33 lentelė. **Evoliucijos faktoriai (varomosios jėgos)**

Faktorius	Faktoriaus pasireiškimo ypatumai
NATŪRALIOJI ATRANKA formos: varančioji, stabilizuojančioji, dizruptyvinė	Pasirinktinis (diferencialinis) genotipų (arba genų kompleksų), lemiančių individų išgyvenimą arba žūtį, atrinkimas (žr. 34 lentelę)
PAVELDIMAS KINTAMUMAS Kintamumą lemiantys faktoriai	Populiacijos genotipinės sandaros pasikeitimą arba populiacijos genetinį heterozigotiškumą lemia kokybiniai genofondo pokyčiai. • Mutacijos (žr. 17 schemą) • Rekombinacijos – procesai, kai alelių maišymosi populiacijoje metu susidaro nauji genomai • Į populiaciją kartu su kitų populiacijų žiedadulkėmis ar sėklomis, o taip pat skirtingų populiacijų individų kryžminimosi būdu pakliuvęs naujas kintamumo šaltinis sąlygoja genų srautą į populiaciją

33 lentelė. **Evoliucijos faktoriai (varomosios jėgos)**

Faktorius	Faktoriaus pasireiškimo ypatumai
	• Genų dreifas (savaiminiai genetiniai procesai) pasireiškia populiacijose, kurias sudaro mažiau kaip 500 individų – vyksta individų homozigotizacija ir mažėja kintamumas
IZOLIACIJA Erdvinė (geografinė) Reprodukcinė	Bet kokių barjerų, trukdančių vienos rūšies kryžminimąsi su kita, atsiradimas. • Atsiradimą nulemia barjerų (vandens, kalnų, sausumos plotų ir kt.) tarp skirtingų rūšių arealų susiformavimas • Silpnina arba panaikina tarprūšinio kryžminimosi galimybę (sezoninė, mechaninė, etologinė, hibridologinė ir kt.)
POPULIACINĖS BANGOS	Periodiniai ar aperiodiniai organizmų gausumo gamtinėse populiacijose svyravimai; populiacijos genofondo pokyčiai vyksta tiek „kylant“, tiek „leidžiantis“ populiacinei bangai

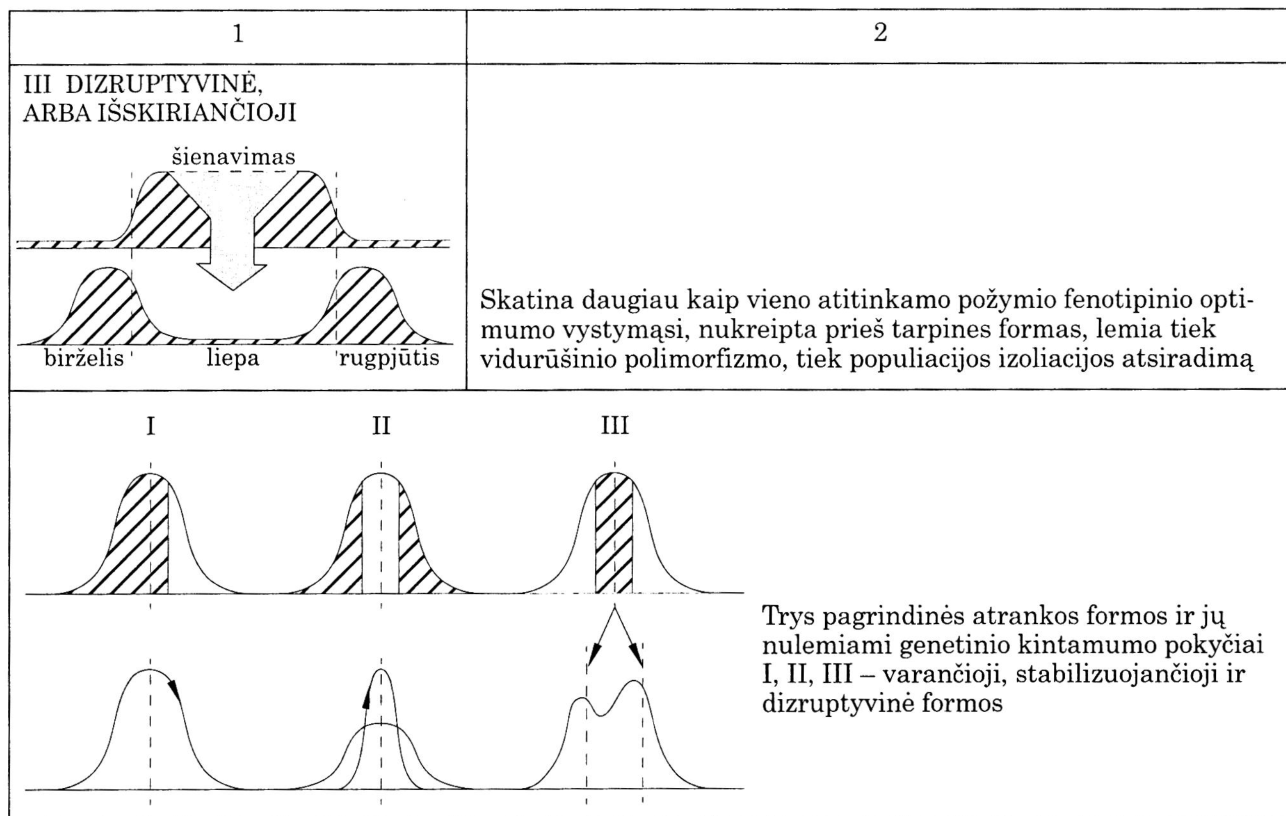
34 lentelė. **Natūrali atranka – varomasis evoliucijos veiksnys**

NATŪRALI ATRANKA – kovos už būvį rezultatas; jos pagrindas – geresnes išgyvenimo galimybes užtikrinančios savybės ir atspariausių individų vedami palikuonys bei silpniau prisitaikiusių organizmų išmirimas

Natūralios atrankos formos

Atrankos formos, grafinė išraiška	Kiekvienos natūralios atrankos formos ypatybės
1	2
I VARANČIOJI A B C D atrankos spaudimas požymio kintamumas	Teigiamai veikia individus, pasižyminčius požymiu, kuris linkęs nukrypti nuo įprastos populiacijai išraiškos; įtvirtina naują organizmo reakcijos normą, atitinkančią besikeičiančias aplinkos sąlygas
II STABILIZUOJANČIOJI y – individų skaičius atrankos spaudimas atrankos spaudimas x – požymio kintamumas	Nukreipta populiacijoje nusistovėjusios požymio vidutinės reikšmės išsaugojimo link. Stabilizuojančiosios atrankos rezultatas – didelis visų stebimos augalų ar gyvūnų populiacijos individų panašumas

34 lentelė. **Natūrali atranka – varomasis evoliucijos veiksnys**



1	2
III DIZRUPTYVINĖ, ARBA IŠSKIRIANČIOJI	Skatina daugiau kaip vieno atitinkamo požymio fenotipinio optimumo vystymąsi, nukreipta prieš tarpines formas, lemia tiek vidurūšinio polimorfizmo, tiek populiacijos izoliacijos atsiradimą
	Trys pagrindinės atrankos formos ir jų nulemiami genetinio kintamumo pokyčiai I, II, III – varančioji, stabilizuojančioji ir dizruptyvinė formos

35 lentelė. **Organizmų prisitaikymas kaip evoliucijos pasekmė**

Prisitaikymo požymiai	Augalai	Gyvūnai
Mitybos būdai	• Gerai išsivysčiusi šaknų ir šakniaplaukių sistema aprūpina vandeniu ir mineralinėmis medžiagomis • Platūs ir ploni lapai padeda apsirūpinti saulės energija • Kai kurie pelkiniai augalai gaudo ir virškina vabzdžius bei smulkius varliagyvius	• Maitinimasis aukštų medžių lapais • Mitybos objektų gaudymas tinklu ir jų tykojimas • Ypatinga burnos organų sandara leidžia gaudyti vabzdžius giliuose ir siauruose urveliuose, ėsti žolę, gaudyti skraidančius bestuburius • Plėšriųjų žinduolių ir paukščių sandaros ypatybės, leidžiančios pagauti ir laikyti auką
Apsauga nuo plėšrūnų	• Nuo žolėdžių saugantys dygliai • Nuodingosios medžiagos	• Gelbstisi greitai bėgdami • Turi adatas, šarvus, skleidžia atbaidantį kvapą

35 lentelė. **Organizmų prisitaikymas kaip evoliucijos pasekmė**

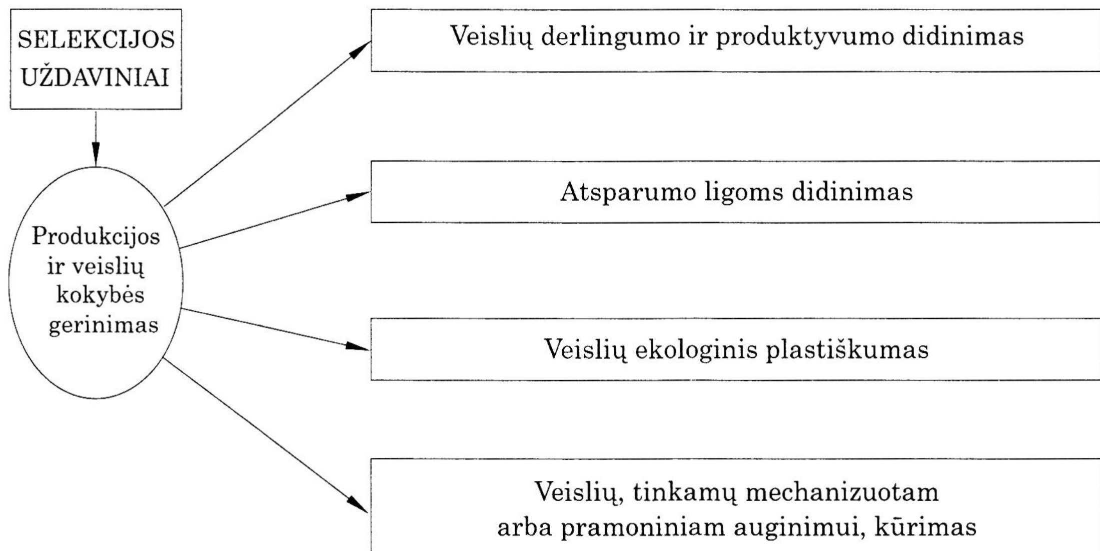
Prisitaikymo požymiai	Augalai	Gyvūnai
Apsauga nuo plėšrūnų	• Rozetės formos lapus nepatogu nuėsti	• Slepiamoji spalva gelbsti pavojaus sąlygomis
Prisitaikymas prie abiotinių faktorių (šalčio)	• Lapų nukritimas • Atsparumas šalčiui • Vegetatyvinių organų išsaugojimas dirvoje	• Migracija į Pietus • Tanki vilna • Žiemos miegas • Poodinis riebalų sluoksnis
Plitimas naujose teritorijose	• Lengvos, sparnuotos sėklos • Kibūs kabliukai	• Paukščių migracijos • Žinduolių migracijos
Dauginimosi efektyvumas	Apdulkintojų priviliojimas: žiedų spalva, kvapas	Lytinio partnerio priviliojimas: ryškios plunksnos, lytiniai atraktantai

Prisitaikymo sąlygiškumas

Prisitaikymas (adaptacija) – atsitiktinių paveldimų pokyčių, didinančių organizmo išgyvenimo galimybes konkrečiomis aplinkos sąlygomis, atrankos rezultatas. Bet kokie prisitaikymai vertingi tik rūšiai įprastomis sąlygomis. Aplinkos sąlygoms keičiantis prisitaikymai organizmui gali tapti nenaudingi arba žalingi.

21 schema. **Selekcijos uždaviniai**

SELEKCIJA – mokslas, siekiantis sukurti naujas arba pagerinti esamas augalų ir gyvūnų veisles, mikroorganizmų štamus



36 lentelė. **Kultūrinių augalų kilmės centrai (pagal N. Vavilovą)**

Centro pavadinimas	Augalai
Vakarų Azijos	Minkštieji kviečiai, žirniai, pupos
Rytų Azijos	Soros, grikiai, šakniavaisiniai ir gumbavaisiniai, kriaušės, obelys, slyvos, daug citrusinių ir dekoratyvinių augalų
Pietvakarių Azijos	Minkštieji, karlikiniai ir apvaliagrūdžiai kviečiai, žirniai, lęšiai, pelėžirniai, nutai (sėjamieji avinžirniai), medvilnė
Pietų Azijos – tropinis	Tropiniai ryžiai, cukranendrės, dauguma grūdinių ir pupinių, bananai, kokoso palmės
Viduržemio jūros	Alyvmedžiai, pupmedžiai, dauguma daržovių
Abisinijos (Etiopijos)	Kietieji kviečiai, miežiai, kavamedžiai, sorgai, bananai
Centrinės Amerikos	Kukurūzai, amerikinės pupelės, moliūgai, pipirai, kakavmedžiai, ilgapluoštė medvilnė
Andų (Pietų Amerikos)	Bulvė, daug kitų šakniagumbinių augalų, tabakas, ananasai, žemės riešutai, chininmedžiai, kokamedžiai

37 lentelė. **Selekcijos metodai**

Metodas		Naudojimas selekcijoje	
		Augalų	Gyvūnų
HIBRIDIZACIJA	Negiminінga (autbrydingas)	Vidurūšinis, tarprūšinis, tarpveislinis kryžminimas, lemiantis heterozę. Naudojama heterozigotinėms aukšto produktyvumo populiacijoms išvesti	Skirtingus požymius turinčių veislių kryžminimas norint suformuoti heterozigotines populiacijas ir pasiekti heterozę. Palikuonys gali būti nevaisingi
	Tarp artimų giminių (inbrydingas)	Grynųjų linijų metodu dirbtinai sukeliama savidulka augalams, kuriems natūraliai būdingas kryžminis apdulkinimas	Artimų giminaičių kryžminimas norint suformuoti homozigotinę grynąją liniją su norimais požymiais
ATRANKA	Masinė	Naudojama augalams, kuriems būdingas kryžminimasis tarp skirtingų individų	Nenaudojama
	Individualioji	Naudojama augalams, kuriems būdinga savidulka; išskiriamos grynosios linijos – vieno individo palikuonys	Naudojama griežta individualioji atranka pagal ūkiui naudingus požymius, ištvermę, eksterjerą

37 lentelė. **Selekcijos metodai**

Metodas	Naudojimas selekcijoje	
	Augalų	Gyvūnų
EKSPERIMENTINIS PALIPLOIDŲ IŠVEDIMAS	Taikomas siekiant išvesti produktyvesnes ir derlingesnes veisles	Nenaudojamas
EKSPERIMENTINĖ MUTAGENEZĖ	Naudojama kaip pradinė medžiaga aukštesniųjų augalų ir mikroorganizmų selekcijai	
GENŲ INŽINERIJA	Naujų genų derinių formavimas DNR molekulėje; plačiai taikoma mikrobiologijoje ir vaistų gamyboje	

AUGALŲ KARALYSTĖ

AUGALAI yra eukariotinių organizmų, kurie auga visą gyvenimą, karalystė.
Pagrindiniai bruožai – fotosintezės vykdymas ir tvirtos ląstelės sienelės, dažniausiai sudarytos iš celiuliozės.
Atsarginė maisto medžiaga paprastai yra krakmolas

38 lentelė. **Augalų subkaralystės**

Subkaralystė, gyvenamoji aplinka	Sandaros ypatybės ir gyvybinė veikla
RAUDONDUMBLIAI Jūros gyventojai, tvirtinasi prie akmenų, kriauklių; daugelis gyvena didelėse gelmėse	Vienaląsčiai ir daugialąsčiai, spalva – nuo ryškiai raudonos giliavandenių iki gelsvos, gyvenančių seklumose; daugialąsčių kūnas – nediferencijuotas gniužulas – talomas. Ląstelės apvalkalėlis dvisluoksnis, sienelėje yra pektino ir hemiceliuliozės. Dauginimasis – vegetatyvinis, nelytinis, lytinis
TIKRIEJI DUMBLIAI Būdinga gyvenamoji terpė – vanduo; yra gėlavandenių, jūrinių, sausumos, dirvožemio, sniego, ledo dumblių ekologinių grupių	Kūnas – paprastai nesuskirstytas į audinius ir organus – gniužulas; gali būti vienaląstis, daugialąstis, kolonijinis. Skirtingos dumblių grupės pasižymi savitais pigmentų rinkiniais, chloroplastų sandara, žiuželių struktūra ir skaičiumi. Dauginimasis vegetatyvinis, nelytinis, lytinis
AUKŠTESNIEJI AUGALAI Auga sausumoje, plačiai paplitę, gyvena įvairiausiomis ekologinėmis sąlygomis	Sudėtingi, diferencijuoti daugialąsčiai organizmai; būdinga dviejų kartų kaita – lytinės (gametofito) ir nelytinės (sporofito). Sporofitas suskirstytas į ūglius (stiebus ir lapus) ir šaknis. Sporofito organuose yra indai, arba tracheidės. Zigota virsta daugialąsčių gemalu

39 lentelė. **Tikrieji dumbliai**

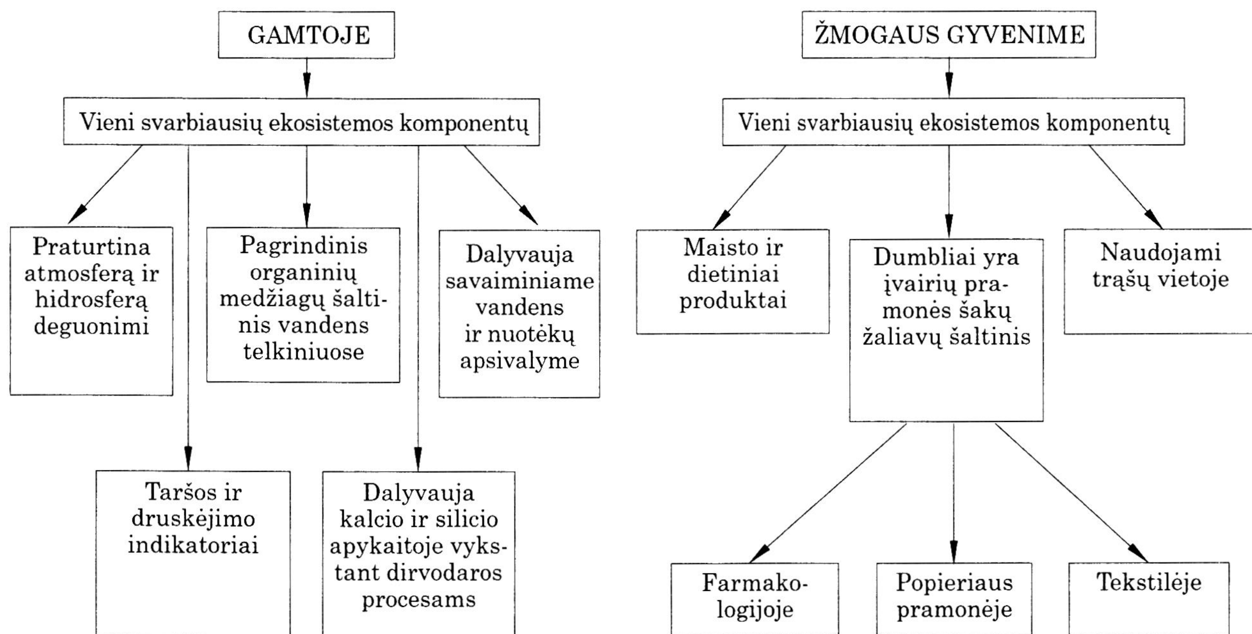
Žemesniųjų augalų, daugiausia vandens, grupė

Skyriai, atstovai	Ypatumai		Gyvenamoji aplinka
	Struktūriniai	Gyvybinės veiklos	
ŽALIADUMBLIAI 350 vienaląsčių dumblių rūšių; atstovai – valkčiadumbliai (*Chlamydomonas*)	Įvairios išorinės sandaros: vienaląsčiai, sifoniniai, daugialąsčiai siūliniai ir juostiniai. Gniužulas tokios pat žalios, kaip ir aukštesniųjų augalų, spalvos	Atsarginė maisto medžiaga – chloroplastuose kaupiamas krakmolas, retai – aliejus. Valkčiadumblis dauginasi vienodomis gametomis	Gėlieji vandenys, jūra; drėgnos sausumos vietovės
Chlorelė (*Chlorella*)	Vienaląsčiai dumbliai su tvirtu apvalkalėliu ir vienu branduoliu, kai kurie turi pulsuojančias vakuoles	Nelytinio dauginimosi metu chlorelės ląstelės dalijasi į keturias ir daugiau dalių – autosporų	Šios genties dumbliai gyvena ir ant medžių žievės
Mauragimbė (*Spirogyra*)	Daugialąsčiai šios genties dumbliai turi siūlišką talomą	Be nelytinio, dauginasi ir lytiniu būdu	Mauragimbės gyvena gėluosiuose vandenyse
Maurakulis (*Volvox*)	Kolonijinis, rutulio formos dumblis, koloniją sudaro 500–60 000 ląstelių	Be nelytinio, būdingas ir lytinis dauginimasis – specializuotomis ląstelėmis	Vandens terpė
TITNAGDUMBLIAI *Centrophyceae* → **šarvas** ← *Pennatophyceae* *Centrophyceae* → spindulinės simetrijos *Pennatophyceae* → dvišalės simetrijos	Iš išorės ląsteles gaubia tvirtas titnaginis apvalkalėlis – šarvas, celiuliozinės sienelės nėra. Šarvo sienelės išvarpytos daugybės smulkiausių angelių, pro kurias vyksta medžiagų apykaita tarp aplinkos ir protoplasto. Chloroplastai pasižymi įvairių atspalvių gelsvai ruda spalva	Gyvena pavieniui arba sudaro kolonijas, grandines, kaspinus, krūmelius. Dauginasi vegetatyviškai, ląstelei skylant pusiau. Lytinis procesas vyksta vienodų arba skirtingų dydžių gametomis	Gyvena visur: gėluosiuose vandenyse, jūrų ir vandenynų seklumose. Rūšiniu požiūriu pati turtingiausia diatomėjomis šiaurinių jūrų zona
RUDADUMBLIAI Laminarija (*Laminaria*). Šios genties atstovai žinomi kaip „jūros kopūstai“	Tik daugialąsčiai. Dydis nuo dešimtųjų milimetro dalių iki dešimčių metrų. Gniužulo forma taip pat įvairi: siūliška, krūmiška,	Fotosintezėje dalyvauja *a* ir *c* chlorofilas. Rudą spalvą lemia pigmentai ksantofilas ir fukoksantinas; turi β-karotino	Rudadumbliai visada prisitvirtinę prie grunto ar kitų augalų ataugomis – rizoidais

39 lentelė. **Tikrieji dumbliai**

Skyriai, atstovai	Ypatumai		Gyvenamoji aplinka
	Struktūriniai	Gyvybinės veiklos	
	rutuliška, žieviška, skiautiška. Kai kurių rūšių gniužulai turi dujines pūsleles, kurios padeda dumbliui išlaikyti vertikalią padėtį. Daugumos rudadumblių rūšių gniužulai daugiasluoksniai ir primena aukštesniųjų augalų audinį, pastebima gniužulo ląstelių diferenciacija į audinius. Ląstelės vienbranduolės; sienelės labai gleivėtos, sudarytos iš vidinio – celiuliozinio ir išorinio – pektininio sluoksnių	Dauginimasis vegetatyvinis, nelytinis ir lytinis – izogamijos būdu. Zigota išauga į diploidinį augalą – sporofitą. Sporofitas gamina judrias sporas. Laminarijų gametofitas egzistuoja trumpai, sporofitas – daugiametis. Rudadumbliai – vienintelis žinomas vertingo produkto – alginato, naudojamo dažančioms ir klijuojančioms medžiagoms ruošti, šaltinis	Aptinkami visuose vandenyse: nuo tropinių iki poliarinių, 6–15 m gylyje. Žinomi atvejai, kai rudadumbliai buvo aptikti 100 ir net 200 m gylyje. Guveinių *(Fucus)* genties dumbliai auga priekrantės zonoje

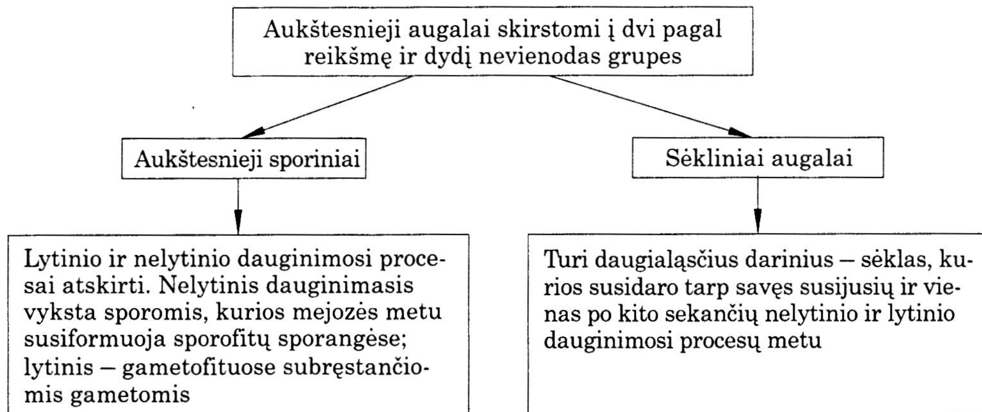
22 schema. **Dumblių reikšmė**



23 schema.

Aukštesniųjų augalų pokaralystė

Yra beveik 300 000 rūšių. Jie priskiriami Riniofitų (išmirę), Samanų, Pataisų, Asiūklių, Paparčių, Plikasėklių ir Gaubtasėklių (Žiedinių) skyriams. Visų skyrių, išskyrus samanas, augaluose vyrauja sporofito stadija. Sporofitas turi vandens indus, arba tracheides, todėl augalai vadinami induočiais



24 schema. **Aukštesniųjų augalų evoliucija**

ŽIEDINIAI, ARBA GAUBTASĖKLIAI

PLIKASĖKLIAI

Mezozojaus eros sėkliniai paparčiai

Paleozojaus eros sėkliniai paparčiai

SAMANOS

PATAISAI

ASIŪKLIAI

PAPARČIAI

Psilofitai

Devono periodo primityvūs paparčiai

RINIOFITAI

Į DUMBLIUS PANAŠŪS AUKŠTESNIŲJŲ AUGALŲ PROTĖVIAI

40 lentelė. **Aukštesniųjų augalų audiniai**

AUDINIAI – struktūra ir funkcijomis panašių ląstelių, pasižyminčių bendra kilme, sistema. Audiniai aukštesniuosiuose augaluose susiformavo evoliucijos proceso metu; tai vyko sudėtingėjant vidinei aukštesniųjų augalų sandarai.

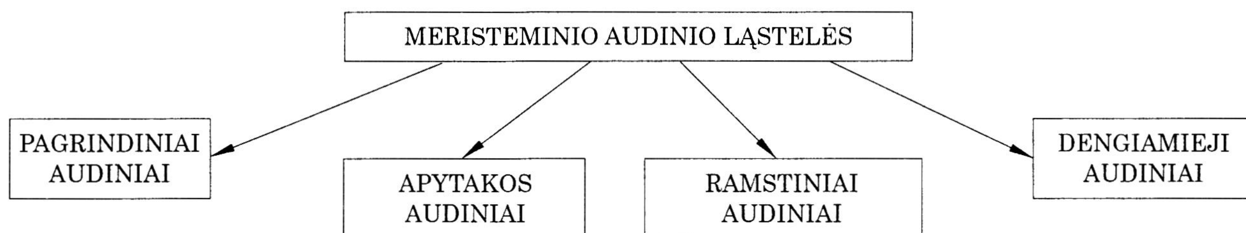
Audinio tipas, vieta augalo organizme	Sandaros ypatybės	Funkcijos
AUGIMO ARBA MERISTEMINIAI (gr. *meristos* – dalus). Augalo augimo zonose	Sudaro nediferencijuotos ląstelės su dideliais branduoliais; pasižymi greita medžiagų apykaita. Vienos meristemos ląstelės embrioninėje vystymosi stadijoje lieka visą augalo gyvavimo laiką, kitos diferencijuojasi	Augalas auga visą gyvenimą dėl nuolat besidalijančių ir besiformuojančių naujų ląstelių
DENGIAMIEJI Skiria nuo aplinkos	Dauguma dengiamųjų audinių sudaryti iš glaudžiai susispaudusių gyvų, rečiau – negyvų ląstelių, ontogenezės metu išsivysto iš meristeminių audinių	Saugo augalo organizmą nuo nepalankių aplinkos poveikių; reguliuoja dujų apykaitą ir transpiraciją
APYTAKOS Sudaro vandens indų ir plaušų pluoštai	Visi šie audiniai yra sudėtingi, kompleksiniai, juos sudaro įvairios ląstelės: gyvos ir negyvos	Laiduoja vandens su mineralinėmis druskomis ir organinėmis medžiagomis pernašą
RAMSTINIAI Nėra jaunose augančių organų dalyse; įeina į žievės ir medienos sudėtį	Ląstelės su sustorėjusiomis ir sumedėjusiomis sienelėmis, kurios atraminę funkciją atlieka ir ląstelėms atmirus	Suteikia augalo organams tvirtumo, atsparumo tempimui, lenkimui, spaudimui
PAGRINDINIAI Tarp kitų nuolatinių audinių visuose organuose	Sudaro gyvos, plonasienės, įvairių formų – apvalios, cilindrinės ir elipsinės ląstelės	Asimiliacinė, atsarginė, vandens pernašos, oro tiekimo
SEKRECINIAI Vegetatyvinių ir reproduktyvių organų išorėje ar viduje	Ląstelės plonasienės, ilgai išlieka gyvybingos, išskiria sekretus (liaukos, liaukiniai plaukeliai, nektarinės, pientakiai)	Priklauso nuo išskiriamo sekreto: apsauginė; dalyvavimas apdulkinimo procese; medžiagų apykaitos produktų šalinimas

41 lentelė. **Meristeminis audinys**

Meristeminio audinio rūšys, lokalizacijos vieta organizme	Kiekvienos audinio rūšies ypatybės
Viršūninė meristema	Išsidėstęs ūglių viršūnėse ir šaknų galiukuose. Asiūklių ir paparčių išvystyta silpnai, sudaryta iš vienos besidalijančios ląstelės. Sėkliniuose augaluose daug besidalijančių ląstelių sudaro augimo kūgelį, užtikrinantį augalo augimą ilgyn
Šoninė meristema	Po žieve išsidėstęs brazdas – vienas ląstelių sluoksnis, kurio dėka ašiniai organai auga platyn (storėja). Brazdas formuoja medienos ir karnienos ląsteles
Įterptinė meristema	Yra vienaskilčių augalų tarpubamblių pagrinde; jos dėka tarpubambliai auga
Žaizdų meristema	Formuojasi bet kuriame augalo organe, kuris buvo pažeistas

25 schema. **Meristeminio audinio ląstelių diferenciacija**

DIFERENCIACIJA – vienodų meristemos ląstelių virtimas įvairių audinių ląstelėmis, kurios skiriasi struktūra ir funkcijomis; diferenciaciją kontroliuoja specifiniai hormonai



42 lentelė. **Dengiamieji audiniai**

Dengiamųjų audinių rūšys	Sandaros ypatybės	Funkcijos
EPIDERMA	Pirminis vienalytis dengiamasis audinys; ląstelės glaudžiai išsidėsčiusios viena šalia kitos, turi dideles vakuoles, nėra chloroplastų (išskyrus kai kuriuos vandens augalus, paparčius, ūksmei pakančius žiedinius augalus). Išorinės ląstelių sienelės storesnės už vidines ir šonines	Apsauginė: formuoja kutikulę, vaškinį sluoksnį, plaukelius. Žiotelėmis epiderma reguliuoja ne tik garavimo intensyvumą, bet ir dujų apykaitą

42 lentelė. **Dengiamieji audiniai**

Dengiamųjų audinių rūšys	Sandaros ypatybės	Funkcijos
KAMŠTIS	Sudaro taisyklingai išsidėsčiusios, iš pradžių gyvos, bet pamažu atmirštančios ląstelės be tarpuląsčių. Ląstelių sienelės persisunkusios riebalinėmis medžiagomis, nepraleidžiančiomis nei vandens, nei dujų. Žiotelių vietose formuojasi lenticėlės	Apsauginė: mechaninė apsauga. Per lenticėles vyksta dujų apykaita
ŽIEVĖ	Įvairių audinių dengiamojo komplekso ląstelių, tarp jų kamščio ir parenchimos, visuma	Apsauga nuo aplinkos poveikio

43 lentelė. **Apytakos audiniai**

Dengiamųjų audinių rūšys	Sandaros ypatybės	Funkcijos
Vienkryptės (kylančios) pernašos audiniai Mediena, arba ksilema	Medienos (ksilemos) elementai – **tracheidės** ir **vandens indai.** Tracheidės – atmirę, siaurėjančios galų link ląstelės, neturinčios protoplasto. Tracheidžių sienelės sukamštėja, storėja, turi paprastas poras arba aprėptuosius langelius. Tracheidės – vieninteliai asiūklinių, papartinių, plikasėklių apytakos elementai. Vandens indai – tuščiaviduriai vamzdeliai, sudaryti iš atskirų narelių, išdėstytų vienas ant kito; tarp narelių esančios sienelės iškrinta – procesas vadinamas perforacija.	Perneša vandeninį druskų tirpalą iš šaknų lapų (transpiracinis srautas) link. Dalis tracheidžių kai kada gali atlikti sandėlinę funkciją
Daugiakrypčio transporto audiniai Karniena, arba floema	Apytakinę funkciją atlieka **rėtinės ląstelės** ir **rėtiniai indai.** Gaubtasėklių rėtiniai indai sudaryti iš atskirų narelių, išsidėsčiusių vienas virš kito, turi lydimąsias ląsteles, užtikrinančias organinių medžiagų pernašą. Senstančios ląstelės sugniuždomos jas spaudžiančių gyvųjų pilnaverčių ląstelių ir atmiršta. Plikasėkliai neturi lydimųjų ląstelių, jų funkcijas atlieka karnienos ląstelės	Asimiliacinis srautas – organinių medžiagų srautas nuo lapų į šaknis ir į vaisius. Rėtinių ląstelių gyvavimo laikas ne daugiau kaip 3–4 metai

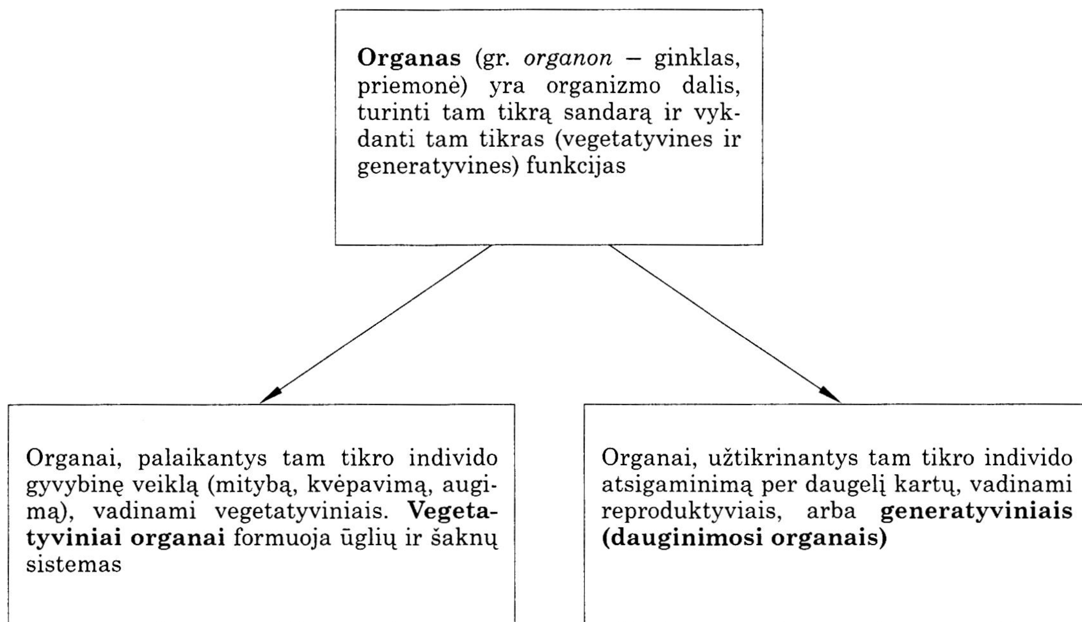
44 lentelė. **Pagrindiniai audiniai**

Audinių rūšys	Buvimo vieta augalo organizme	Sandaros ypatybės	Funkcijos
1	2	3	4
Asimiliacinė parenchima	Išvystyta lapuose ir paviršiniuose jaunų ūglių sluoksniuose, žaliuose vaisiuose; parenchimą dengia plona skaidri kutikulė	Sudaro plonasienės, turinčios gebančius judėti chloroplastus, ląstelės	Fotosintezė, dujų apykaita

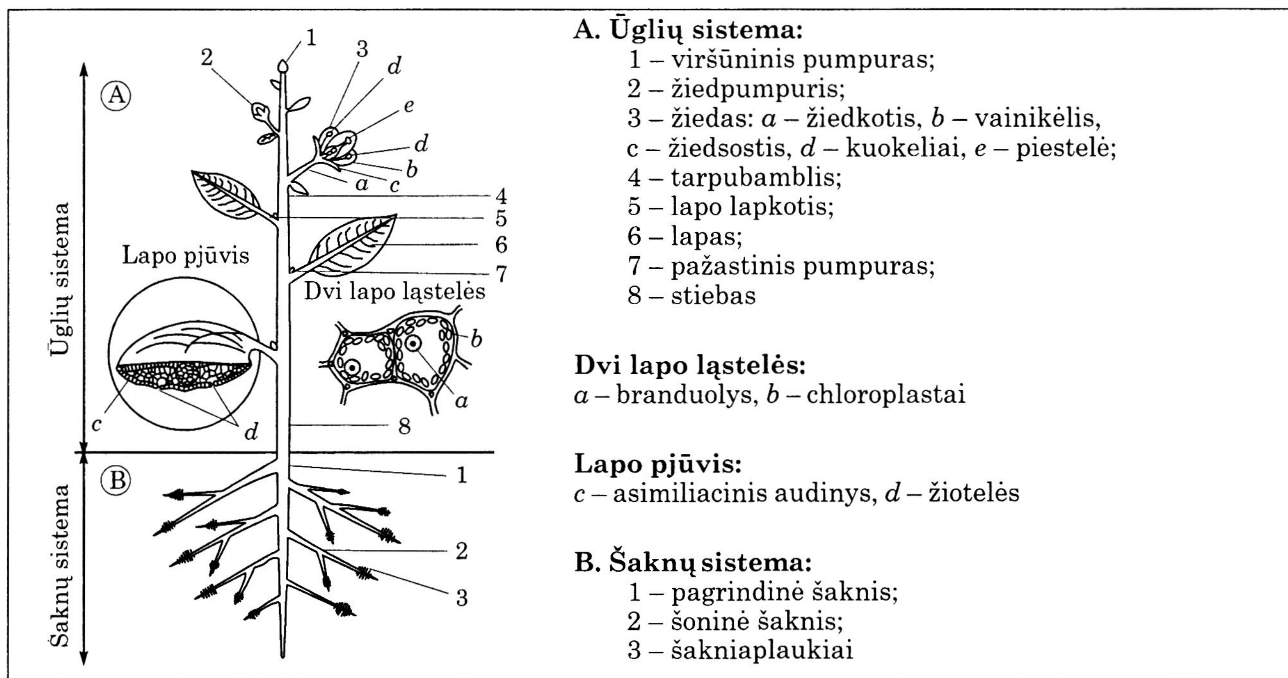
44 lentelė. **Pagrindiniai audiniai**

1	2	3	4
Sandėlinė (kaupianti) parenchima	Vienamečių augalų endosperme arba sėklų gemale; Daugiamečių augalų gumbuose, svogūnuose, stiebų šerdyje	Gyvos plonasienės ląstelės. Kai kurių ląstelių sienelės sustorėjusios	Sandėliniuose audiniuose kaupiasi medžiagų apykaitos produktai
Vandenį kaupiančioji parenchima	Kaktusų, agavų, alavijų, druskožemių augalų stiebuose ir lapuose; varpinių augalų lapuose	Stambios plonasienės ląstelės, vakuolėse yra gleivingų medžiagų, sulaikančių drėgmę	Kaupia drėgmę
Orinė parenchima	Vandens ir pelkių augalų įvairiuose organuose, aptinkama ir sausumos augaluose	Gerai išvystyti tarpuląsčiai, kuriuose kaupiasi oro atsargos	Ląstelių aprūpinimas deguonimi arba anglies dvideginiu

26 schema. **Augalinio organizmo pagrindiniai organai**



Aukštesniojo žiedinio augalo organų sistema



45 lentelė. **Šaknis**

Funkcijos	Sandaros ypatybės		Šaknų įvairovės vystymasis
	Išorinės	Vidinės	
• Augalo įtvirtinimas dirvožemyje • Aktyvus dirvožemyje esančio vandens ir mineralinių medžiagų siurbimas • Kai kurių organinių medžiagų sintezė, mitybinių medžiagų kaupimas • Dalyvavimas vegetatyviniame dauginimesi	Šaknų visuma formuoja dviejų tipų šaknų sistemą: liemeninę (yra pagrindinė šaknis) ir kuokštinę, sudarytą iš pridėtinių šaknų. **Šaknies zonos:** bazinė dalis, laidžioji zona, siurbiamoji zona (su šakniaplaukiais), tįstamojo augimo zona, šaknies šalmelis	Skersiniame siurbiamosios zonos pjūvyje yra ląstelių su šakniaplaukiais, po juo – žievės ląstelių sluoksnis. Centrinėje šaknies dalyje išsidėsčiusios rėtinės ląstelės ir vandens indai	Tipiška šaknis → Šakniavaisiai; Šakniagumbiai; Orinės šaknys; Atraminės šaknys

46 lentelė. **Stiebas**

Funkcijos	Sandaros ypatybės		Stiebų įvairovė
	Išorinės	Vidinės	
Stiebas – ūglio ašis • Sieja antžeminę ir požeminę augalo dalis • Vykdo apytakos funkciją • Iškelia į šviesą lapus • Atlieka atraminę funkciją • Užtikrina vegetatyvinį dauginimąsi • Yra atsarginių medžiagų kaupimo vieta	Stiebai pagal padėtį erdvėje: Tiesūs, Šliaužiantys, Laipiojantys, Kylantys Stiebo forma: Juostiška, Briaunota, Plokščia, Rutuliška, Apvali, Sparnuota, Tribriaunė ir keturbriaunė, Cilindriška **Stiebo šakojimosi tipai** Dichotominis (pataisų, samanų, alyvinių) Monopodinis (eglės, kėnio) Simpodinis (žiedinių)	Žolinių augalų stiebas turi dengiamąjį audinį (epidermį), supantį pirminę žievę, ir centrinį veleną, kuriame išsidėstę atviri (turintys kambį) apytakiniai kūleliai. Sumedėjusių augalų stiebas susideda iš žievės, medienos, šerdies. Žievę sudaro kamštis, nepilnai išlaikęs fotosintetinantį pagrindinį audinį, karnienos plaušai ir floema (rėtinės ląstelės). Mediena sudaryta iš medienos plaušų (mechaninio audinio). Šerdį sudaro sandėlinis ir pagrindinis audiniai. Kambio (brazdo) sluoksnis, kurio dėka stiebas storėja, yra tarp žievės ir medienos	• Mėsingas kaktuso ūglis • Vynuogės laipiojantys ūsai • Pelžiedės filokladijos

47 lentelė. **Lapas**

Funkcijos	Sandaros ypatybės		Lapų įvairovė
	Išorinės	Vidinės	
• Maitinimo (vykdo fotosintezę) • Dujų apykaitos • Apsauginė • Transpiracinė (užtikrina garavimą) • Dauginimosi funkcija: iš lapo vystosi naujas augalas • Kaupia atsargines medžiagas	Kotuoti lapai turi lapkočius ir lapalakščius; bekočiai turi tik lapalakščius Lapalakščio forma Strėliška Ovali Linijiška Ietiška Širdiška Lapalakščio kraštai Dantyti Pjūkliški Išpjaustyti Lygūs Kauburiuoti Lapai Paprasti (su vienu lapalakščiu) Sudėtiniai (su keliais lapalakščiais) Trilapiai Plunksniški poriniai Pirštuoti Plunksniški neporiniai Lapų gyslotumas Tinkliškas Lankiškas Lygiagretus	Lapo paviršių dengia epidermis su žiotelėmis, pagrindinis asimiliacinis audinys, esantis tarp viršutinio ir apatinio epidermio, turi chloroplastus su chlorofilu. Kai kada žiotelės išsidėsto abiejose lapo pusėse; dažniausiai žiotelės būna lapo apačioje, o viršuje – kai kurių vandens augalų. Pagrindiniame audinyje išsidėsčiusios gyslos, sudarytos iš apytakinių kūlelių, kurie susideda iš ksilemos, floemos ir ramstinių audinių	• Dygliai • Ūseliai • Gaudomieji įtaisai • Žvyneliai • Pumpurai • Svogūnėliai • Žiedo dalys

AUKŠTESNIŲJŲ AUGALŲ SISTEMATINĖS GRUPĖS

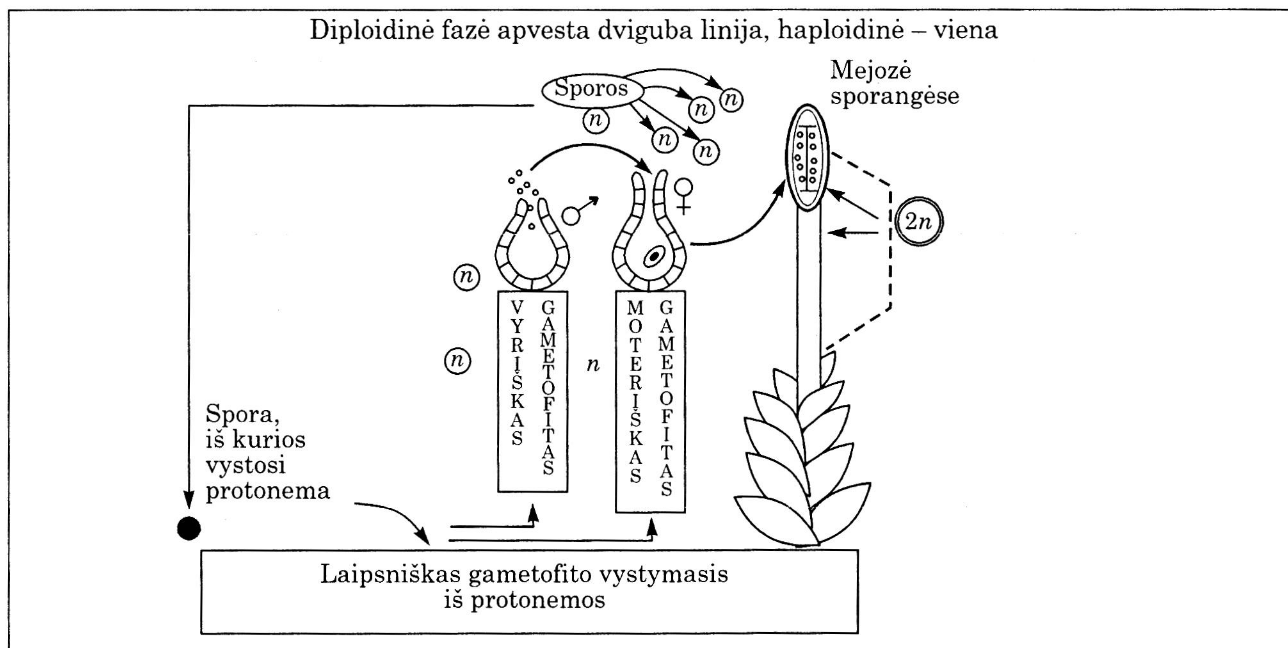
48 lentelė. Samanų skyrius

SAMANOS – labiausiai prisitaikiusi augalų grupė, vienintelė augalų pasaulio istorijoje evoliucinė linija, susijusi su regresiniu sporofito vystymusi; aklai užsibaigianti augalų vystymosi šaka. Būdingas visų samanų bruožas – tikrų šaknų nebuvimas. Samanos dirvoje tvirtinasi ataugomis – rizoidais; kūnas lapiško gniužulo pavidalo arba panašus į ūglį – yra stiebas ir lapai. Visur paplitusios, išskyrus jūras ir druskožemius, auga drėgnose vietose

Atskirų klasių charakteristika

Klasės, jų atstovai	Ypatybės	
	Sandaros	Dauginimosi
Kerpsamanės Maršantė (*Marchantia polymorpha*)	Klasės atstovai turi skirtingus gametofitus ir vienodus sporofitus. Maršantės vyriškieji gametofitai – lapiški padėklai, ant kurių vystosi anteridžiai. Moteriški gametofitai – žvaigždiški padėklai, tarp kurių spindulių išsidėsčiusios archegonės. Sandara palyginti paprasta, yra asimiliaciniai, ramstiniai ir apytakos audiniai	Lytinio dauginimosi organai daugialąsčiai, dengiami išorinio ląstelių sluoksnio. Anteridžiuose formuojasi judrūs su dviem žiuželiais spermatozoidai. Kiaušialąstė yra archegonės išplatėjusioje dalyje
Lapsamanės Paprastasis gegužlinis (*Polytrichum commune*) Kiminai (*Sphagnum*)	Gametofitas dažniausiai spindulinės, rečiau – dvišalės simetrijos su daugialąsčiais rizoidais. Viena iš aukščiausių samanų, stiebas gali išaugti iki 50 cm, jį visą dengia tankūs lapeliai Labai drėgnų vietų augalas, stiebas be rizoidų, lapai iš dviejų tipų ląstelių	Po apvaisinimo iš zigotos vystosi sporangė, panaši į dėžutę ant kojelės. Iš sporų vystosi protonema, iš jos – gametofitas

27 schema. **Lapsamanių kartų ir branduolio fazių kaita**



49 lentelė. **Samanų reikšmė**

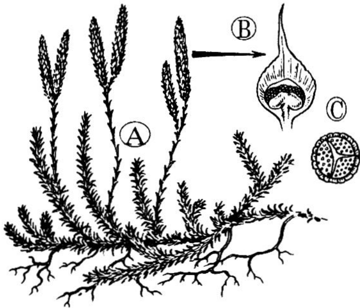
Gamtoje	Žmogaus gyvenime
• Žaliųjų samanų reikšmė labai didelė. Lapinėse kūno dalyse jos sukaupia daug vandens ir, augdamos tankiu kilimu, sukelia užpelkėjimą. Atmirštančios augalų dalys formuoja durpes • Kaupdamos ir sulaikydamos vandenį reguliuoja ekosistemų vandens balansą • Gali sukelti užpelkėjimą, bet kartu saugo nuo erozijos	• Naudojamos medicinoje dėl jų antibiotinių (antimikrobinių) savybių • Iš jų susidariusios durpės naudojamos kurui, trąšoms, pakratams • Naudojamos statyboje kaip šilumą sulaikanti ir izoliacinė medžiaga

28 schema. **Pataisūnų skyrius**

Šiuolaikiniai pataisūnai – daugiamečiai, žoliniai, dažniausiai amžinai žaliuojantieji augalai su paprastais lapais, lapų išsidėstymas priešinis, spiralinis, menturiškas. Požeminiai organai – šakniastiebis, ant kurio formuojasi pridėtinės šaknys. Sporofilai išsidėstę ant viso stiebo pramaišiui su asimiliaciniais lapais sudaro strobilus – sporines zonas arba sporines varputes stiebo gale

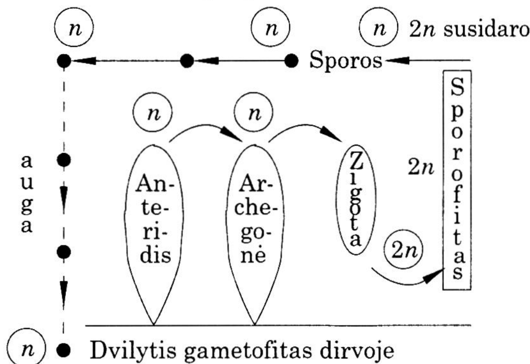
28 schema. **Patais큰n킬 skyrius**

Pataiso 큄arkakojo i큄orin휊s sandaros ypatyb휊s
(*Lycopodium clavatum*)



A – sporofitas;
B – sporofilas su sporange;
C – spora

Pataiso vystymosi schema



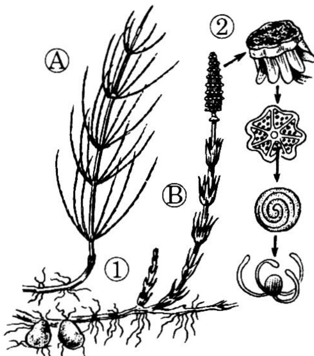
PaTaisų gyvenamoji aplinka, reikšmė gamtoje ir žmonių gyvenime

Pataisai – spygliuočių ir mišriųjų miškų augalai; auga ant žemės arba ant medžių kamienų ir šakų; ūgliai – statūs, gulintys, kabantys, priglude. Stačiųjų ūglių ilgis iki 1,5 m, prigludusių – iki 10 m. Pataisai pasižymi lėtu augimu, kai kurių rūšių gametofito vystymasis trunka 6–15 metų. Daugelio rūšių sporos naudojamos farmacijoje. Kai kurie pataisai yra nuodingi, jų nuodų veikimas panašus į kurarės. Atsižvelgiant į lėtą pataisų augimą bei jų naikinimą, šiems augalams reikia apsaugos

29 schema. **Asiūklūnų skyrius**

Šiuolaikiniame augalų pasaulyje iš asiūklūnų išliko vienintelė asiūklių gentis; joje yra apie 20 rūšių; tai žolinis augalas nariuotais ūgliais. Iš iškastinių asiūklūnų kartu su senoviniais pataisūnais karbono periode susidarė miškai. Asiūkliai auga įvairiose augalų bendrijose, bet būtinai – netoli vandens ar drėgnose vietose

Dirvinio asiūklio sandaros ypatybės ir gyvenimo ciklas
(*Equisetum arvense*)

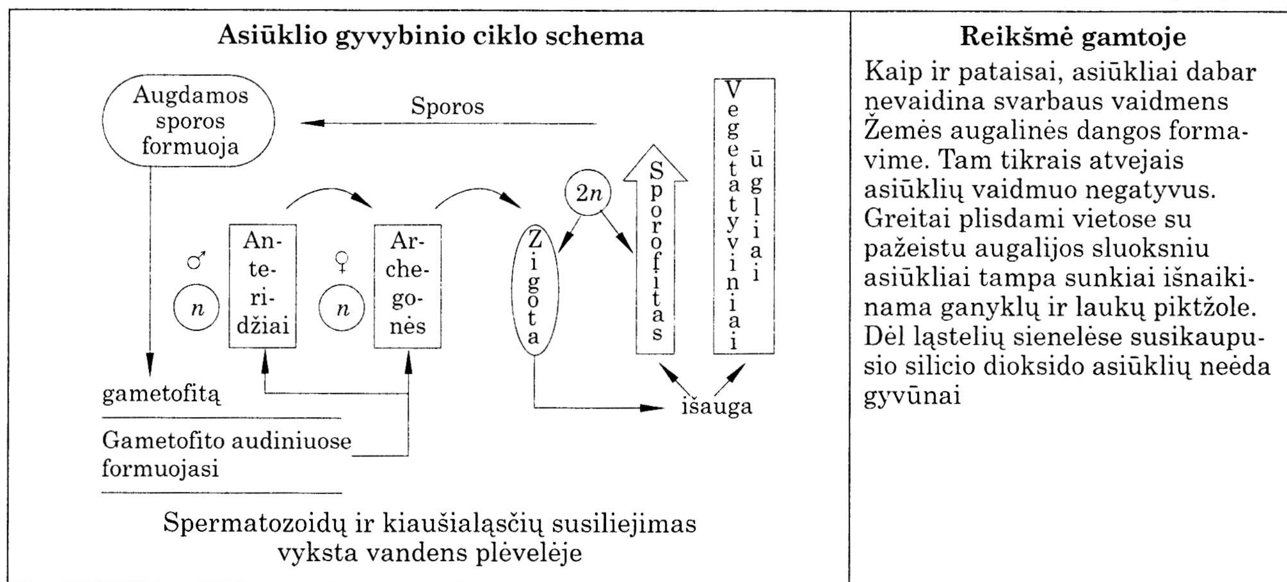


A – vegetatyvinis ūglis;
B – sporifikuojantis ūglis;
1 – šakniastiebis su gumbeliais;
2 – sporinė varputė – strobilas

Bendra charakteristika

Dirvinis asiūklis – daugiametis augalas. Ankstyvą pavasarį pasirodo blyškiai rožiniai sporifikuojantys ūgliai, kurių viršūnėse esančios sporangės pilnos žalsvų sporų. Išsisėjus sporoms šie ūgliai atmiršta ir išauga žali asimiliuojantys vegetatyviniai ūgliai

29 schema. **Asiūklūnų skyrius**



30 schema. Papartūnų, arba paparčių, skyrius

Skirtingai negu kiti aukštesnieji sporiniai augalai, evoliucijos proceso eigoje paparčiai įgijo įvairių bruožų, padedančių prisitaikyti prie kintančios aplinkos. Šiuo metu jie yra plačiai paplitę dykumose, pelkėse, ežeruose, pusiau gėluose vandenyse ir ypač miškuose. Tai daugiamečiai žoliniai augalai; tropiniai sumedėję paparčiai siekia 25 m aukščio, liemuo užauga iki 50 cm skersmens

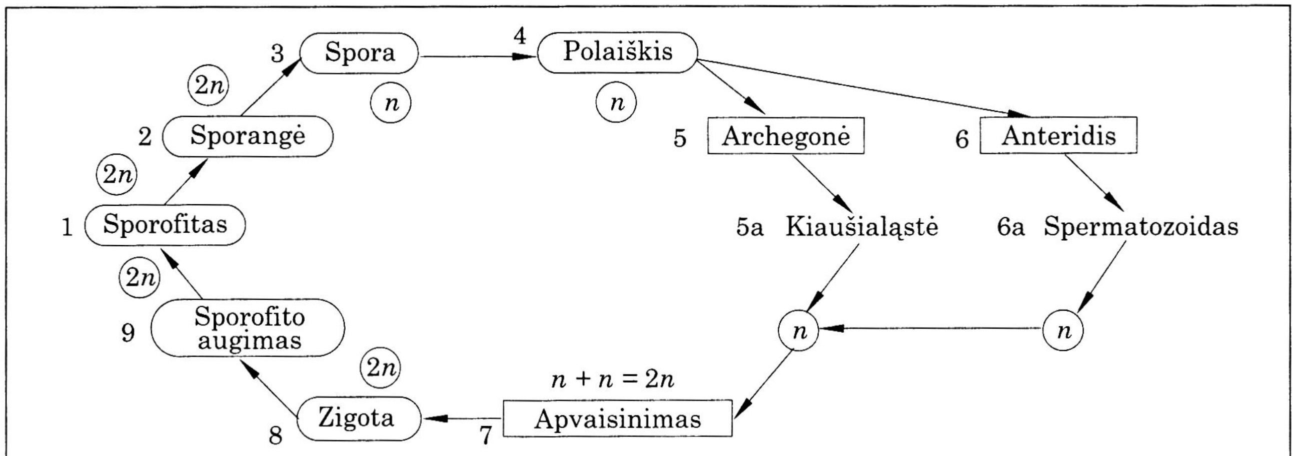
Papartainių klasės charakteristika

Poklasiai	Kai kurių poklasių atstovų gyvenamosios vietos, sandaros, gyvybinio ciklo ypatybės
1	2
Salvinijiečiai a I II *Plūduriuojančioji plūstis* I – vaizas iš šono, II – vaizdas iš viršaus; *a* – sporangė	Vandeniniai heterosporiniai paparčiai. Heterosporiškumo privalumas – gametofitas vystosi sporoje ir minta jos maisto medžiagomis **Plūduriuojančioji plūstis** *(Salvinia natans)* – nedidelis (iki 15 cm) plaukiojantis vienametis augalas, augantis vandens telkiniuose

30 schema. **Papartūnų, arba paparčių, skyrius**

1	2
Šertviečiai	**Azolė** *(Azolla)* – mažas, gležnas vandeninis heterosporinis papartis, kuriam būdinga simbiozė su azotą fiksuojančiomis melsvabakterėmis. Azolė gebėjimu kaupti azotą nenusileidžia ankštiniams augalams **Kelminis papartis** *(Dryopteris filix-mas)* – vienas iš gražiausių ir žinomiausių miškinių paparčių. Daugiametis augalas. Iš storo šakniastiebio išauga didelių, iki 1 m ilgio, lapų kuokštas. Apatinėje lapų pusėje formuojasi maišelio formos sporangės. Iš sporų išauga maža, iki 1 cm dydžio, žalia plokštelė – dvilytis gametofitas (polaiškis). Apatinėje jo dalyje formuojasi anteridžiai ir archegonės, apvaisinimas vyksta lietingu oru arba esant gausiai rasai

31 schema. **Paparčio kartų kaita gyvybinio ciklo metu**



Papartūnų gyvybinio ciklo metu stebima kartų – gametofito ir sporofito – kaita. Sporofitas ilgalaikis, gametofitas egzistuoja trumpai.
Paparčių evoliucija lėmė heterosporiškumo atsiradimą ir vystymąsi. Atsirado *mikrosporangės*, kurių smulkios sporos išauga į vyrišką gametofitą, ir *megasporangės*, kuriose išsivysčiusios sporos išauga į moterišką gametofitą

50 lentelė. **Paparčių reikšmė**

Gamtoje	Žmogaus gyvenime
• Tolimoje praeityje sumedėję paparčiai kartu su kitais sporiniais formavo didelius plotus užimančius drėgnus miškus, kurie vėliau sudarė akmens anglių sluoksnį	• Kelminis papartis yra svarbus medicinoje, jo šakniastiebyje yra medžiagų, pasižyminčių antihelmintinėmis savybėmis

50 lentelė. **Paparčių reikšmė**

Gamtoje	Žmogaus gyvenime
• Gamtoje užima svarbią vietą; tropinio klimato šalyse auga daugiausia įvairiausių paparčių, kurie skiriasi gyvenimo būdu ir forma. Tai sausumos, uoliniai, vandeniniai, epifitiniai, lianos, sumedėję paparčiai; daugelis rūšių – svarbūs daugelio miško biogeocenozių komponentai, kartais paparčiai dominuoja žolės ir krūmokšnių arde	• Daugelyje šalių kai kurių paparčių jauni lapai ir šerdis naudojama maistui • Daugelis paparčių labai dekoratyvūs, auginami šiltnamiuose ir atvirame grunte • *Azolla* genties vandeniniai paparčiai tropinėje Azijoje naudojami kaip ryžių laukų azotinės trąšos

51 lentelė. **Sėkliniai augalai**

Šie augalai turi kokybiškai naują darinį – sėklą. Sėklomis augalai plinta, jos užtikrina rūšies išlikimą įvairiomis ekologinėmis sąlygomis. Dauginantis sėkla yra pranašesnė už sporą, nes turi atsarginių mitybinių medžiagų. Suaugęs augalas (sporofitas) vyrauja vystymosi cikle. Gametofitas labai redukuotas, jo gyvavimas visiškai priklauso nuo sporofito. Lytinis procesas nesisiję̨s su vandens aplinka; gametofitai vystosi sporofite

Sėklinių augalų skyriai

Ypatybės	Skyriai	
	Plikasėkliai	Gaubtasėkliai, arba žiediniai
Vegetatyvinių organų	Gerai išsivystę, atsiranda šaknų sistema su pagrindine šaknimi	Labai didelė audinių ir vegetatyvinių organų įvairovė
Generatyvinių (dauginimosi) organų: Vyriškojo	Sporifikuojantis ūglis, sutrumpėjusi ašis su sporiniais žvyneliais, sudarančiais kankorėžį, jo išaugose vystosi dulkinės, produkuojančios po keletą ląstelių – žiedadulkių	Žiedadulkė (mikrospora) susideda iš dviejų haploidinių ląstelių: generatyvinės ir vegetatyvinės. Generatyvinės ląstelės branduolys dalijasi mitozės būdu, sudarydamas du spermius
Moteriškojo	Moteriškas gametofitas formuojasi ant sporinių žvynelių, susidaro sėklapradis. Po kiaušialąstės apvaisinimo iš sėklapradžio vystosi sėkla	Moteriškame gametofite susidaro 8 gemalinio maišelio ląstelės, iš kurių viena, virtusi kiaušialąste ir susiliejusi su vienu spermiu, duoda pradžią gemalui, o kitų dviejų branduoliai, vadinami centriniais, susilieja su antru spermiu ir virsta endospermu

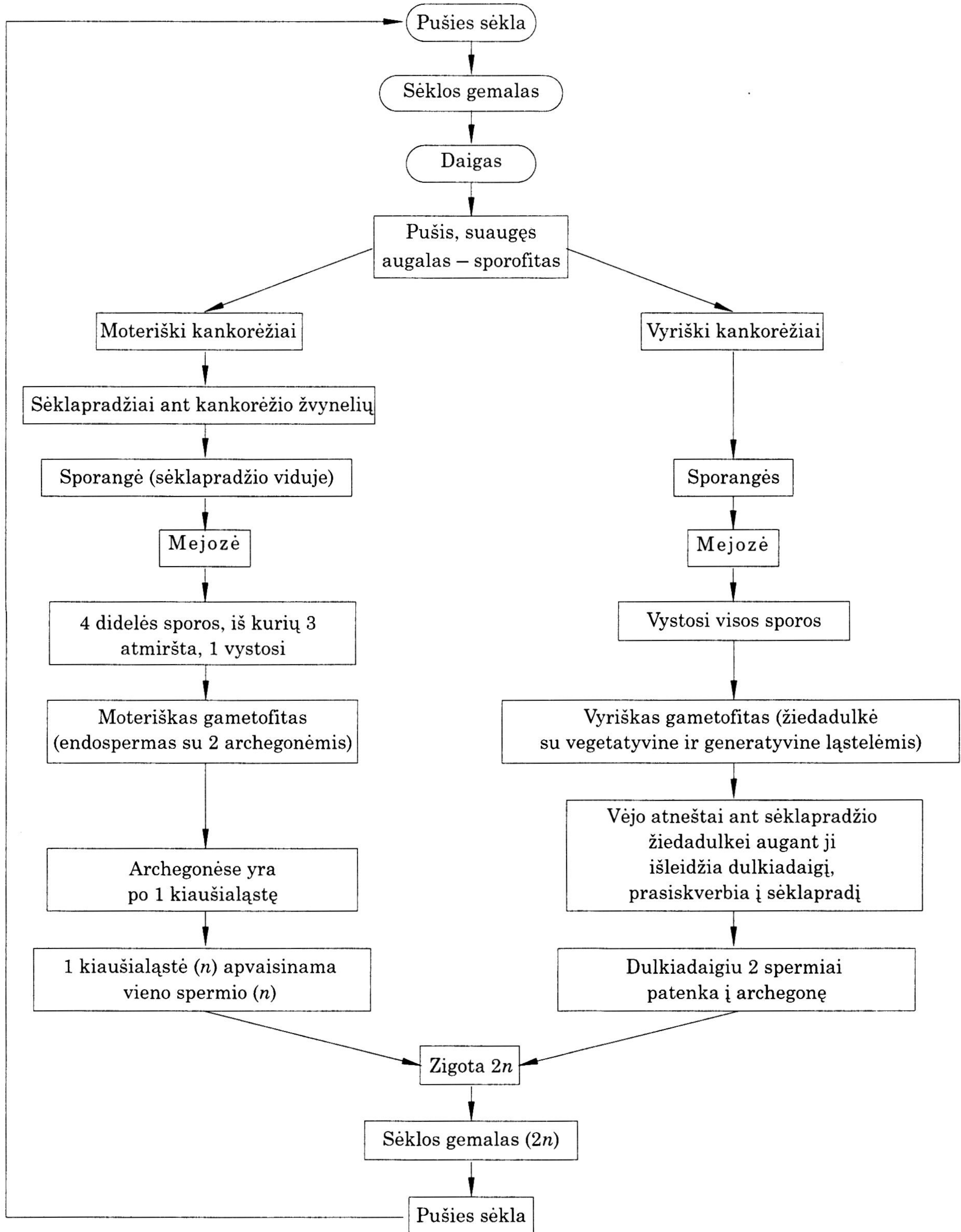
52 lentelė. **Plikasėklių skyrius**

Šiam skyriui priklauso apie 700 medžių ir krūmų rūšių; jos dauginasi sėklomis. Žolinės plikasėklių augalų formos nežinomos. Išsivystė paleozojuje iš vėliau išnykusių heterosporinių paparčių. Šiuolaikinės rūšys paplitusios po visą planetą. Vyriškasis gametofitas sudarytas iš kelių ląstelių, kurios virsta žiedadulkėmis, išauga iš mikrosporų. Žiedadulkes vėjas perneša ant sėklapradžio; formuojasi dulkiadaigis, kuriuo spermis patenka į kiaušialąstę; apvaisinimui nereikalinga vandens terpė. Plikasėklių skyrius apima šešias klases, dvi iš jų – visiškai išnykusios

Dabartinės plikasėklių klasės

Klasės, gyvenamoji aplinka	Ypatybės	
	Sandaros	Vystymosi
Cikainiai Tropikuose ir subtropikuose	Visžaliai medžiai, rečiau žemaūgiai augalai, panašūs į palmes; išvystyta liemeninė šaknis	Dvinamis augalas, sporofilai sudaro vienalyčius strobilus
Gnetainiai Sausose ir dykumų srityse	Šakoti visžaliai belapiai krūmai arba krūmai su priešiniu lapelių išsidėstymu	Po apvaisinimo išsivysto sėkla su mėsingu apyvaisiu
Ginkainiai Iki dabar išliko vienintelė šeima ir rūšis – dviskiautis ginkmedis	Aukštas lapus metantis medis. Lapai pasižymi vėduokliška skiautėtu lapalakščiu su plonu lapkočiu. Ginkmedis auginamas kaip dekoratyvinis medis	Dvinamis augalas. Apvaisinimas vyksta dėka judrių spermatozoidų
Pušainiai Pušiečių poklasio atstovai sudaro Šiaurės Amerikos ir Šiaurės Europos miškus. Daugiausia pušies *(Pinus)*, eglės *(Picea)*, kėnio *(Abies)*, maumedžio *(Larix)* rūšių auga apie Ramųjį vandenyną, ypač Kinijoje	Pušainiai – daugiausia medžiai, kurių medienoje yra tracheidės ir sakotakiai. Daugumos pušainių lapai kieti, adatiški (spygliai) ir nepalankiu metų laikotarpiu nenukrenta. Spyglius dengia stora kutikulė, žiotelės nugrimzdusios į lapo audinius. Pušainiai pagrindinio audinio visai neturi arba jo yra labai mažai. Pušainių lapuose gaminami fitoncidai, pasižymintys baktericidinėmis savybėmis	Ant pušainių stiebų auga vyriški ir moteriški kankorėžiai; kankorėžius sudaro ašis su prisitvirtinusiais žvyneliais. Ant sėklinių žvynelių yra po du sėklapradžius, iš kiekvieno formuojasi gametofitas su viena kiaušialąste. Daugumos pušainių žiedadulkės turi du lengvus orinius maišelius

32 schema. **Pušies vystymosi ciklas**



53 lentelė. **Plikasėklių reikšmė**

Gamtoje	Žmogaus gyvenime
Deguonies, organinių medžiagų gamintojai. Valo orą. Yra vertingų paukščių ir žvėrių gyvenamoji aplinka. Gyvūnų maistas. Svarbi vandens apsaugos funkcija. Biogeocenozėse yra producentai	Mediena naudojama kurui. Statybinė medžiaga. Naudojami vagonų gamyboje, laivų statyboje, aviacijoje, muzikinių instrumentų, baldų gamyboje. Pušų pumpurai, kadagio uogos, kėnių aliejus, spygliai, sakai, eteriniai aliejai naudojami medicinoje. Sėklos naudojamos žmonių maistui
Vartojami kaip naudingi ir dekoratyviniai augalai	

54 lentelė. **Gaubtasėklių, arba žiedinių, skyrius**

Žiediniai pasižymi progresyviais visų organų pokyčiais, iš kurių svarbiausias – žiedas. Žiedus gali apdulkinti vabzdžiai ir vėjas – tai svarbus biologinės evoliucijos etapas. Gaubtasėkliai auga visose klimatinėse zonose, įvairiausiomis ekologinėmis sąlygomis	
Žiedas – gaubtasėklių augalų dauginimosi organas	
Žiedai, pasižymintys bendrais sandaros bruožais, kartu yra labai įvairios struktūros, spalvos ir dydžio. Plūdeninių žiedas yra apie 1 mm, arnoldijos žiedas – iki 1 m skersmens 5 – potauris; 6 – žiedsostis; 7 – žiedkotis	**Žiedo dalys, ypatybės ir įvairovė** **Piestelynas** – visuma vaislapėlių, sudarančių vieną (paprastas) arba kelias (sudėtines) piesteles. 1 – piestelė: mz. – mezginė; lm. – liemenėlis; skp. – sėklapradis **Kuokelynas** – kuokelių visuma. Vyriški žiedai turi tik kuokelius, moteriški kuokelių neturi. 2 – kuokelis: kt. – kotelis; jg.– junginė; dl. – dulkinė **Vainikėlis** (3) – vidinė dvigubo apyžiedžio dalis, sudaryta iš suaugusių arba laisvų vainiklapių **Taurelė** (4) – taurėlapių visuma **Apyžiedis** – sterili žiedo dalis, sauganti kuokelius ir piesteles. Paprastas apyžiedis nesuskirstytas į vainikėlį ir taurelę. Dvigubą apyžiedį sudaro taurelė ir vainikėlis, besiskiriantys spalva ir dydžiu

55 lentelė. Žiedo formulė

ŽIEDO FORMULĖ – sąlyginis jo struktūros žymėjimas raidėmis (lietuviškomis arba lotyniškomis), simboliais ir skaičiais, reiškiančiais žiedo dalių skaičių

Simboliai: ⊛ – žiedo taisyklingumas, simetriškumas, aktinomorfiškumas

(↑) – žiedo netaisyklingumas, zigomorfiškumas

⚥ – dvilytis žiedas su kuokeliais ir piestele

♂ – vyriškas žiedas, nėra piestelės

♀ – moteriškas žiedas, nėra kuokelių

((3)) – žiedo dalių suaugimas

◎ – žiedo dalių išsidėstymas dviem ratais

(∞) – didelis arba neapibrėžtas žiedo dalių skaičius

($\overline{2}$) – brūkšnys virš skaičiaus reiškia apatinę mezginę

($\underline{2}$) – po skaičiumi – viršutinę mezginę

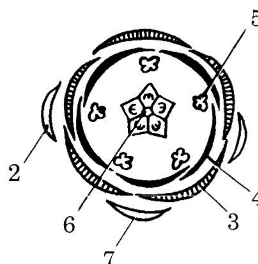
Kai kurių žiedų formulių pavyzdžiai:
Barborytės žiedas: $T_4V_4K_{4+2}P_1$ (keturi taurėlapiai, keturi vainiklapiai, šeši kuokeliai: du trumpi, keturi ilgi, piestelė viena);
Bulvės žiedas: $T_{(5)}V_{(5)}K_5P_1$ (penki suaugę taurėlapiai, penki suaugę vainiklapiai, penki kuokeliai, viena piestelė)

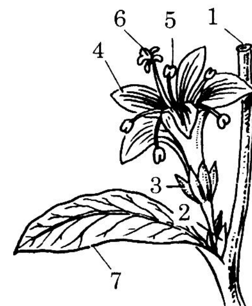
33 schema. Žiedo diagrama

Žiedo diagrama – sąlyginė žiedo dalių grafinė projekcija plokštumoje; vaizduoja žiedo dalių skaičių, sąlyginį dydį, tarpusavio padėtį, sąaugas

1 – žiedyno ašis; 2 – pažiedės;
3 – taurėlapiai;
4 – vainiklapiai; 5 – kuokeliai;
6 – piestelė; 7 – dengiamasis lapas

Žiedo diagramos sudarymas





56 lentelė. Žiedynas

ŽIEDYNAS – keleto žiedų, išsidėsčiusių ant vieno žiedynkočio, grupė. Žiedynai vilioja vabzdžius, geriau apdulkinami vėjo. Gali būti, kad evoliucijos proceso metu pavieniai žiedai išsivystė iš žiedynų jų paprastėjimo keliu

56 lentelė. **Žiedynas**

Žiedynų tipai, pavyzdžiai	Sandaros ypatybės
Paprasti: kekė, skydelis, varpa, skėtis, galvutė, graižas, burbuolė	Šoninės ašys nesišakoja, jos yra kaip žiedkočiai, kurių gale išsidėstę žiedai
Kekė visų kryžmažiedžių, pakalnutės	Visi žiedai ant žiedkočių, išilgai ašies išsidėstę beveik tolygiai
Skydelis – kriaušės	Kekė, kurios apatiniai žiedkočiai ilgesni už viršutinius
Varpa – gysločio, blandies	Kilusi iš kekės, žiedai be žiedkočių; pakitusi varpos forma – žirginys
Skėtis – primulės, ženšenio	Kilęs iš kekės, žiedkočiai išsidėstę sutrumpėjusios žiedyno ašies viršūnėje
Galvutė – dobilo	Žiedynas su sutrumpėjusia, smeigtuko formos paplatėjusia ašimi, žiedkočių nėra arba jie labai sutrumpėję
Graižas – graižažiedžių	Žiedyną sudaro kompaktiškai susiglaudę žiedai ant labai plačios žiedyno ašies
Burbuolė – kukurūzo	Kilusi iš varpos, labai sustorėjusi ašis
Sudėtiniai: šluotelė, sudėtinis skydelis, sudėtinė varpa	Šoninės ašys šakojasi, jas sudaro žiedkočiai su žiedais
Skydinė šluotelė – šermukšnio, piramidinė – alyvos, lanksvos	Daugiau ar mažiau šakotas žiedynas, šakotumas silpnėja nuo pagrindo link viršaus
Sudėtinis skydelis – kraujažolės	Kilęs iš šluotelės, sutrumpėję pagrindinės ašies tarpubambliai
Sudėtinė varpa – varpinių, viksvų	Paprastos varpos išsidėsto ant vienos pagrindinės ašies

57 lentelė. **Vaisiai**

VAISIUS – gaubtasėklių (žiedinių) dauginimosi organas su sėkla ar sėklomis, išsivystantis iš vieno žiedo. Vaisius – žiedinių dauginimosi organų galutinis vystymosi etapas

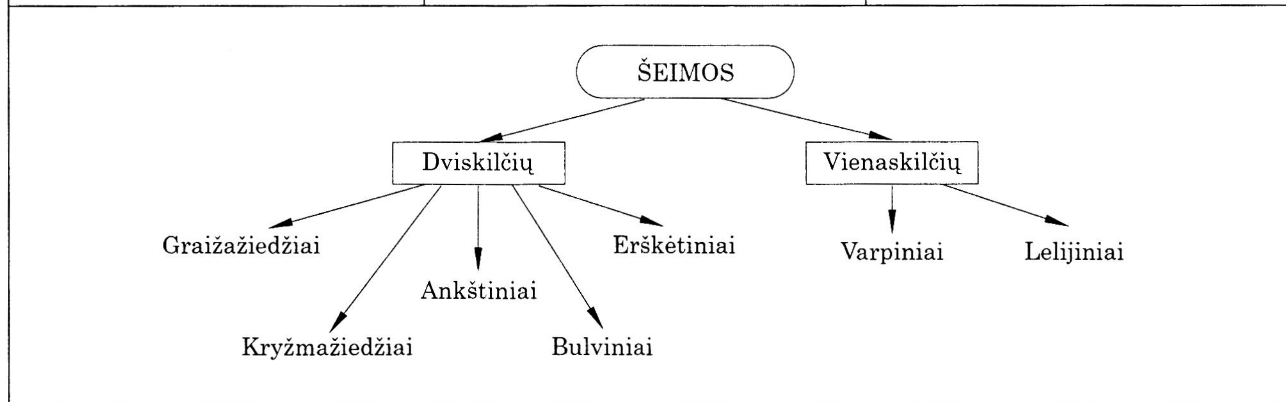
Vaisių tipai, pavyzdžiai	Sandaros ypatybės
1	2
Vaisiai su sausu apyvaisiu	
I. Dėželiniai	Vaisiai daugiasėkliai, paprastai suskylantys, sėklos laisvai išsibarsto
Ankštis Visų ankštinių	Vienalizdis vaisius, suformuotas vieno vaislapėlio, atsiveria apatinėje ir viršutinėje siūlėse, gali skilti skersai
Ankštara ir ankštarėlė Kryžmažiedžių	Dvilizdis vaisius, suformuotas dviejų vaislapėlių, gali būti nariuotas, skylantis
Dėžutė Aguonos, drignės, durnaropės, gvazdiko	Suformuoja du ar keli vaislapėliai; atsidarymo būdai: skylutėmis – aguonos; stogeliu – drignės; danteliais – gvazdiko; sąvaromis – durnaropės
II. Riešutiški	Vaisiai vienasėkliai, subrendę neskyla, sėklos neišsibarsto
Riešutas, riešutėlis Lazdyno	Apyvaisis kietas, sumedėjęs
Lukštavaisis Graižažiedžių	Apyvaisis odiškas, sėkla su apyvaisiu nesuauga
Skeltavaisis Klevo	Apyvaisis turi odišką ar plėvišką sparno formos išaugą
Grūdas Varpinių	Apyvaisis odiškas, suaugęs su sėklos odele
Vaisiai su sultingu apyvaisiu	
III. Uogiški	Vaisiai su sultingu apyvaisiu, be kauliuko, dažniausiai – daugiasėkliai
Uoga Serbento, mėlynės	Visas apyvaisis sultingas, mėsingas
Agurkvaisis Arbūzo, moliūgo	Sėklos – sultingame vaisiaus minkštime, išorinis apyvaisio sluoksnis sumedėjęs
Obuolys Obels, kriaušės	Sėklos yra sausose kamerose, vaisiaus minkštimas suformuotas iš suaugusių mezginės ir žiedsosčio

57 lentelė. **Vaisiai**

1	2
IV. Kaulavaisiniai	Vaisiai iš išorės padengti odele, po ja – sultingas minkštimas, sumedėjęs vidinis sluoksnis formuoja kauliuką; sėkla guli laisvai; kai kada vaisius – sausas kauliukas
Kaulavaisis Vyšnios, slyvos 	Vaisius su viena sėkla

58 lentelė. Vienaskilčių ir dviskilčių anatominiai ir morfologiniai skirtumai

Klasė dviskilčiai	Požymiai	Klasė vienaskilčiai
(5 arba 4)	Augalų organai **Piestelynas** (piestelė)	(3)
(dažniausiai 2×5 arba 4)	**Kuokelynas** (kuokeliai)	(2×3)
(5 arba 4)	Apyžiedis	(2×3)
	Stiebo sandara	
	Lapas	
Sėklaskiltės 2		Sėklaskiltė 1
	Šaknies sandara	



59 lentelė. **Šeimų charakteristika**

	Šeima, rūšių skaičius	Gyvenimo formos	Žiedynas	Žiedas, formulė	Vaisius	Atstovai	Reikšmė
	1	2	3	4	5	6	7
KLASĖ	Bulviniai 2900 rūšių	Vienametės, daugiametės žolės, pasižymi specifiniu kvapu	Netvarkinga kekė, kai kada – pavieniai žiedai	Pavieniai arba žiedynuose: 5 taurėlapiai, 5 vainiklapiai, (5 kuokeliai, 1 piestelė (iš dviejų vaislapėlių) * ⚥ $T_{(5)}V_{(5)}K_5P_{(2)}$	Uoga, dėžutė.	Bulvės, pomidorai, baklažanai, pipiras, karklavijas, tabakas, petunija, drignė, durnaropė	Maistiniai, pašariniai, vaistingieji, dekoratyviniai, nuodingieji, narkotiniai
	Erškėtiniai Virš 3000 rūšių	Daugiametės žolės, krūmai, medžiai	Skėtis	Pavieniai arba žiedynuose; taisyklingi 4–5 vainiklapiai, 5 taurėlapiai, daug kuokelių, 1 piestelė (arba daug) * ⚥ $T_{(5)}V_5K_\infty P_\infty$	Uoga, kaulavaisis, obuolys, sudėtinis kaulavaisis	Obelis, vyšnia, kriaušė, abrikosas, svarainis, žemuogė, persikas, slyva, avietė, šermukšnis, gudobelė, rožės, gervuogė	Maistiniai, vaismedžiai, vaiskrūmiai; vaistiniai, dekoratyviniai, eterinių aliejų šaltinis
DVISKILČIAI	Ankštiniai Apie 18 000 rūšių	Vienametės ir daugiametės žolės, krūmai, medžiai, lianos. Ant šaknų formuojasi gumbeliai – simbiotinių azotą fiksuojančių bakterijų veiklos rezultatas	Galvutė, kekė	4–5 suaugę taurėlapiai; 5 nevienodi suaugę arba laisvi vainiklapiai, 10 kuokelių, iš jų devyni suaugę, vienas laisvas; vaislapėlis vienas * ⚥ $T_{(5)}V_5K_{(9)+1}P_1$	Vienasėklė, dvisėklė, daugiasėklė ankštis	Soja, pupos, pupelės, dobilas, žirniai, lubinas, arachis, vikis, pelėžirnis, kupranugarinė dygliažolė, lęšis, akacija, liucerna, saldymedis, barkūnas, gledičija, saldžiavaisis pupmedis, cezalpinija, nutas, bandvikis, seradėlė, prožirnis, termopsis	Svarbiausia praktiniu požiūriu augalų grupė: maistiniai, pašariniai, medingieji, vaistiniai, dekoratyviniai. Praturtina dirvą azotu. Nuodingi – kalabariškosios pupos
	Graižažiedžiai Apie 20 000 rūšių	Vienametės ir daugiametės žolės. Visi augalų organai turi nariuotus pientakius	Graižas. Graižai gali būti sutelkti į sudėtinius žiedynus	Vamzdiški, liežuviški, piltuviški; vainikėliai iš 5 suaugusių į vamzdelį vainiklapių, kuokeliai 5, piestelė 1; taurelė neišsivysčiusi, gali būti pakeista plaukeliais, sudarančiais apykaklę	Lukštavaisis, daugelis – su skristukais	Saulėgrąža, kraujažolė, medetka, bitkrėslė, ramunė, rugiagėlė, dagys, šalpusnis, pienė, katpėdė, debesylas, astros,	Maistiniai, medingieji, vaistiniai, dekoratyviniai, techniniai augalai, piktžolės

59 lentelė. **Šeimų charakteristika**

	1	2	3	4	5	6	7
DVISKILČIAI				*⚥ $T_0V_{(5)}K_{(5)}P_{(2)}$		saulutės, cikorijos, kiaulpienė	
	Kryžmažiedžiai Apie 3000 rūšių	Vienmetės, dvimetės, daugiametės žolės	Kekė ir jos modifikacijos	Dvilyčiai, 4 taurėlapiai, 4 vainiklapiai (išdėstyti kryžmiškai), 6 kuokeliai, 1 piestelė *⚥ $T_{2+2}V_4K_{2+4}P_{(2)}$	Ankštara, ankštarėlė, riešutėlis	Kopūstas, laukinis ridikas, griežtis, ropė, garstyčia, leukonija, svėrė, ridikėlis, trikertė žvaginė	Maistiniai, pašariniai, medingieji, techniniai, piktžolės
KLASĖ	Eilė – varpiniai, šeima varpiniai 11 000 rūšių	Dažniausiai daugiametės, dvimetės, vienametės žolės, kai kurios turi šakniastiebį	Sudėtinė varpa, šluotelė, burbuolė	Turi 2 žiedažvynius, 3 kuokelius, 1 mezginė su 2 liemenėliais ir plunksniškomis purkomis ↑⚥ $V_2K_3P_{(3)\ arba\ 1}$	Grūdas	Kviečiai, miežiai, kukurūzai, cukranendrė, dirsė, motiejukas, tuščioji aviža, varputis, bambukas, avižos, soros, čiumiza, lendrūnas, eraičinas, šunažolė, rietmenė, šerytė	Svarbiausi duoninai augalai, pašariniai, gazoniniai, smėlio, kopų, nuošliaužų sutvirtintojai. Naudojami popieriaus, chemijos, tekstilės, eterinių aliejų pramonėje. Piktžolės
VIENASKILČIAI	Eilė – lelijažiedžiai, šeima lelijiniai 470 rūšių	Daugiametės žolės, dažnai turi svogūną arba šakniastiebį	Kekė	Apyžiedis vainiko pavidalo iš 6 laisvų ar suaugusių vainiklapių, išsidėsčiusių 2 ratais, 6 kuokeliai, triskiautė purka *⚥ $V_{3+3}K_{3+3}P_{(3)}$	Dėžutės, uogos	Tulpė, lelijos, narcizas, laiškenis, hiacintas; čemerys (turi alkaloidų); vėlyvis (turi alkaloidą kolchiciną)	Dekoratyviniai, vaistiniai. Naudojami selekcijoje poliploidams gauti
	Eilė – amariliniai, šeima česnakiniai	Daugiametės žolės, su svogūnais	Skėtis	Apyžiedis šešianaris, 6 kuokeliai, piestelė 1 iš trijų vaislapėlių *⚥ $V_{3+3}K_{3+3}P_{(3)}$	Dėžutė	Narcizas, snieguolė, klivija, amarilis, baltažiedė, meilenis, svogūnas, česnakas	Maistiniai, vaistiniai

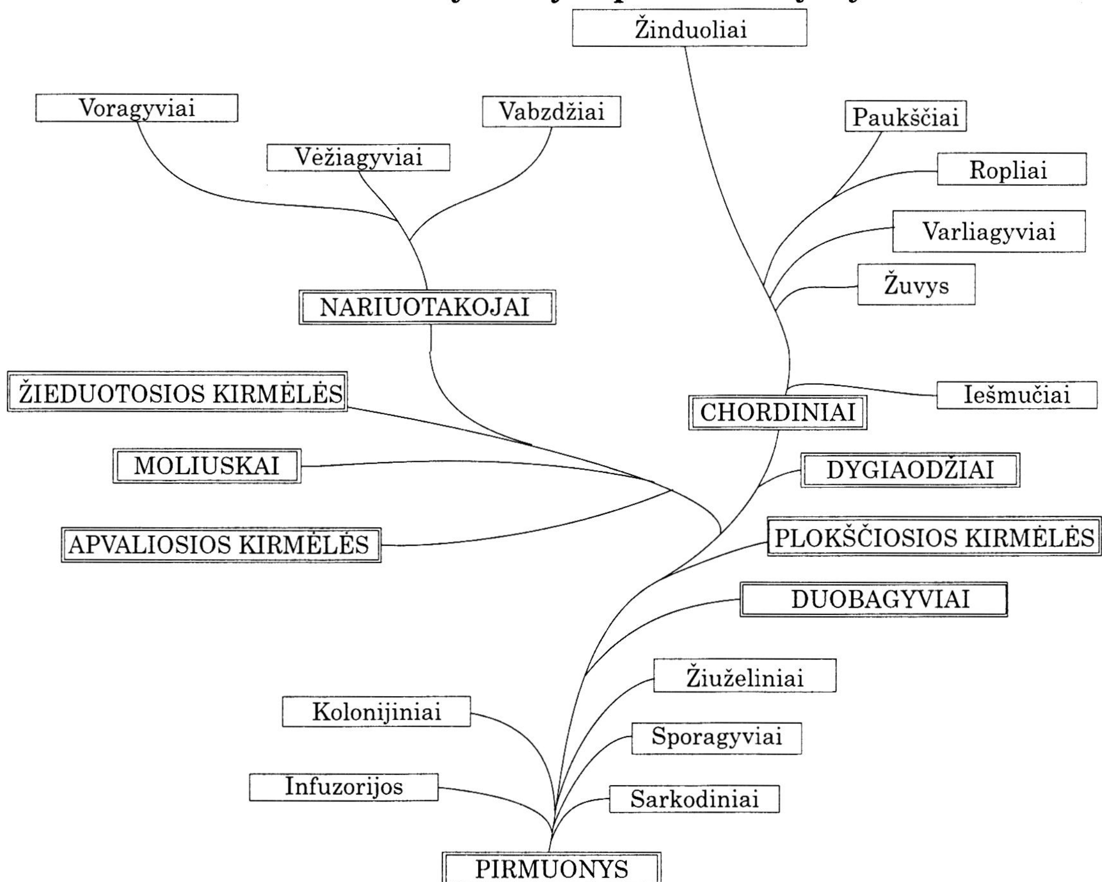
59 lentelė. **Šeimų charakteristika**

	Šeima, rūšių skaičius	Gyvenimo formos	Žiedynas	Žiedas, formulė	Vaisius	Atstovai	Reikšmė
VIENASKILČIAI	Eilė – Smidriniai, šeima pakalnutiniai	Daugiametės žolės su šakniastiebiu	Kekė	* ⚥ $V_{(3+3)}K_{3+3}P_{(3)}$	Uoga	Smidras, pakalnutė, pelžiedė, vilkauogė	Maistiniai, gydomieji, nuodingieji

GYVŪNŲ KARALYSTĖ

Daugiau kaip 2 mln. gyvūnų rūšių, gyvenančių visur. Nuo augalų skiriasi heterotrofine mityba, judrumu, išvystyta atramos ir judėjimo sistema. Gyvūnai kitaip, nei augalai, pasižymi sudėtingomis elgsenos reakcijomis

34 schema. **Gyvūnijos pasaulio vystymasis**



60 lentelė. **Pirmuonys (vienaląsčiai), daugiau kaip 30 000 rūšių**

Kūnas – viena ląstelė, sudaranti savarankišką organizmą bei pasižyminti visomis organizmo funkcijomis; nepalankias gyvenimo sąlygas praleidžia cistoje (gr. *kystis* – pūslė), turinčioje tvirtą apsauginį apvalkalą

Sistematinės grupės, atstovai	Gyvenamoji aplinka, judėjimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Infuzorijų tipas Klumpelė	Sūriuose ir gėluose vandenyse; laisvai plaukioja arba prisitvirtinę. Juda blakstienėlėmis. Kituose organizmuose – parazitinės formos, yra simbiontų	Pastovi kūno forma; 2 branduoliai: didysis reguliuoja visus gyvybinius procesus; mažasis – lytiniam dauginimuisi. Dauginimasis: nelytinis – skilimas pusiau; lytinis dauginimasis vyksta apsikeičiant branduoliais	Mitybinių grandinių grandis. Atrajojančių gyvūnų tinklainyje padeda virškinti maistą
Sarkodinių (Protoplazminių) tipas Amebų klasė Paprastoji ameba	Jūrų, gėlųjų vandenų, dirvožemio gyventojai; kai kurie – parazitai; juda pseudopodijomis – kūnas persilieja iš vienos vietos į kitą	Kūno forma nepastovi; kiautuotųjų – pastovi. Maistą gaudo pseudopodijomis, viduląstelinis virškinimas vyksta virškinamosiose vakuolėse. Branduolys – vienas. Dauginimasis – nelytinis, mitozės būdu dalijantis pusiau	Kiautuotųjų šakniakojų liekanos suformavo nuosėdines naudingąsias iškasenas. Parazitiniai gyvūnams ir žmogui sukelia virškinamojo trakto ligas
Žiuželinių klasė Žalioji euglena	Būdingi balų, tvenkinių gyventojai. Simbiontiniai gyvena vabzdžių žarnyne. Parazitinės formos – žmogaus ir kitų gyvūnų organizme. Juda vienu ar keliais žiuželiais	Kūno forma pastovi. Vienas didelis branduolys. Kai kurie turi chloroplastus, maitinimasis autotrofinis ir heterotrofinis. Dauginasi nelytiškai — skyla pusiau	Ekosistemų grandis. Parazitiniai žiuželiniai: trichomonos, lamblijos, tripanosomos sukelia įvairias ligas

61 lentelė. **Duobagyvių tipas, apie 9000 rūšių**

Primityviausios sandaros daugialąsčiai, dvisluoksnė sandara, spindulinė simetrija, ektodermoje išsidėsčiusios dilgiosios ląstelės, nervų sistema difuzinė, kvėpuoja visu kūno paviršiumi

Sistematinės grupės, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo ir judėjimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Hidragyvių klasė Gėlavandenis polipas – hidra 1 – kūnas; 2 – padas; 3 – čiuopikliai; 4 – burna; 5 – pumpurai	Gėli vandens šaltiniai; sėslus ir judrus gyvenimo būdas; judėjimas „žingsniuojant“	Kūnas maišo formos, ištįsęs, apie 1,5 cm ilgio. Virškinimo sistema – gastralinė ertmė, prasidedanti burnos anga. Pagrindinis dauginimosi būdas nelytinis – pumpuravimas. Hidros – hermafroditai, apvaisinimas kryžminis. Iš zigotos vystosi lerva – planulė	Vandens ekosistemų mitybinių grandinių grandis. Hidra yra plėšri
Scifomedūzų klasė Šakniaburnė medūza	Gyvena visose jūrose, laisvai plaukioja. Juda susitraukiant raumeninėms skaiduloms	Kūnas varpo formos, skersmuo nuo kelių centimetrų iki 2 metrų. Virškinimo sistema: skrandis ir išsišakoję kanalai. Dauginimosi metu vyksta kartų kaita: vegetatyvinės – polipo ir lytinės – medūzos	Jūros ekosistemų dalis; medūzos – plėšrūnai, naikina smulkius jūrinius gyvūnus. Valgomoji medūza gyvena Pietų Kinijos jūrose
Koralinių polipų klasė Aštuoniaspinduliai koralai: jūrų plunksna, raguotųjų koralų kolonija	Gyvena tropinio klimato juostos seklumose, kai kurie – šaltavandeniai	Atskiras koralinis polipas – nedidelis skaidrus maišelis su čiuopikliais	Kalkiniai kolonijinių polipų formų griaučiai formuoja rifus ir salas

62 lentelė. **Plokščiųjų kirmėlių tipas, daugiau kaip 12 000 rūšių**

Sudėtingesnės organizacijos gyvūnai: turi mezodermą ir jos darinius, kūnas dvišalės simetrijos – odos ir raumenų maišas su vidine parenchima; nervų sistemą sudaro šoniniai nervų kamienai su nerviniais mazgais galvinėje dalyje. Virškinimo sistemą sudaro priekinė ir vidurinė dalys. Turi nuolatines lytines liaukas

Sistematinės grupės, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo ir judėjimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Blakstienotųjų kirmėlių, arba turbeliarijų, klasė Pieniškoji planarija	Vandens gyvūnai; juda blakstienėlėmis	Sandara tipiška plokščiosioms kirmėlėms, žarnynas primityvus; atsiranda šalinimo organai – protonefridijos	Planarijos – plėšrūnai, minta smulkiais vandens gyvūnais
Siurbikių klasė Kepeninė siurbikė	Gyvūnų vidaus organuose; parazitai	Sandaros supaprastėjimas pasireiškia jutimo organų ir nervų sistemos redukcija	Parazituoja gyvūnuose, mažina gyvybingumą, nužudo parazituojamą gyvūną
	Kepeninės siurbikės gyvenimo ciklo schema Kiaušinis vandenyje → Lerva didžiosios kūdrinukės kūne → Laisvai plaukiojanti lerva → Lerva cistos stadijoje ant žolės → Suaugusi forma šeimininko kūne (kepenyse) → Kiaušinis vandenyje		
Kaspinuočių klasė Platusis kaspinuotis Jautinis kaspinuotis	Gyvena žmogaus ir kitų gyvūnų organizme	Nėra žarnyno, jutimo organų. Kūną sudaro daug narelių	Užkrečia žmogų ir kitus gyvūnus, žaloja sveikatą
	Jautinio kaspinuočio gyvenimo ciklo schema Suaugusi kirmėlė → Kiaušinis aplinkoje → Iš kiaušinio patenka į gyvūno virškinamąjį traktą → Lerva raumenyse virsta viriu → Su blogai apdorota mėsa – į žmogaus organizmą → Suaugusi kirmėlė		

63 lentelė. **Apvaliųjų kirmėlių tipas, daugiau kaip 20 000 rūšių**

Sistematinės grupės, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Apvaliųjų kirmėlių klasė Žmoginė askaridė	Gyvena visų žemynų jūrose ir gėluose vandenyse, dirvoje	Askaridės kūnas nenariuotas, ištęstas, trisluoksnis, skerspjūvyje apvalus. Lytinis, apvaisinimas vidinis	Parazituoja augaluose, gyvūnuose, žmogaus organizme. Nematodai kenkia augalų šaknims
	Kiaušinis aplinkoje → (deguonis, temperatūra) → Po kiaušinio apvalkalu — lerva → Iš žmogaus žarnyno su krauju lerva patenka į plaučius → Vėl patenka į žarnyną → Suaugusi askaridė → Kiaušinis aplinkoje Toksiškais medžiagų apykaitos produktais nuodija žmogaus organizmą		

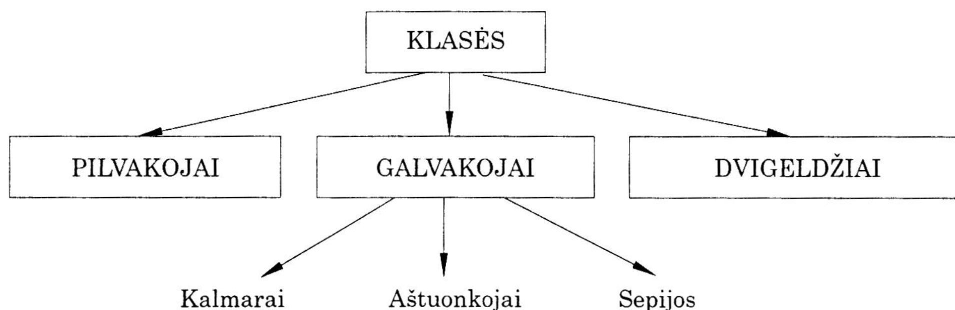
64 lentelė. **Žieduotųjų kirmėlių tipas, apie 8000 rūšių**

Sudėtingesnė sandara: antrinė kūno ertmė – celomas; sudėtingesnės nervų, virškinimo sistemos; kraujotakos ir kvėpavimo sistemų atsiradimas; primityvios galūnės – parapodijos; daugumos kūną sudaro segmentai – metameros

Sistematinės grupės, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Dėlių klasė Medicininė dėlė	Dauguma – gėlavandeniai organizmai	Smarkiai pakitę senovinių mažašerių kirmėlių palikuonys	Visos dėlės – plėšrūnai. Mitybinių grandinių dalis. Medicininė dėlė naudojama kraujui nuleisti
Daugiašerių kirmėlių klasė (Polichetai)	Beveik visos daugiašerės kirmėlės yra jūrinės; gyvena judriai arba yra sėslios	Kūno segmentai turi porines šonines išaugas – parapodijas; kvėpuoja visu kūno paviršiumi, žiaunomis; dažniausiai skirtalytės	Svarbi konsumentų mitybinių grandinių grandis. Kai kurios rūšys parazitai
Mažašerių kirmėlių klasė (Oligochetai) Sliekas	Gyvena dirvoje, gėlo vandens telkinių dugne	Kūną dengia kutikulė, raumenys – žiediniai ir išilginiai; kraujotakos sistema uždara, kvėpavimas visu kūno paviršiumi	Išrausdami dirvoje takus ir praleisdami dirvos daleles pro žarnyną sliekai gerina jos derlingumą

65 lentelė. **Moliuskų tipas, apie 130 000 rūšių**

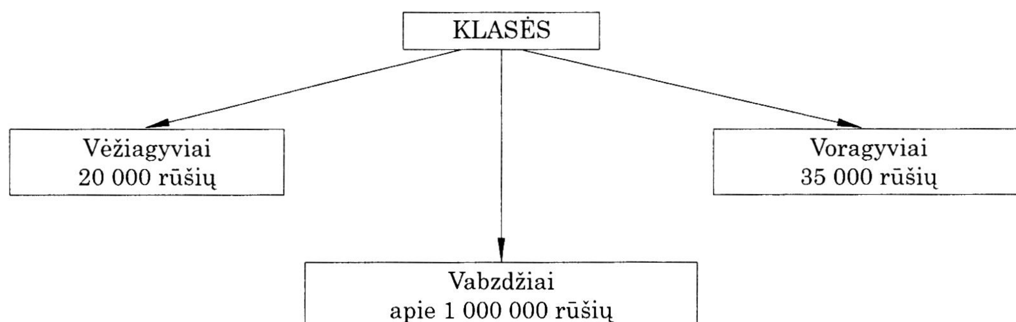
Progresyvūs pokyčiai: nervinių mazgų susiformavimas tam tikrose kūno dalyse; širdies, virškinimo liaukų atsiradimas; kūno segmentai susilieja į kūno dalis



Sistematinės grupės, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Pilvakojų klasė Didžioji kūdrinukė. Vynuoginė sraigė Vynuoginės sraigės plaučio kvėpuojamųjų judesių schema: 1 – viršutinė plaučių ertmės sienelė; 2 – apatinė ertmės sienelė: *a* – įkvepiant, *b* – iškvepiant	Gyvena jūrose, kai kurios sausumoje arba gėluose vandenyse. Juda susitraukiant kojos raumenims, judėjimas lygus ir lėtas	Kūnas ištęstas, nugaros pusėje išsipūtęs, dauguma turi kriauklę; asimetrinė sandara. **Organų sistemos.** Virškinimo sistema (burnos ertmė, ryklė su „trintuve“, stemplė, skrandis, žarnynas). Kraujotakos sistema (širdis, lakūnos) atvira. Kvėpuoja plaučiais. Hermafroditai: lytinės liaukos gamina ir kiaušialąstes, ir spermatozoidus. Kryžminis apvaisinimas; tiesioginis vystymasis	Kai kurios rūšys yra siurbikių tarpiniai šeimininkai. Naudojami maistui. Kai kurie – žemės ūkio augalų kenkėjai. Kai kurios jūrinės rūšys – parazitai, pasižymi visiška daugelio organų redukcija
Dvigeldžių klasė Bedantė	Dauguma rūšių gyvena jūrose ir vandenynuose; mažesnė dalis – gėlavandeniai	Kūnas – dvišalės simetrijos, dengiamas kriauklės, sudarytos iš dviejų geldelių, tarpusavyje sujungtų raiščiais ir raumenimis	Perlų ir perlamutro šaltinis; kai kurios rūšys – midijos, austrės, šukutės – valgomos. Laivagraužis gadina laivus, polius

NARIUOTAKOJŲ TIPAS, DAUGIAU KAIP 1 000 000 RŪŠIŲ

Pats gausiausias tipas; gyvena visur. Galūnės nariuotos, kūnas segmentuotas; kūno ertmė mišraus tipo – miksocelis; organų koncentracija segmentams susiliejant į kūno dalis; išorinis skeletas – chitininė danga, skersaruožiai raumenys; nervinių mazgų sankaupa galvos dalyje; auga nerdamiesi



66 lentelė. Vėžiagyvių klasė

Didelė ir įvairi klasė, kurios atstovai gyvena sūriuose, gėluose, pereinamojo tipo vandenyse, retai – drėgnose sausumos vietose

Atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas	Sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Aukštesnieji vėžiagyviai Upinis vėžys, kamčiatkinis krabas, vėdarėlis, krabas palmių vagis	Gyvena jūrose, ežeruose, upėse; plaukioja; vaikšto sausuma; rūšių, gyvenančių sausumoje ar drėgnose vietose lervos vystosi vandenyje	Metamerinė kūno sandara, dvišakės galūnės, kutikulė, pilvinė nervų grandinėlė; skirtalyčiai, apvaisinimas vidinis, kiaušinius patelė nešioja pilvo kojomis pusę metų	Aukštesnieji vėžiagyviai – verslo objektas (upinis vėžys, langustai, omarai, krevetės). Vandens ekosistemų mitybinių grandinių grandys
Žemesnieji vėžiagyviai Dafnijos, ciklopai, eufauzidai	Gėluose ir sūriuose vandenyse; plaukioja, „sklando“ vandenyje, juda šokuodami	Smulkūs, pasižymi paprastesne sandara	Daugelio gyvūnų, tarp jų ir žuvų, maistas. Parazituoja žuvų žiaunose

67 lentelė. **Voragyvių klasė**

Voragyviai pirmieji iš nariuotakojų apsigyveno sausumoje

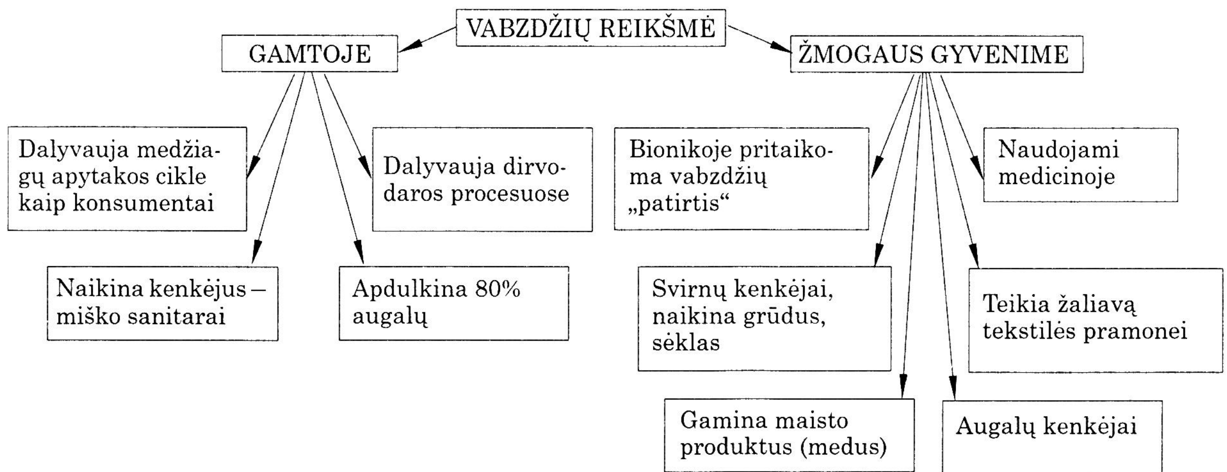
Sistematinė padėtis, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė, vaidmuo aplinkoje
Voras kryžiuotis	Gyvena sausumoje; antriniu būdu gali gyventi ir vandenyje; voratinklį naudoja lizdui statyti, gynybai, paplitimui, poravimuisi ir kt.	Voro galvoje – žandai su nuodų liaukomis ir uoslės organais – cheliceros, krūtinės dalyje – 4 poros vaikščiojamųjų kojų. Pilvelio gale apatinėje pusėje – trys poros voratinklinių karpučių	Didžioji dauguma vorų – plėšrūnai, minta vabzdžiais, stambūs gali pulti smulkius roplius ir paukščių jauniklius (voras paukštėda)
	Voratinklį sudaro įvairūs siūlai: sausi ir stori formuoja voratinklio rėmą, lipnūs – patį voratinklį	Užpakalinių kojų nageliais voras rezga gaudomąjį tinklą. Kūno ertmė – miksocelis. Virškinimas vyksta ne voro organizme, bet išorėje, auka virškinama ant tinklo, suleidus virškinimo sultis. Kvėpavimas plaučiais. Kraujotakos sistema atvira, širdis su vožtuvais. Rudenį patelė suka voratinklinį koboną, jame deda kiaušinius, iš kurių pavasarį išsirita jaunikliai	Vorai – mitybinių grandinių grandys, jais minta daugelis žinduolių, taip pat paukščiai, ropliai, varliagyviai ir kt. Svarbiausi vorų priešai – *Pompillidae* šeimos vapsvos
Erkės	Gyvena dirvožemyje, žolėje, vandens telkiniuose	Smulkūs voragyviai; kūno segmentai nelabai žymūs, burnos aparatas graužiamasis arba duriamasis–čiulpiamasis. Skirtalyčiai, patelės stambesnės	Erkės dalyvauja dirvodaros procesuose. Perneša ligas

68 lentelė. **Vabzdžių klasė**

Aukščiausios organizacijos, gausiausia ir įvairiausia nariuotakojų klasė, paplitę visur; kai kurie gyvena vandenyje. Dauguma geba skraidyti

Sistematinė padėtis, atstovai	Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas	Vidinės ir išorinės sandaros ypatybės; dauginimasis	Reikšmė aplinkoje
Dvisparniai Kambarinė musė	Gyvena sausumoje, skraido. Mitybinėse grandinėse – konsumentai	Kūnas skirstomas į galvą (akys, antenos, čiulpiamasis burnos aparatas); krūtinę (3 poros nariuotų galūnių, sparnai); pilvelį (nareliai su kvėpavimo angomis)	Mechaniniu būdu platina ligas. Drozofila – laboratorinių tyrimų objektas. Musės apdulkina augalus

35 schema. **Vabzdžių reikšmė**



69 lentelė. **Svarbiausi vabzdžių būriai**

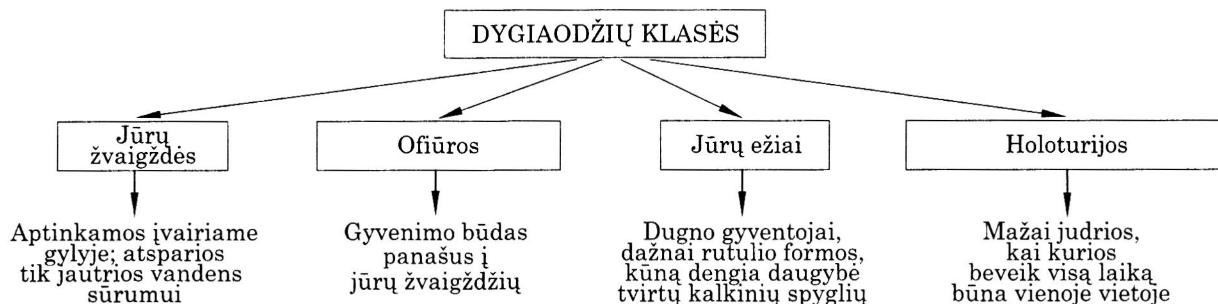
Būriai	Būdingi būrio bruožai	Vystymosi būdas	Atstovai
1	2	3	4
Kietasparniai Vabalai	Turi kietus priekinius ir plėviškus užpakalinius sparnus, priekiniai (antsparniai) uždengia užpakalinius sparnus. Burnos organai graužiamieji	Pilna metamorfozė	Karkvabaliai, žygiai, straubliukai, boružės, mėšlavabaliai, kolorado vabalas
Žvynasparniai Drugiai	Dvi poros žvyneliais padengtų sparnų. Žvyneliai – rūšiai būdingi chitininiai plaukeliai. Burnos aparatas – spirale susuktas siurbiamasis straubliukas	Pilna metamorfozė; lervos burnos aparatas graužiamasis	Kopūstinis baltukas, dilgėlinukas, šeirys, spungė, didysis perlinukas
Plėviasparniai	Dvi poros skaidrių plėviškų sparnų, graužiamasis arba laižomasis burnos aparatas. Plėviasparnių patelės pilvelio gale turi kiaušdėtę. Bičių ir širšių ji virtusi geluoniu su nuodų lataku ir nuodų liaukomis	Pilna metamorfozė. Kai kurių lervos vystosi lėliukėse, kitų vabzdžių lervose	Skruzdėlės, vapsvos, širšės, bitės, pjūkleliai, vyčiai
Dvisparniai	Viena plėviškų sparnų pora, burnos organai duriamieji–čiulpiamieji arba laižomieji	Pilna metamorfozė	Musės, uodai, akliai
Tiesiasparniai	Priekiniai sparnai išilgai gysloti, užpakaliniai – vėduoklės pavidalo, burnos aparatas graužiamasis	Nepilna metamorfozė	Žiogai, skėriai, kurkliai

69 lentelė. **Svarbiausi vabzdžių būriai**

1	2	3	4
Blakės	Dvi poros sparnų, burnos aparatas duriamasis–siurbiamasis	Nepilna metamorfozė	Miškinė blakė, uoginė blakė, patalinė blakė
Lygiasparniai	Dvi poros skaidrių sparnų, burnos organai – duriamasis–siurbiamasis straubliukas	Nepilnas vystymasis	Amarai, blakutės

36 schema. **Dygiaodžių tipas**

Didelė antriniaburnių jūrinių dugninių gyvūnų grupė, turinti apie 5000 rūšių; dauguma – laisvai judantys, rečiau – prisitvirtinę prie substrato specialiu stiebeliu; būdinga spindulinė, dažniausiai penkiaspindulė, simetrija ir oro bei vandens kanalų kvėpavimo sistema; turi kraujotakos sistemą, kvėpavimo organų nėra arba jie silpnai išsivystę; nervų sistema primityvi



CHORDINIŲ TIPAS

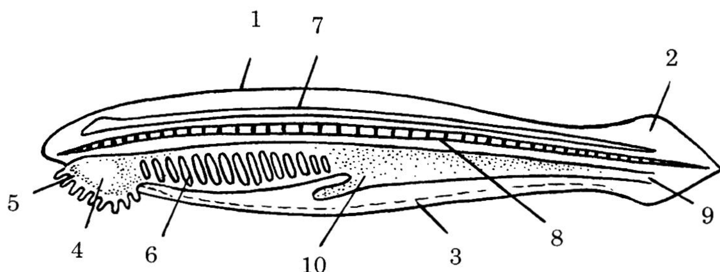
Nuo bestuburių skiriasi tuo, kad turi vidinį ašinį skeletą – nugarinę stygą, arba chordą; nervų sistema vamzdelio formos, išsidėsčiusi virš chordos; virškinamasis vamzdis – po chorda; širdis (ar ją atstojantys kraujotakos indai) – pilvinėje dalyje; kvėpavimo organai susiję su priekine žarnos dalimi

70 lentelė. **Chordinių sistematika**

Potipiai	Gaubtagyviai	Bekaukoliai	Stuburiniai
Klasės	Ascidijos Salpos Apendikuliarijos	Galvachordžiai	Apskritažiomeniai Kremzlinės žuvys Kaulinės žuvys Amfibijos, arba varliagyviai Ropliai Paukščiai Žinduoliai

71 lentelė. **Galvachordžių klasė**

Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas, atstovai	Ypatybės			Vaidmuo ir reikšmė gamtoje
	Išorinės sandaros	Vidaus sandaros	Dauginimosi ir vystymosi	
Iešmučiai Gyvena vidutinių platumų ir šiltose jūrose, smėlėtose seklumose, įsirausę į smėlį ir iškišę tik priekinę kūno dalį	Aptakios kūno formos, ilgis 4–8 cm. Nėra gerai išreikštos galvos, kaukolės. Išilgai nugaros eina pelekas, pereinantis į pilvinius pelekus. Kūnas segmentuotas, raumenys gerai išsivystę	Vidiniai griaučiai – chorda, virš jos nervinis vamzdelis su nervais. Virškinimo sistema – po chorda. Daugybė žiauninių plyšių išsidėstę žarnyno priekyje. Kraujotakos sistema uždara, širdies nėra	Skirtalyčiai, apvaisinimas išorinis; vystymasis vyksta vandenyje, iš ikro išsirita lerva, aktyviai maitinasi, nusėda ant dugno, suaugėliai gyvena sėsliai	Viena iš mitybinės grandinės grandžių vandens ekosistemose. Gyvūnijos pasaulio vystymesi – tarpinė pakopa tarp žemesniųjų ir aukštesniųjų gyvūnų. Ekosistemose atlieka filtratorių vaidmenį; reguliuoja planktoninių organizmų gausumą



Iešmučio sandara:

1 – nugarinis pelekas;

2 – uodeginis pelekas;

3 – pilvinis pelekas;

4 – burnos anga;

5 – apyburnio ūseliai;

6 – aplinkžiauninė ertmė;

7 – nervinis vamzdelis;

8 – chorda;

9 – analinė anga;

10 – žarna

STUBURINIŲ POTIPIS

Geriausiai išsivysčiusių chordinių potipis. Pasižymi aukštesniu, lyginant su bekaukoliais ir gaubtagyviais, sandaros ir fiziologijos procesų organizacijos lygmeniu

Žuvų antklasis, apie 25 000 rūšių

Žuvys – seniausi pirminiai vandens stuburiniai gyvūnai, gyvenantys įvairaus sūrumo vandenyje

72 lentelė. **Žuvų įvairovė ir reikšmė**

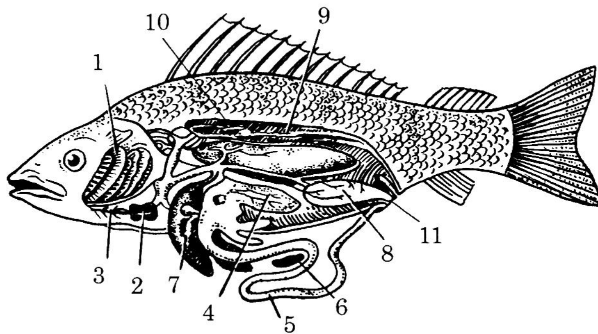
Žuvų klasės				
Kremzlinės	Kaulinės			
Rykliai	Eršketžuvės	Silkinės	Karpinės	Riešapelekės
Kremzlinės plėšrios žuvys. Žandikauliai su aštriais dantimis. Minta žuvimis, kartais kitais stuburiniais, taip pat bestuburiais. Kai kurie rykliai pavojingi žmogui	Chorda išlieka ir suaugėliuose. Griaučiai kremzliniai. Vertingos verslinės žuvys (eršketai – žvaigždėtasis, didysis, sterlė)	Būriais gyvenančios jūrinės ir gėlavandenės žuvys, minta bestuburiais, dažnai smulkiais vėžiagyviais. Daug rūšių praeivės, t.y. auga ir bręsta jūrose, neršti grįžta į upes. Verslinės žuvys (silkė, keta, kuprė, upėtakis, atlantinė lašiša)	Gėlavandenės. Žandikauliai be dantų, pastarieji išsidėsto ryklės gilumoje. Minta augalais ir bestuburiais. Verslinės žuvys – sazanas, karosas, kuoja, karšis, karpis, plačiakaktis, baltasis amūras	Senovinės žuvys. Yra tik 1 rūšis – latimerija, jos ilgis iki 1,5 m, gyvena Indijos vandenyne. Dvikvėpė (žiaunos ir plaučiai). Iš visų žuvų artimiausia šarvuotiesiems varliagyviams – stegocefalams

73 lentelė. **Kaulinių žuvų klasė**

Gyvenamoji aplinka, gyvenimo būdas, atstovai	Ypatybės			Vaidmuo ir reikšmė gamtoje
	Išorinės sandaros	Vidaus sandaros	Dauginimosi ir vystymosi	
Skirtingo sūrumo, temperatūros, prisotinimo deguonimi vandens telkiniai. Jūrinės ir gėlavandenės, gyvena tiek prie dugno, tiek ir vandens sluoksnyje. Praeivės rūšys skirtingais gyvenimo periodais gyvena ir jūroje, ir gėluose vandenyse	Daugumos kūno forma aptaki, kūną dengia žvynai, saugantys nuo mechaninių pažeidimų. Kūnas sudarytas iš galvos, liemens ir uodegos. Pelekai: poriniai (krūtinės, pilvo); neporiniai (uodegos, nugaros, analinis). Galvoje – jutimo organai. Išilgai abiejų kūno pusių – šoninė linija, padedanti žuviai orientuotis vandenyje	Griaučius sudaro: kaukolė, stuburas, galūnių juostos ir pelekų griaučiai. Virškinimo sistemą sudaro: burna su nediferencijuotais dantimis, ryklė, stemplė, skrandis, žarnynas, kepenys, kasa, analinė anga. Kvėpavimo sistema – žiaunos. Širdis dviejų kamerų. Nervų sistema: galvos bei nugaros smegenys ir nervai	Skirtalytės. Patelės turi porines kiaušides, gaminančias kiaušinėlius – ikrus, patinai – sėklides. Apvaisinimas išorinis. Iš apvaisinto ikro vystosi lervutė, iš jos – mailius. Nerštas, rūpinimasis palikuonimis	Būtina vandens ekosistemų mitybinių grandinių grandis. Vienas iš svarbių tiek žmogaus, tiek kitų gyvūnų mitybinių objektų

73 lentelė. **Kaulinių žuvų klasė**

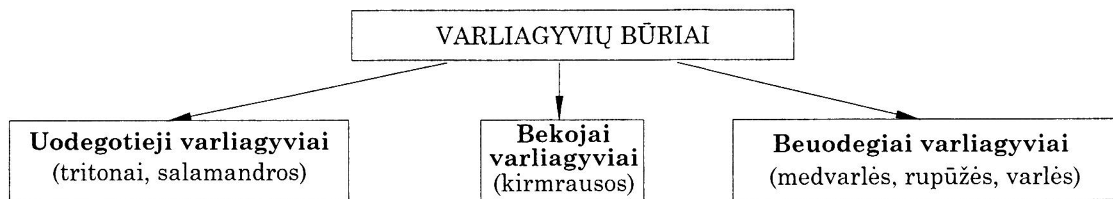
Žuvies vidaus sandara



1 – žiaunos;
2 – širdis;
3 – kraujagyslės;
4 – skrandis;
5 – žarna;
6 – blužnis;
7 – kepenys;
8 – lytinės liaukos;
9 – plaukiojamoji pūslė;
10 – inkstas;
11 – analinė anga

74 lentelė. Amfibijos, arba varliagyviai, daugiau kaip 2800 rūšių

Palyginti negausi pirmųjų sausumos stuburinių grupė; turi plaučius, du kraujo apytakos ratai, širdis trijų kamerų; galūnės penkiapirštės

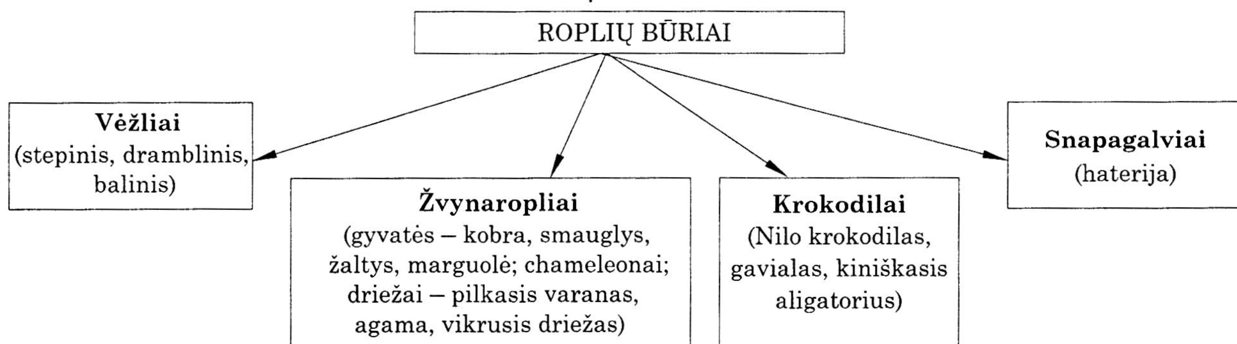


Bendra varliagyvių charakteristika (beuodegių pavyzdžiu)

Gyvenamoji aplinka, reikšmė gamtoje	Išorinė sandara	Vidinė sandara	Dauginimasis ir vystymasis
Gyvena drėgnose vietovėse, kur vidutinė metinė gyvenamosios terpės temperatūra teigiama. Biotopas – gėlųjų vandenų pakrantės, drėgnas tropikų ir subtropikų dirvožemis; gali gyventi medžiuose. Kai kurie aptinkami dykumoje. Būtina daugelio ekosistemų mitybinių grandinių grandis. Kai kurie varliagyviai naudojami žmonių maistui	Kūnas trumpas, platus, jį dengia lygi gleivėta oda. Galva plokščia, kaklas nežymus, uodegos nėra. Galvoje išsidėsčiusios akys, šnervės, yra vokai. Dvi poros kojų, užpakalinės ilgesnės ir stipresnės už priekines. Tarpupirščiuose – plaukiojamosios plėvės	Įsisavinus sausumą sudėtingesnė tapo nervų sistema bei jutimo organai. Padidėjo priekinės smegenys, atsirado vidurinė ausis; nervų sistemą sudaro: galvos ir nugaros smegenys bei nervai. Plaučiai silpnai išvystyti	Skirtalyčiai, apvaisinimas išorinis, dažniausiai vandenyje. Apvaisintas kiaušinėlis vandens telkinyje dažniausiai vystosi iki lervos (buožgalvio). Po metamorfozės buožgalvis kvėpuoja ne žiaunomis, o plaučiais; keičiasi kraujotakos sistema, susiformuoja galūnės

75 lentelė. **Roplių klasė, apie 6000 rūšių**

Sausumos stuburiniai, kilo iš senovinių varliagyvių – stegocefalų. Turi plaučius; krūtinės ląstą nuo pilvo ertmės skiria diafragma; širdis su nepilna pertvara; progresyvūs griaučių pokyčiai; gemalo dangalai

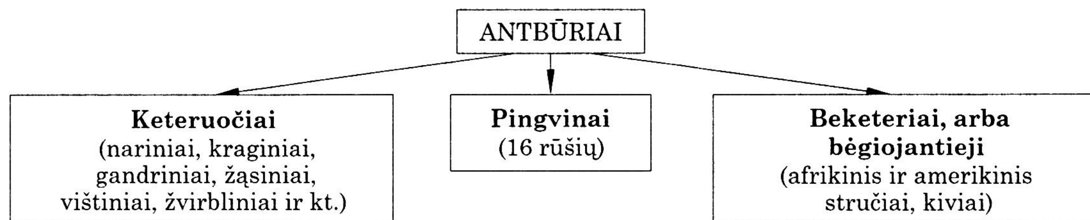


Roplių charakteristika (vikriojo driežo pavyzdžiu)

Gyvenamoji aplinka, reikšmė gamtoje	Išorinė sandara	Vidinė sandara	Dauginimasis ir vystymasis
Plačiai paplitę įvairiausiose zonose: vidutinėje, dykumose ir šiaurėje; tropiniuose miškuose, upėse, jūrose. Gyvena sausumoje (kai kurios rūšys medžiuose) ir vandenyje. Ekosistemose – bestuburių ir smulkių stuburinių gausumo reguliatoriai. Gyvatės ir driežai naikina žemės ūkio naudmenų kenkėjus. Oda naudojama galanterijos gaminiams	Kūną sudaro galva, liemuo ir uodega. Ypatinga kaklo slankstelių struktūra užtikrina galvos judrumą. Porinės galūnės pasižymi bendra sausumos stuburiniams būdingos galūnių sandaros schema. Oda sausa, be liaukų, viršutinis sluoksnis suragėjęs, sudaro odos priedus: žvynus ir plokšteles	Nervų sistema dar labiau išvystyta, negu varliagyvių, tobulesnės galvos smegenys ir jutimo organai Kraujotakos sistema: geriau išreikštas veninio ir arterinio kraujo srautų atskyrimas	Skirtalyčiai, apvaisinimas vidinis. Vystymasis tiesioginis, iš kiaušinio išsiritęs jauniklis savo sandara panašus į suaugėlį, tik lytinės liaukos nėra visiškai išsivysčiusios. Kiaušiniai dedami biriame grunte. Kartais rūpinasi palikuonimis. Kai kurie – gyvagimdžiai

76 lentelė. **Paukščių klasė, apie 9000 rūšių**

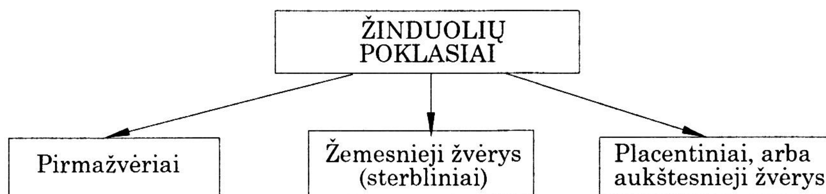
Specializuota aukštesniųjų stuburinių klasė, kurios atstovai prisitaikę skraidyti: priekinės galūnės virtusios sparnais; kaulai pneumatiniai; kūną dengia plunksnos; širdis keturių kamerų su vienu aortos lanku; dantų nėra, juos atstoja raginis snapas; kempininės struktūros plaučiai be alveolių; dvigubas kvėpavimas – kraujas aprūpinamas deguonimi ir įkvepiant, ir iškvepiant; modifikuoti griaučiai (stuburas suaugęs, išskyrus kaklo sritį; krūtinkaulio ketera); viena kiaušidė



Gyvenamoji aplinka, reikšmė gamtoje	Išorinė sandara	Vidinė sandara	Dauginimasis ir vystymasis
Plačiai paplitę visoje Žemėje, didžiausia įvairovė – tropiniuose miškuose. Būtinas kiekvienos biogeocenozės komponentas. Efektyvūs vabzdžių, voragyvių, smulkių stuburinių gausumo reguliatoriai. Kai kurie apdulkina augalus, vaisius ir platina sėklas. Naikina smulkius graužikus. Žmonių mitybos objektas	Kūną sudaro galva, liemuo ir uodega. Priekinės galūnės – sparnai, užpakalinės – kojos. Galvoje yra snapas, sudarytas iš posnapio ir antsnapio. Kojos keturpirštės. Oda sausa, be liaukų, ją dengia pūkai ir plunksnos (kontūrinės ir pūkinės). Kontūrinės plunksnos: dengiamosios, plasnojamosios ir vairuojamosios. Plunksnos tepamos riebalais iš pasturgalio liaukos	Nervų sistema: galvos ir nugaros smegenys; gerai išvystyti didieji smegenų pusrutuliai ir smegenėlės; būdingi sąlyginiai refleksai; jutimo organai: regos, klausos organai; uoslės organai silpnai išvystyti	Skirtalyčiai. Patelės turi išsivysčiusią tik kairę kiaušidę, patinų sėklidės porinės; apvaisinimas – kiaušintakyje. Apvaisinta kiaušialąstė didėja, dengiasi dangalais ir kiaušinio pavidalu patenka į kloaką. Vystymasis prasideda tik šildant kiaušinį – jį perint Paukščių vystymosi tipai: Paukščiukiniai – Jaunikliai bejėgiai Viščiukiniai – Jaunikliai savarankiški

77 lentelė. **Žinduolių (žvėrių) klasė, daugiau kaip 4000 rūšių**

Aukščiausios organizacijos stuburiniai gyvūnai, pasižymintys progresyviais bruožais: gerai išsivysčiusi smegenų pusrutulių žievė, šiltakraujai, gyvagimdžiai, turi efektyvią termoreguliacinę sistemą, diferencijuoti dantys, kūną dengia kailis. Paplitę visur, išskyrus Antarktidą



Placentinių žinduolių charakteristika

Išorinė sandara, kūno danga	Griaučiai, raumenys	Kraujotakos ir nervų sistemos	Kvėpavimo ir virškinimo sistemos	Dauginimasis ir vystymasis
Kūnas skirstomas į galvą, liemenį ir uodegą. Dvi poros penkiapirščių galūnių išsidėsčiusios po liemeniu. Galvoje – ausų kaušeliai, juntamieji plaukeliai – vibrisės, ištįsusi nosis, burna su dantimis, akys su vokais ir blakstienomis. Kūno danga – plaukai; dangą sudaro vilna (akuotai) ir pavilnė, jos periodiškai keičiamos (šėrimasis). Odoje yra riebalinės, prakaito ir kvapiosios liaukos. Pieno liaukos – pakitusios prakaito liaukos, su speneliais	Kaukolė, stuburas, krūtinės ląsta, priekinių ir užpakalinių galūnių juostos, laisvos galūnės. Dantys (kandžiai, iltys, krūminiai) išsidėstę žandikaulių alveolėse. Stuburas: 7 kaklo, 12 krūtinės, 6 juosmens, 3–4 kryžmens, keletas uodegos slankstelių. Raumenys: kramtomieji, nugaros, galūnių. Krūtinės ląstą ir pilvo ertmę skirianti raumeninga diafragma dalyvauja kvėpavimo judesiuose	Širdis keturių kamerų, du kraujo apytakos ratai, nuo kairio skilvelio eina kairioji aorta, nuo jos – arterijos. Centrinė nervų sistema – galvos ir stuburo smegenys; periferinė – nervai. Didžiųjų pusrutulių žievė raukšlėta, smegenėlės gerai išsivysčiusios. Būdingi sąlyginiai ir nesąlyginiai refleksai. Uoslė, skonis ir klausa gerai išsivystę	Nosies ertmė, gerklos su balso stygomis, trachėja, du bronchai, plaučiai. Kvėpavimo judesiai atliekami dėka krūtinės ląstos ir diafragmos. Virškinimo sistema: burna su dantimis, raumeningas liežuvis su skonio kauburėliais, seilių liaukos, ryklė, stemplė, skrandis, žarnynas (plonoji, storoji ir tiesioji žarnos), kepenys, kasa	Patelės turi porines kiaušides, kiaušintakius, gimdą, patinai – porines sėklides, sėklatakį. Apvaisinimas vyksta patelės kiaušintakiuose. Zigota vystosi gimdoje, joje gemalas iš motinos organizmo per placentą maitinamas maisto medžiagomis, gauna deguonį bei šalina medžiagų apykaitos produktus. Gimęs naujagimis minta motinos pienu. Tėvai perduoda palikuonims savo gyvenimo patirtį

78 lentelė. **Žinduolių sistematika**

Poklasiai	Būdingi bruožai	Atstovai
Pirmažvėriai	Turi primityvių bruožų, būdingų ropliams – kūno temperatūra nepastovi, jauniklių negimdo, deda kiaušinius	Ančiasnapis, echidna
Sterbliniai	Gimdo silpnai išsivysčiusius jauniklius, kurie toliau išnešiojami sterblėje. Placenta silpnai išvystyta arba jos nėra	Kengūros, sterblinės voverės, sterbliniai lokiai – koalos

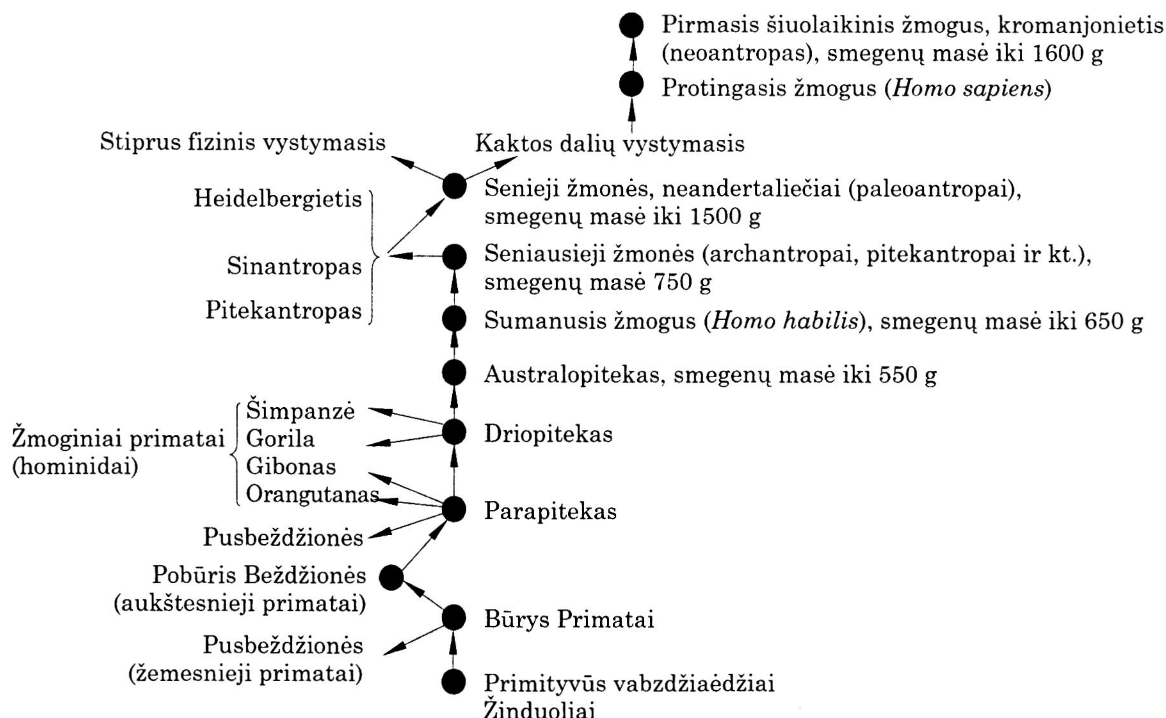
78 lentelė. **Žinduolių sistematika**

Poklasiai	Būdingi bruožai	Atstovai
Placentinių poklasis		
Būriai		
Vabzdžiaėdžiai	Primityviausi placentiniai	Ežiai, kurmiai, kirstukai
Šikšnosparniai	Prisitaikę skraidyti, minta vaisiais, vabzdžiais, žinduolių krauju. Dantys silpnai diferencijuoti	Skraidantieji šunys, lygianosiai šikšnosparniai, tikrieji vampyrai
Graužikai	Minta daugiausia augaliniu maistu. Turi porinius viršutinius ir apatinius kandžius, kurių priekinis paviršius padengtas tvirtu emaliu. Kandžiai savaime pasigalanda, nuolat auga	Voverės, bebrai, peliniai, žiurkėniniai graužikai
Kiškiažvėriai	Panašūs į graužikus. Minta augaliniu maistu. Jiems būdingas ilgas žarnynas	Kiškėnai, baltasis kiškis, pilkasis kiškis
Plėšrieji	Turi iltis ir aštrius krūminius dantis, galūnės su nagais. Minta gyvūniniu maistu	Vilkai, šakalai, lapės, katės, lokiai, liūtai
Irklakojai	Iš sausumos vėl į vandenį gyventi grįžę gyvūnai, kvėpuoja atmosferos deguonimi, pailgas aptakus kūnas padengtas retais plaukais, galūnės – plaukmenys	Ausytieji ruoniai, tikrieji ruoniai
Banginiai	Kitaip, negu irklakojai, niekada neišlipa į sausumą, užpakalinės galūnės redukuotos, priekinės virtusios plaukmenimis	Ūsuotieji banginiai, dantytieji banginiai
Porakanopiai	Žolėdžiai gyvūnai, kojos su 4 ar 2 pirštais, dengiamais kanopų	Briedis, šiaurinis elnias, ožkos, karvės, šernai
Neporakanopiai	Stambūs gyvūnai, kojos su išvystytu 3 pirštu	Arkliai, asilai, raganosiai, zebrai
Straubliniai	Stambiausi sausumos stuburiniai. Straublys – viršutinė lūpa, suaugusi su nosimi	Drambliai, išmiręs mamutas
Primatai	Labiausiai išsivystę, daug kuo panašūs į žmogų	Pusbeždžionės, beždžionės

79 lentelė. **Pagrindiniai gyvybės vystymosi Žemėje etapai**

Era	Periodas	Augalai ir gyvūnai
prieš mln. metų		
Neozojaus, pradžia – 2	0,04–0,02	Stambių žinduolių (mamutų, kardadančių tigrų) išnykimas. Rūšies *Homo sapiens* vystymasis
	2	Žmogaus protėvio – australopiteko – atsiradimas
Kainozojaus, pradžia – 70	20–10	Jūrose apsigyvena žinduoliai
	70–50	Pasirodo įvairių žinduolių klasės būrių atstovai (plėšrieji, žolėdžiai, šikšnosparniai, primatų protėviai)
	70–20	Įsivyrauja žinduoliai, plinta paukščiai, labai sumažėja roplių
Mezozojaus, pradžia – 230	70	Stambūs ropliai, tarp jų dinozaurai, išmiršta
	130	Įsivyrauja gaubtasėkliai
	180	Paukščių, pirmųjų gaubtasėklių augalų atsiradimas
	230–190	Atsiranda žinduoliai, išnyksta paparčių miškai
	230–70	Roplių paplitimas – sausumoje, jūrose jie pasiekia įspūdingą dydį (dinozaurai, ichtiozaurai ir kt.)
Paleozojaus, pradžia – 600	300	Roplių atsiradimas
	400–300	Paparčių miškai, vabzdžiai
	400	Šiuolaikinių žuvų atsiradimas. Sausumos plotuose – bakterijos, grybai, samanos, bestuburiai, varliagyviai
	500	Pirmieji jūriniai stuburiniai: šarvuotosios žuvys
	600–500	Jūrose – bestuburiai, tarp jų – šiuolaikinių moliuskų ir nariuotakojų protėviai
Archėjaus, pradžia – 4500	1000	Daugialąsčiai organizmai
	3000	Vienaląsčiai organizmai
	3500	Gyvybės užuomazgos jūrose

37 schema. **Pagrindiniai primatų ir žmogaus vystymosi etapai**



80 lentelė. **Sistematinė žmogaus padėtis**

Karalystė	Gyvūnai
Tipas	Chordiniai
Potipis	Stuburiniai
Klasė	Žinduoliai
Būrys	Primatai
Šeima	Žmoginės beždžionės (hominidai)
Gentis	Žmogus (*Homo*)
Rūšis	Protingasis žmogus (*Homo sapiens*) Rasės Negridų (juodoji); Europidų (baltoji); Mongolidų (geltonoji)

81 lentelė. **Žmogaus organų sistemos**

Organų sistemos	Organai	Pagrindinės funkcijos
NERVŲ Nervinis audinys, nervinės ląstelės, lydinčiosios ląstelės (neuroglija)	Centrinė: galvos ir nugaros smegenys	Sąlyginių ir nesąlyginių refleksų reguliavimas; atmintis, mąstymas
	Periferinė: vegetatyvinė (simpatinė, parasimpatinė)	Lygiųjų raumenų, vidaus organų veiklos, medžiagų apykaitos reguliavimas
	Somatinė (nervai ir nerviniai mazgai)	Griaučių raumenų veiklos reguliavimas
ŠIRDIES IR KRAUJAGYSLIŲ (kraujotakos)	Širdis, kraujagyslės, kraujas, limfa, audinių skystis – vidinė organizmo terpė	Vidinės terpės pernešimas organų link
ATRAMOS IR JUDĖJIMO	Griaučiai: kaulai, kremzlės, sąnariai, raiščiai. Griaučių raumenys. Oda: epidermis, derma, poodinis audinys	Kūno formos palaikymas; galvos ir nugaros smegenų, krūtinės ir pilvo ertmės vidaus organų apsauga, organų atrama, judėjimas. Apsauga nuo mechaninių ar cheminių pažeidimų, virusų, mikrobų; termoreguliacija; šilumos, šalčio, skausmo, lytėjimo, apkrovos pojūčiai
ENDOKRININĖ	Vidaus sekrecijos liaukos: hipofizė, hipotalamas, skydliaukė, prieskydinė liauka, užkrūčio liauka, kasa, lytinės liaukos, antinksčiai	Aukštos diferenciacijos ląstelių, audinių, organų veiklos koordinacija
VIRŠKINIMO	Burnos ertmė, gerklos, ryklė, stemplė, skrandis, dvylikapirštė žarna, plonoji žarna, akloji žarna, kirmėlinė atauga, storoji žarna, tiesioji žarna. Virškinimo liaukos: seilių, skrandžio, kasos, tulžies pūslė, antinksčiai	Organinės maisto produktų dalies (riebalų, baltymų, angliavandenių) skaidymas į paprastesnius junginius: išsiskiriant energijai – energijos apykaita; baltymų biosintezės metu – medžiagų apykaita; nepanaudotų skaidymo produktų pašalinimas į aplinką
ŠALINIMO	Inkstai, šlapimtakiai, šlapimo pūslė, šlapimkanalis	Kraujo sudėties pastovumo užtikrinimas
LYTINĖ (dauginimosi)	Vyriškoji: sėklidės, sėklatakiai, sėklidės prielipai, priešinė liauka, varpa	Spermatozoidų formavimas

81 lentelė. **Žmogaus organų sistemos**

Organų sistemos	Organai	Pagrindinės funkcijos
LYTINĖ (dauginimosi)	Moteriškoji: kiaušidės, kiaušintakiai, gimda, makštis, lytinės lūpos, klitoris	Kiaušialąstės formavimas, vaisiaus išnešiojimas
KVĖPAVIMO	Nosies ertmė, nosiaryklė, gerklos, trachėja, bronchai, plaučiai: bronchų medis, sudarytas iš bronchiolių, plaučių pūslelės – alveolės	Dujų apykaita tarp aplinkos ir organizmo, dalyvavimas garso ir kalbos formavime. Kvėpavimas plaučiais. Audinių kvėpavimas
JUTIMO ORGANAI Klausa	Ausis: išorinė, vidurinė, vidinė	Išorinių garsinių virpesių perdavimas
Rega	Akis: vokai (konjunktyviniai maišeliai, ašarų liaukos, ašarų ežeras), akies obuolys (išorinė odena (sklera), ragena, rainelė, vyzdys, gyslainė, tinklainė – lazdelės ir kolbelės, rainelės raumenys, lęšiukas	Išorinio pasaulio stebėjimo sistemos – regos – formavimas. Objektų ryškumo, šviesos, formos, dydžio įvertinimas. Kūno padėties reguliavimas, atstumo nustatymas
Uoslė	Uoslės nervo galūnės viršutinėje nosies ertmės dalyje	Jautriosios ląstelės dalelių difuzijos būdu jaučia įvarius kvapus
Lytėjimas	Nervų galūnės, išsidėsčiusios odoje, ir formuojančios dermoje nervų rezginius	Juntamosios nervinės skaidulos (dendritai) eina į juntamuosius nugaros smegenų neuronų mazgus bei kai kuriuos juntamuosius galvinių nervų mazgus
Skonis	Skonio kauburėliai, arba svogūnėliai, išsidėstę minkštojo gomurio ir liežuvio gleivinėje	Svogūnėlį sudaro jutiminės ląstelės, jautrios įvairiems skonio dirgikliams: saldumui jautrus liežuvio galiukas, rūgštumui – šoninis paviršius, kartumui – liežuvio pagrindas

82 lentelė. **Centrinė nervų sistema – galvos ir nugaros smegenys**

Galvos smegenys

Formuoja pirminę signalinę sistemą – centrai išsidėstę žievėje, receptorių dėka priimami konkretūs signalai. Antrinė signalinė sistema (žmogaus) grindžiama žodžiais: kalba, raštu, signalai apie dirgiklius; mąstymas ir kalba – visos žievės funkcija

82 lentelė. **Centrinė nervų sistema – galvos ir nugaros smegenys**

Sandara	Funkcija
Priekinės smegenys: didieji pusrutuliai ir vidurinės smegenys. Abu pusrutulius jungia ilgos neuronų ataugos – aksonai; raukšlės kiekvieną pusrutulį dalija į kaktos, viršugalvio, smilkinių ir pakaušio dalis. Pusrutulio paviršinė dalis, arba žievė, dengia baltąją medžiagą – aksonus	Užtikrina aukštąją nervinę veiklą, sąlyginių refleksų funkcijas; lemia pagrindinį žmogaus skiriamąjį bruožą – mąstymą ir kalbą
Didžiųjų pusrutulių žievės zonos: *motorinė* – priekiniame centriniame vingyje, *sensorinė* – užpakaliniame viršugalvio dalies vingyje, *regos* – pakaušio dalyje, *klausos* – viršutiniame smilkinių dalies vingyje, *uoslės, skonio* – pirmame smilkinių dalies skyriuje	Iš specializuotų receptorių informacija patenka į žievę, čia virsta nerviniu impulsu, kuris juntamaisiais neuronais perduodamas į atitinkamas zonas ir formuojasi jutimas. Funkcinė sistema, arba analizatorius (pagal I. Pavlovą),: receptorius – aksonai – žievės zona
SMEGENŲ KAMIENAS	
Tarpinės smegenys (hipotalamas – pagumburinė smegenų dalis)	Impulsų perdavimas smegenų žievei
Vidurinės smegenys	Raumenų tonuso palaikymas, jo perskirstymas; ėjimo refleksai ir gebėjimas stovėti; reakcijos į šviesą ir garsą refleksai
Pailgosios smegenys	Refleksai: seilių išsiskyrimo, kosėjimo, čiaudėjimo, vėmimo, skrandžio sulčių išsiskyrimo, mirksėjimo, orientacijos
Užpakalinės smegenys: tiltas – jungia smegenėlių pusrutulius	Išsidėstę V – VIII galvos nervų porų branduoliai (trišakis, atitraukiamasis, veidinis, pusiausvyros ir klausos nervas)
Smegenėlės	Nesąlyginių judėjimo refleksų koordinavimas, pusiausvyra, raumenų tonusas

Nugaros smegenys

Dvi funkcijos: reflektorinė – nervinio centro, reguliuojančio kurio nors organo ar sistemos veiklą, receptorių ir motorinių organų dėka vykdomas refleksas; laidinė – baltosios medžiagos nervinių skaidulų kuokštai jungia nugaros smegenų skyrius tarpusavyje ir su galvos smegenimis; nervinis impulsas perduodamas organams

82 lentelė. **Centrinė nervų sistema – galvos ir nugaros smegenys**

Sandara	Funkcijos
Nugaros smegenys – baltos virvės pavidalo darinys, išsidėstęs stuburo kanale. Šio darinio viduje – nugaros smegenų kanalas, kurį supa pilkoji medžiaga (neuronų kūnai):	
Priekiniai ragai	Išsidėstę motoriniai neuronai, nuo jų eina aksonai
Galiniai ragai	Išsidėstę tarpiniai – jungiantys motorinius ir sensorinius – neuronai
Šoniniai ragai	Nerviniuose mazguose išsidėstę juntamųjų nervų (einančių išorėje) sensoriniai neuronai
Nugaros smegenų centrai susiję su receptoriais ir motoriniais organais (motoriniai griaučių raumenų centrai, daugelis vegetatyvinių); kylančiosios neuronų ataugos perduoda impulsus galvos smegenims, nusileidžiančiosios – iš galvos į nugaros smegenis: impulsas iš galvos smegenų keliauja į nugaros smegenų motorinius neuronus, po to – nugaros nervais į organus. Procesą kontroliuoja galvos smegenys	

83 lentelė. **Vegetacinė nervų sistema**

Kontroliuoja vidaus organų ir liaukų veiklą, užtikrina organizmo vidinės terpės pastovumo nervinę reguliaciją. Veikia autonomiškai, t.y. nėra sąmoningai kontroliuojama

Simpatinė	Parasimpatinė
Neuronai išsidėstę šoniniuose krūtinės ir juosmens nugaros smegenų dalių raguose, neuronų ataugos sudaro priekines šakneles ir baigiasi nerviniuose mazguose abiejose stuburo pusėse, jungiamos nervinėmis skaidulomis, formuoja nervines grandinėles (nervų kamienus). Neuronų ataugos eina į vidaus organus	Neuronai išsidėstę galvos smegenų kamiene ir nugaros smegenų kryžmens dalyje, neuronų ataugos eina link vidaus organų galvos nervų ir dubens nervų pavidalu ir baigiasi arba greta, arba pačiuose vidaus organuose
Simpatinė ir parasimpatinė sistemos yra antagonistinės. Pavyzdžiui, širdies susitraukimų dažnį ir susitraukimo apimtį simpatinė sistema didina, o parasimpatinė – mažina	

84 lentelė. **Širdies ir kraujagyslių bei kraujotakos sistema**

Sudaro širdis ir uždara kraujotakos sistema, kuriai taip pat priklauso kraujas, limfa, audinių skystis („vidinė organizmo terpė“)

84 lentelė. **Širdies ir kraujagyslių bei kraujotakos sistema**

Organai	Sandara	Funkcijos
Širdis – tuščiaviduris keturių kamerų raumeningas organas	Trys sluoksniai: *endokardas* – vidinis (iš epitelio), *miokardas* – vidurinis raumeninis, *epikardas* – išorinis (iš jungiamojo audinio)	Širdies susitraukimų ritmą ir jėgą reguliuoja centrinė nervų sistema ir hormonai, susitraukimai dėka ypatingų širdies raumens ląstelių jaudinimo ir impulsų perdavimo vyksta automatiškai
Kairė ir dešinė širdies pusės, du prieširdžiai	Skilvelio anga jungiasi su vožtuvu, į *dešinį* prieširdį patenka kraujas iš viršutinės ir apatinės tuščiųjų venų bei širdies vainikinių venų, į *kairįjį* – kraujas iš keturių plaučių venų	1–oji fazė: prieširdžių susitraukimas 2–oji fazė: susitraukdami abu skilveliai stumia kraują į aortą ir plaučių arteriją. Skilvelių susitraukimas vadinamas sistole
Skilveliai	*Dešinysis* – plaučių kamieno pradžioje, dvi veninio kraujo atšakos į kairįjį ir dešinįjį plaučius (mažasis apytakos ratas). *Kairysis* – kairiojo aortos lanko pradžia, arterinis kraujas teka į didįjį kraujotakos ratą	3–čioji fazė: sutartinis prieširdžių ir skilvelių atsipalaidavimas – diastolė (pauzė), prieširdžiai, po jų – skilveliai užsipildo veniniu krauju
Pusmėnuliniai vožtuvai		Uždaro aortos ir plaučių kamieno ertmes, praleidžia iš skilvelių kraują ir neleidžia jam tekėti atgal

85 lentelė. **Atramos ir judėjimo bei raumenų sistema**

ATRAMOS IR JUDĖJIMO SISTEMA atlieka vidaus organų apsaugos funkciją ir formuoja organizmo atramą (karkasą), užtikrina pastovią kūno formą, tam tikrą jo padėtį erdvėje, gebėjimą judėti. Judėjimą reguliuoja centrinė nervų sistema (sąlyginiai ir nesąlyginiai refleksai)

Sudedamosios dalys	Sandara	Funkcijos
Griaučiai: Galvos griaučiai	Kaulai, kremzlės, sąnariai, raiščiai Kaukolė: smegeninė dalis, arba smegenų dėžutė, veidinė dalis	 Smegenų dėžutė saugo galvos smegenis
Kūno griaučiai	Stuburas: slanksteliai – 7 kaklo, 12 krūtinės, 5 juosmens, 5 kryžmens, 4–5 stuburgalio	Formuoja 2 žmogui būdingus išlinkimus, slopinančius smūgius ir sukrėtimus

85 lentelė. **Atramos ir judėjimo bei raumenų sistema**

Sudedamosios dalys	Sandara	Funkcijos
	Krūtinės ląsta: krūtinkaulis, krūtinės slanksteliai, šonkauliai (12 porų)	Saugo vidaus organus, esančius krūtinės ertmėje. Dėka lanksčių jungčių tarp šonkaulių ir slankstelių geba judėti kvėpavimo metu
Galūnių griaučiai	Pečių lankas – pora mentės kaulų ir pora raktikaulių. Laisvosios galūnės (rankos) – žastas, dilbio kaulai (alkūnkaulis, stipinkaulis), riešas, plaštaka. Dubens lankas – dubuo. Laisvos galūnės (kojos) – šlaunikaulis, blauzdos kaulai (blauzdikaulis ir šeivikaulis), pėdos kaulai	Užtikrina fizinę veiklą ir judėjimą
Kaulai **Griaučių raumenys** – skersaruožiai: galvos, kūno, viršutinių ir apatinių galūnių. Lygieji raumenys	Sudaro kompaktinė (tankioji) ir akytoji kaulinė medžiaga. Pagal struktūrą: vamzdiniai, plokštieji, mišrūs, oriniai, akytkauliai. Pagal sujungimo tipą: ištisiniai (kaukolės kaulų siūlės), pusiau judrūs (kremzlinės jungtys – slankstelių, gaktikaulių), judrūs (sąnariai). Tvirtinasi prie griaučių kaulų; yra apie 400	Saugo vidaus organus nuo mechaninių pažeidimų, atlieka svirčių, judinamų raumenimis, funkcijas Lygieji raumenys įeina į tuščiavidurių vidaus organų sienelių sudėtį (virškinamasis traktas, trachėjos ir kt.)

86 lentelė. **Endokrininė sistema**

Šią sistemą sudaro vidaus sekrecijos liaukos, gaminančios ir išskiriančios į kraują biologiškai aktyvias medžiagas – hormonus. Ypatybės – veikia griežtai apibrėžtą apykaitos procesų tipą arba konkrečią ląstelių grupę

Liaukos	Sandara, buvimo vieta	Funkcijos
1	2	3
Hipofizė, hipotalamas	Apatinis smegenų priedas, pereinantis į hipotalamą ir sudarytas iš trijų dalių	*Priekinė dalis* reguliuoja lytinių liaukų funkcijas, antinksčių žievės veiklą, skydliaukę, išskiria augimo hormoną *Vidurinė dalis* reguliuoja odos pigmentaciją. *Užpakalinė dalis* reguliuoja vandens įsiurbimą iš pirminio šlapimo

86 lentelė. **Endokrininė sistema**

1	2	3
Skydliaukė ir prieskydinė liauka	Prieskydinė liauka yra prigludusi prie skydliaukės	Aktyvina ląstelės apykaitos procesus, reguliuoja jodo kiekį organizme: hormonas tiroksinas; prieskydinė – reguliuoja kalcio ir fosforo kiekį
Užkrūčio	Krūtinės srityje	Reguliuoja imuninius ir augimo procesus (hormonas timozinas), gamina limfocitus, veikiančius antikūnus gaminančius limfocitus
Antinksčiai	Sudaro žievė ir šerdinė dalis	Žievė gamina aldosteroną (Na^+, K^+ apykaita, vandenilio jonų sekrecija inkstų kanalėliuose), šerdinė dalis – adrenaliną, noradrenaliną
Kasa		Gamina insuliną (reguliuoja gliukozės kiekį kraujyje), gliukagoną (glikogeną skaido iki gliukozės)
Lytinės	Priešinė (prostatos), sėklidės (vyr.), kiaušidės (mot.)	Gamina testosteroną (vyr.), estrogeną, progesteroną (mot.)

87 lentelė. **Virškinimo sistema**

Užtikrina mechaninį ir cheminį maisto apdorojimą bei skaidymą liaukų fermentų dėka. Skaidymo produktai: aminorūgštys, gliukozė, glicerinas, riebalų rūgštys patenka į kraują ir limfą

Organai	Sandara	Funkcijos
Virškinamasis traktas: Burnos ertmė	Apačioje – **dugnas**, priekyje, išorėje, iš viršaus – **dantys**, **dantenos**, viršuje – kietasis ir minkštasis **gomurys**, užpakalinėje dalyje – **liežuvėlis**. **Liežuvį** sudaro skersaruožiai raumenys, jis padengtas gleivine	Atsiveria paausinės, paliežuvinės ir kitų smulkių liaukų kanalai; seilių liaukos išskiria seiles; seiles sudaro vanduo, organinės medžiagos (baltymas mucinas), fermentai: *ptialinas* – krakmolą skaido iki gliukozės; *maltazė* – maltozę skaido iki gliukozės
Ryklė	Ertmė ties virškinamojo trakto ir kvėpavimo takų riba	Jungia burnos ertmę su stemple
Stemplė	Raumeningas vamzdelis	Ja slenka maistas
Skrandis	Priekinė ir užpakalinė dalys, skrandžio kūnas, skrandžio dugnas	Skrandžio liaukos išskiria fermentus: pepsiną ir lipazę (skaido riebalus, pieną), druskos rūgštį, sultis (baltymai skyla iki peptidų)

87 lentelė. **Virškinimo sistema**

Organai	Sandara	Funkcijos
Plonosios žarnos	Dvylikapirštė, tuščioji ir klubinė	Atsiveria tulžies pūslės ir kasos latakai. Išskiria žarnyno sultis. Baigiamas virškinimas
Storoji žarna	Akloji (su kirmėline atauga), gaubiančioji (į ją atsiveria klubinė), tiesioji (baigiasi analine anga)	Liaukos išskiria sekretą
Kepenys	Yra po diafragma dešinėje pusėje, susideda iš dviejų nevienodo dydžio dalių, kepenų apatiniame paviršiuje yra tulžies pūslė, kepenų latakas, kartu su tulžies pūslės lataku formuojantis tulžies lataką	Sekrecinės kepenų ląstelės gamina **tulžį**. Funkcija – apsauginė (žvaigždiškosios ląstelės pasižymi fagocitinėmis savybėmis), nukenksmina nuodingas medžiagas – irimo produktus (vykstant puvimui storajame žarnyne); kaupia glikogeną (gyvūninį krakmolą) ir skaido jį iki gliukozės; sintetina baltymus – fibrinogeną, protrombiną (krešant kraujui)
Kasa	Pailgos formos korytos struktūros organas	Gamina kasos sultis, dvylikapirštėje žarnoje skaidančias baltymus, riebalus, angliavandenius

88 lentelė. **Šalinimo sistema**

Šalina organinių medžiagų skilimo produktus (vandenį, druskas, šlapimą), susidariusius disimiliacijos, katabolizmo metu

Organai	Sandara	Funkcijos
Inkstai	Du sluoksniai: *išorinis* (žievė), sudarytas iš filtruojančių vienetų – nefronų; *vidinis* (šerdis), kurį sudaro inkstų surenkamieji kanalėliai, einantys į inkstų geldelę **Nefrono** sudėtyje yra **Baumano kapsulė**, susidedanti iš Malpigijaus kūnelių (kapiliarų kilpų)	Kraujo plazmos valymas nuo organinių medžiagų skilimo produktų, kraujo plazmos ir tarpląstelinio skysčio sudėties pastovumo užtikrinimas 1 fazė – *pirminio šlapimo* formavimas kapsulėje; 2 fazė – vandens ir kai kurių medžiagų išsiurbimas iš pirminio šlapimo – *antrinio šlapimo* gamyba
Šlapimtakiai Šlapimo pūslė Šlapimkanalis	Iš inkstų geldelių eina į šlapimo pūslę	Antrinio šlapimo šalinimas iš organizmo

89 lentelė. **Lytinė (dauginimosi) sistema**

Atlieka reprodukcinę (palikuonių gimdymo) funkciją

Organai	Sandara	Funkcijos
Vyriški	*Vidiniai:* lytinės liaukos – sėklidės, sėklidės prielipai	Spermatozoidų gamyba ir kaupimas
	Priešinė liauka	Prostoglandino, reguliuojančio medžiagų apykaitą ląstelėje, gamyba
	Kuperio liaukos	Hormono testosterono gamyba
	Išoriniai: varpa, kapšelis	
Moteriški	*Vidiniai:* lytinės liaukos (kiaušidės), makštis, gimda, kiaušintakiai	Kiaušialąsčių, lytinių hormonų gamyba
	Išoriniai: didžiosios ir mažosios lytinės lūpos, klitoris	Apsauginė

90 lentelė. **Kvėpavimo sistema**

Reguliuoja organinių medžiagų skaidymui reikalingo deguonies *patekimą* į organizmą iš aplinkos ir anglies dioksido *šalinimą* (dujų apykaitą tarp organizmo ir aplinkos)

Organai	Sandara	Funkcijos
Nosies ertmė	Šnervės, nosies kremzlinė ir kaulinė pertvara, gleivinė, uodžiamieji plaukeliai – uoslės nervų galūnės	Oro praleidimas, jo termoreguliacija, valymas
Nosiaryklė, ryklė, gerklos	Kremzlės, paliežuvinis aparatas, balso stygos ir raumenys	Oro srauto stūmimas, garsų formavimas
Trachėja	Kremzliniai pusžiedžiai	Sutvirtina trachėjos sieneles
Du bronchai Bronchų medis Alveolės	 Sudaro bronchiolės. Plonasienės pūslelės, gaubiamos kapiliarų	Dujų apykaita
Plaučiai: kairysis – dvi dalys, dešinysis – trys dalys	Broncho anga, plaučių arterija, plaučių venos, nervai, pleura: vidinis ir išorinis sluoksniai	Dengia plaučius, iškloja vidinį krūtinės ląstos paviršių
	Pleuros ertmė, užpildyta skysčiu	Mažina trintį kvėpavimo metu

91 lentelė. **Klausa**

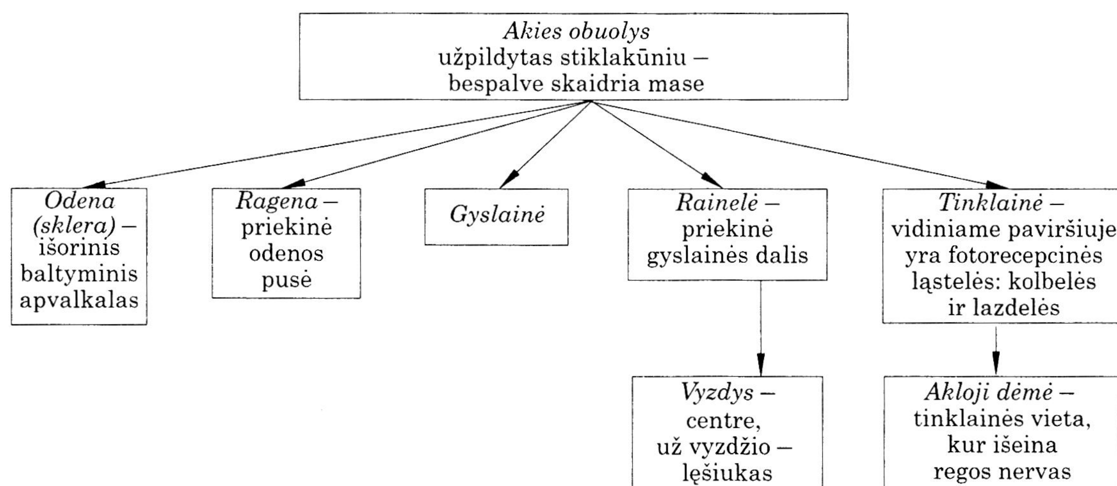
Leidžia girdėti garsą esant 20–20 000 Hz dažniui; didžiausias klausos jautrumas – 2000–4000 Hz intervale

Organai	Sandara	Funkcijos
Ausis	Išorinė – ausies kaušelis, išorinė ausies landa	Garso šaltinio nustatymas.
	Vidurinė – Eustachijaus vamzdis, klausos kauleliai: plaktukas, priekalas, kilpelė. Vidinė – ausies labirintas, sudarytas iš kanalų ir ertmių	Svertų sistema, oro virpesius paverčianti vidinės ausies skysčio virpesiais. Virpesių perdavimo sistema: 1. Ovaliojo langelio membrana 2. Skystis pusratiniuose kanaluose 3. Tampri sraigės membrana 4. Receptorinės (plaukuotosios) ląstelės 5. Dengiamoji membrana Impulsas
Vestibulinis aparatas	Labirintas – pusratiniai kanalai, otolitiniai organai: du maišeliai (apvalusis ir pailgasis)	Receptorinių (plaukuotųjų) ląstelių judėjimas keičiantis galvos padėčiai informuoja apie judėjimo pasikeitimus, padėtį erdvėje

Labirinto sandara: sraigė – spirale susuktas vamzdelis, sudarytas iš trijų skysčiu užpildytų kanalų, ovaliojo ir apvaliojo langelių, dviejų membranų (pagrindinės ir dengiamosios); ant pagrindinės membranos išsidėstęs Kortijaus organas su receptorinėmis ląstelėmis.

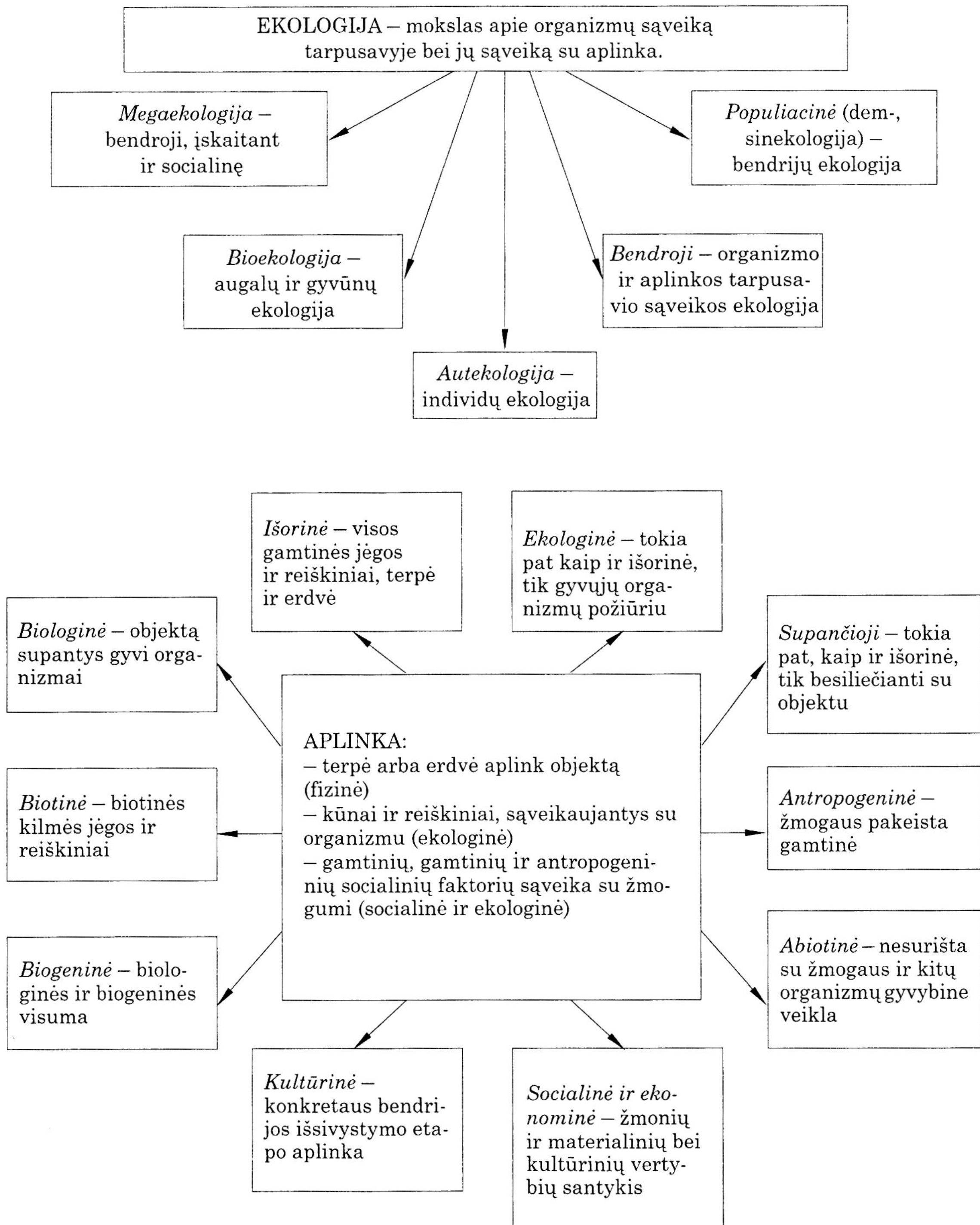
92 lentelė. **Rega**

Gebėjimas matyti šviesą, objektų ryškumą, dydį, formą, įvertinti nuotolį

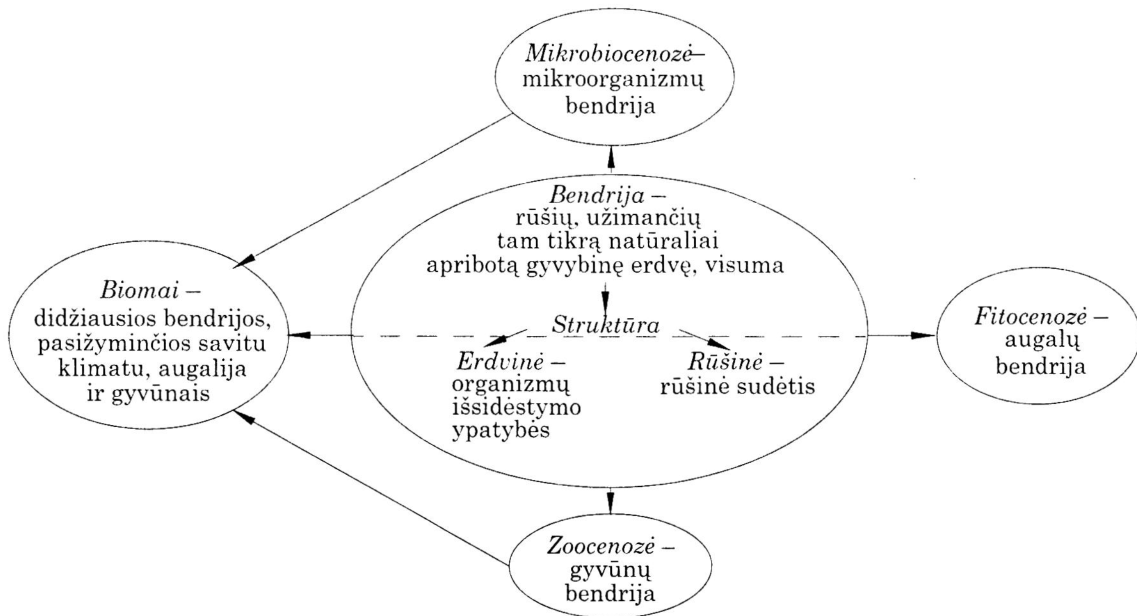


EKOLOGIJOS PAGRINDAI

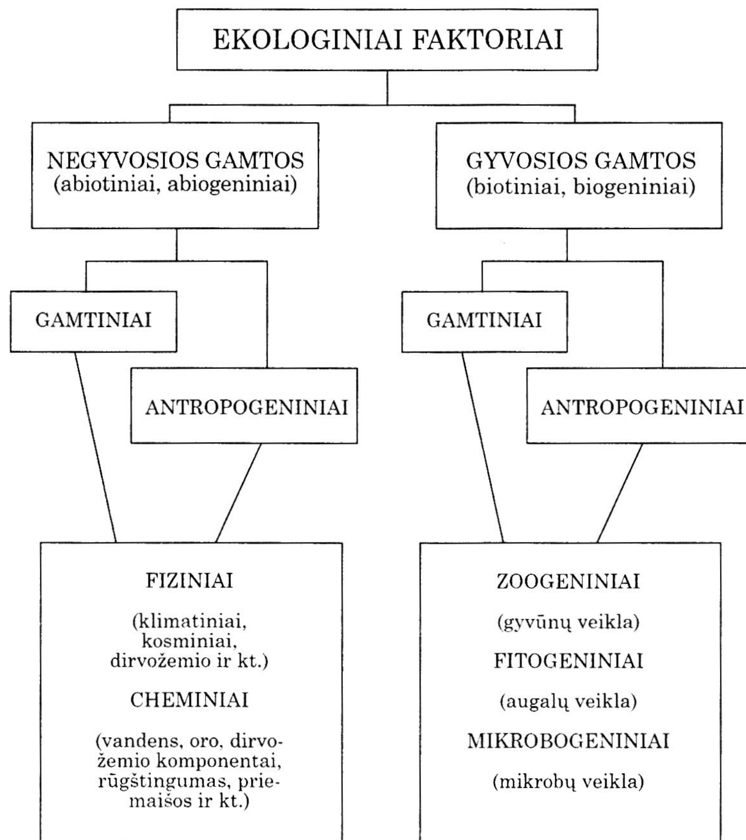
38 schema. **Ekologija**



39 schema. **Bendrijų sąveika**



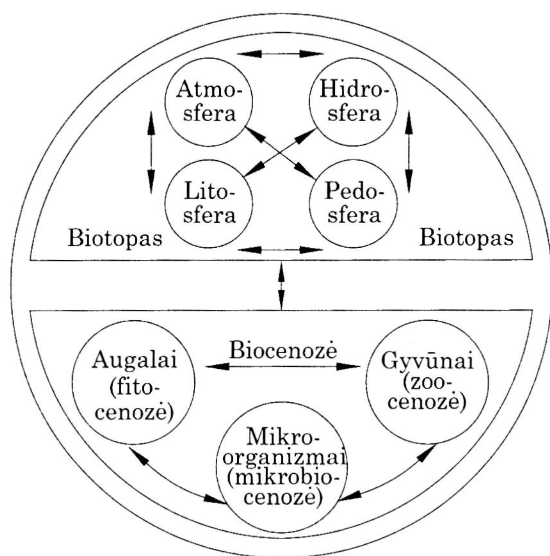
40 schema. **Ekologinių faktorių klasifikacija**



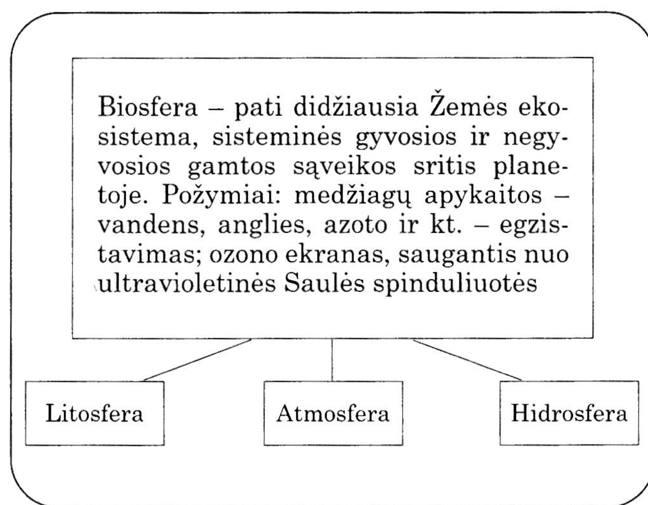
93 lentelė. **Resursai – materialinės naudos ištekliai arba prielaidos jai pasiekti**

Biologiniai	Ekologiniai	Gamtiniai	Antropo–ekologiniai	Genetiniai	Maisto produktų	Ekologinės pusiausvyros
Gyvosios gamtos objektų ištekliai arba prielaidos juos gauti. Visi gyvieji aplinką formuojantys biosferos komponentai	Užtikrina biosferos ekologinę pusiausvyrą	Gamtiniai objektai ir reiškiniai, palaikantys ir gerinantys žmogaus egzistavimo sąlygas: atsistatantys ir neatsistatantys, atnaujinami ir neatnaujinami, pakeičiami ir nepakeičiami	Daiktai, reiškiniai, sąlygos ir faktoriai, būtini žmonijos egzistavimui	Biotos rūšių visuma – gyvų būtybių genetinio kodo genetinė informacija	Resursai, tinkami naudoti kaip maistas	Komponentai, sudarantys sąlygas funkcinei ar teritorinei ekologinei pusiausvyrai

41 schema. **Biogeocenozės schema pagal V. Sukačiovą, 1964 m**



42 schema. **Noosfera – „proto sfera“, „mąstantis apvalkalas“ pagal V. Vernadskį**



94 lentelė. **Pagrindinės ekologinės struktūros**

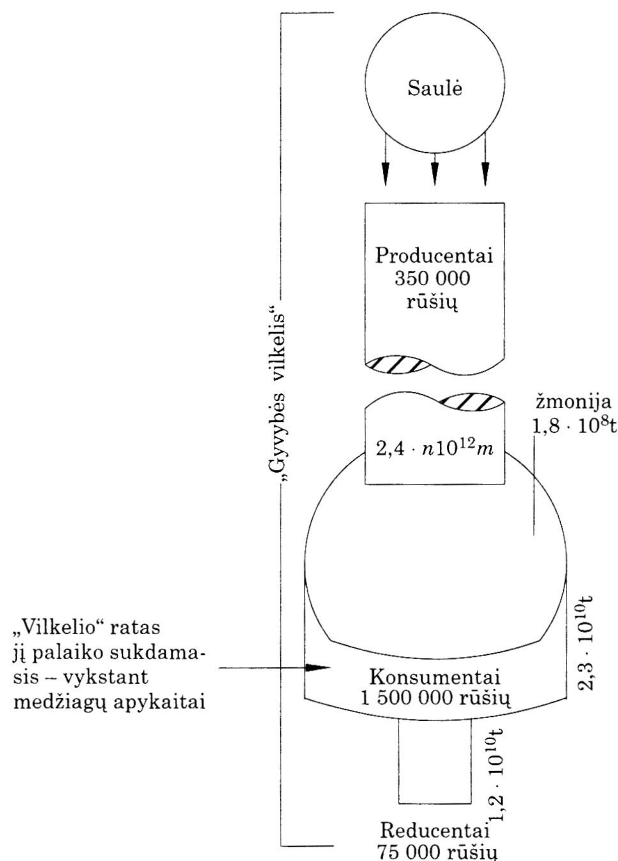
Pavadinimas	Charakteristika, dėsningumai
Biocenozė (cenozė)	**Organizmų**, užimančių sąlygiškai vienalytį plotą (tvenkinį, ąžuolyną ir kt.), **visuma**. Pasižymi tam tikrais organizmų tarpusavio santykiais, jų prisitaikymu prie biotopo, biomase, biologiniu produktyvumu; **dėsningumai** pasireiškia rūšinės įvairovės augimu, mitybinių grandinių sudėtingėjimu, naudingų tarpusavio ryšių stiprėjimu ir kt.

94 lentelė. **Pagrindinės ekologinės struktūros**

Pavadinimas	Charakteristika, dėsningumai
Agrocenozė	Žemės ūkio paskirties žemės **biocenozė**; nuo gamtinių bendrijų *skiriasi* mažesne rūšine įvairove ir aukštu konkurentabilumu
Agroekosistema	Suplanuota teritorija, skirta gauti žemės ūkio produkcijai, grąžinant pastarosios dalį atgal į laukus
Biogeocenozė	Vienarūšių gamtinių elementų tam tikrame Žemės paviršiaus plote visuma (pagal V. Sukačiovą)

43 schema. Ekologinė piramidė (biomasės piramidė)

Ekologinė piramidė: grafinis producentų, konsumentų ir reducentų sąveikos ekosistemoje atvaizdas. Išreiškiama: masės vienetais (gyva biomasė – biomasės piramidė); individų skaičiumi (Eltono skaičių piramidė), individuose sukaupta energija (energijos piramidė)



Piramidės augalai nukreipti į saulę

Anglų kalba

PLURAL

Daiktavardžių daugiskaita

BENDROJI TAISYKLĖ

ONE – VIENAS		SOME – KELI, KELETAS		
po dusliųjų priebalsių: cat + s = cats				
cat	katė	cats	katės	[s]
cup	puodukas	cups	puodukai	
duck	antis	ducks	antys	
po skardžiųjų priebalsių ir balsių: boy + s = boys				
boy	berniukas	boys	berniukai	[z]
son	sūnus	sons	sūnūs	
girl	mergaitė	girls	mergaitės	
name	vardas	names	vardai	
dog	šuo	dogs	šunys	
visitor	svečias	visitors	svečiai	
po žvarbiųjų ir švilpiamųjų priebalsių: [z], [s], [dʒ], [tʃ], [ʒ], [ʃ] page + s = pages				
page	puslapis	pages	puslapiai	[ɪz]
place	vieta	places	vietos	
vase	vaza	vases	vazos	
po -s, -ss, -z, -x, -ch, -sh: bus + es = buses				
glass	stiklinė	glasses	stiklinės	[ɪz]
box	dėžutė	boxes	dėžutės	
match	degtukas	matches	degtukai	

PLURAL

IŠIMTYS I

ONE – VIENAS		SOME – KELI, KELETAS	
keičiama balsė			
man	vyras, žmogus	men	vyrai, žmonės
woman	moteris	women	moterys
mouse	pelė	mice	pelės
foot	(kojos) pėda	feet	(kojų) pėdos
tooth	dantis	teeth	dantys
pridedama -(r)en			
child	vaikas	children	vaikai
-f [f] keičiamas į -ves [vz]			
half	pusė	halves	pusės
knife	peilis	knives	peiliai
leaf	lapas	leaves	lapai
loaf	kepalas	loaves	kepalai
-th [θ] keičiamas į -ths [ðz]			
mouth	burna	mouths	burnos
path	takas	paths	takai
-se [s] keičiamas į -ses [zɪz]			
house	namas	houses	namai
nekeičiama			
sheep	avis	sheep	avys
fish	žuvis	fish	žuvys
deer	elnias	deer	elniai
one hundred	šimtas	two hundred	du šimtai
Chinese	kinas	Chinese	kinai
Swiss	šveicaras	Swiss	šveicarai

PLURAL

IŠIMTYS II

ONLY PLURAL

1. People, police There aren't many **people** here.	**Žmonės (tauta), policija** Čia maža žmonių.
2. Tools and clothes scissors, glasses, pyjamas, shorts, trousers Are these your glasses? These shorts are too dirty. (three pairs of trousers)	**Įrankiai ir drabužiai, sudaryti iš dviejų dalių** žirklės, akiniai, pižama, šortai (puskelnės), kelnės Ar tai tavo akiniai? Tie šortai labai jau nešvarūs. (trejos kelnės)
3. Clothes, contents, goods, regards, stairs, thanks These clothes are very old-fashioned.	**Kai kurie žodžiai, kurie baigiasi -s** Tie drabužiai labai jau senamadiški.
But: athletics, billiards, economics, physics, news	***Išimtys:*** kai kurios sporto, žaidimų rūšys, studijų pavadinimai, žodis „naujienos“
Physics is my favourite subject. No news is good news.	Fizika – mano mėgstamas dalykas. Nėra naujienų – gera naujiena.

COMPOUND NOUNS
DAIKTAVARDŽIŲ DŪRINIAI

book + shop = bookshop

Singular	Plural
bookshop spoonful	Keičiama antroji dalis: book<u>shops</u> spoon<u>fuls</u>
But: brother-in-law woman driver	brother<u>s</u>-in-law wom<u>e</u>n driver<u>s</u>

COUNTABLE – UNCOUNTABLE NOUNS

Daugiskaitiniai ir vienaskaitiniai daiktavardžiai

COUNTABLE	
Singular	**Plural**
a dog a cap a man	dogs caps men

UNCOUNTABLE	
1. Only singular 2. Nežymimasis artikelis **a/an** nevartojamas	
valgis bread, cheese, butter, chicken, pork, fruit	This **cheese** is rather old. Šis sūris jau nešviežias.
medžiaga soap, snow, water, tea, coffee, milk, air	**Snow** is white. Sniegas yra baltas.
daromoji medžiaga cotton, iron, wood, wool	The box is made of **wood**. Dėžutė yra padaryta iš medžio.
abstrakčiosios sąvokos hope, love, luck, time, advice, information, news, progress	Your **advice** is not very good. Tavo patarimas nelabai geras.
apibendrinamieji žodžiai baggage, furniture, rubbish, hair, noise, traffic, music	His **baggage** is in the car. Jo bagažas automobilyje.

UNCOUNTABLE	COUNTABLE
glass – stiklas (daromoji medžiaga) some cake – tortas (gaminys) hair – plaukai paper – popierius	two glasses – dvi stiklinės a cake – vienas tortas a hair – plaukas two papers – du laikraščiai

POSSESSIVE CASE OF NOUNS

Savybinis daiktavardžių linksnis

DARYBA

+ 's	
John Smith the cat women child	John Smith's friends the cat's dinner women's work child's toy
the boys the Smiths	the boys' bags the Smiths' address
But: the back **of** the TV set the pages **of** a book the key **to** the front door	 a television programme a bookshelf the front door key

VARTOSENA

1. People, countries, animals Bob's shirt is red. My dog's ears are like silk.	**Priklausomybė** Bobo marškiniai yra raudoni. Mano šuns ausys kaip šilkas.
2. Time (minute, hour, day, month, year) I leave in an hour's time. We've got two weeks' holiday.	**Laiko tarpas** Aš išeisiu po valandos. Mes turime dviejų savaičių atostogas.
3. Place I must go to the **dentist's**. Mum always buys meat at the **butcher's**.	**Nenurodant vietos** Turiu eiti pas dantų gydytoją. Mama visada perka mėsą iš mėsininko (parduotuvės).

A/AN

Nežymimasis artikelis

Prieš priebalsę	Prieš balsę
a doctor **a** picture	**an** actor **an** ugly picture **an** hour*

* Raidė **h** čia netariama.

A/AN vartojami **tik** prieš daugiskaitinius daiktavardžius **vienaskaitos prasme**.

A/AN

Nežymimasis artikelis

VARTOSENA

1. My father is **a** teacher.	Mano tėvas – mokytojas. (turima omenyje profesija)
2. I'm looking for **a** boy to help me with my work.	Man reikia berniuko, kuris padėtų man dirbti. (bet kurio berniuko)
3. Once we had **a** dog. Every day **the** dog ate...	Kažkada turėjome tokį šunį. Kasdien tas šuo ėsdavo...(pirmą kartą – **a**, toliau – **the**)
4. We stayed in London for **a** week (a month and a half).	Mes (pra)buvome Londone savaitę (pusantro mėnesio).
5. **a** half, **a** third, **a** couple, **a** dozen, **a** hundred, **a** million	pusė, trečdalis, pora, tuzinas, šimtas, milijonas
6. once **a** day twice **a** week three times **a** year	vieną kartą per dieną dukart per savaitę triskart per metus
7. **a** piece of cake **a** cup of tea	gabalėlis pyrago arbatos puodelis

THE

Žymimasis artikelis

TARTIS

the cat [ðəˈkæt] **the eggs [ðɪˈegz]**

VARTOSENA

1. Where's **the cat**?	Kur **katė**? (yra žinoma, kokia katė)
2. **The Earth** moves round **the Sun**. (the sea, the stars, the sky, the future)	**Žemė** sukasi apie **Saulę**. (Žemė ir Saulė yra vienintelės pasaulyje)
3. **The girls** <u>sitting over there</u> are my sisters.	**Mergaitės**, <u>sėdinčios ana ten</u>, yra mano seserys.
4. They have <u>a son</u>. **The son** is working as an engineer.	Jie turi <u>sūnų</u>. **Tas sūnus** dirba inžinieriumi. (apie sūnų jau buvo sakyta)
5. When is **the first** bus to London tomorrow? (the same, the only, the best)	Kada **pirmasis** autobusas išvyks į Londoną?
6. What's on **the radio** this evening? (on the television = on television)	Kas bus transliuojama per **radiją** šįvakar?
7. **The Russians** are very keen on football. (the rich, the police, the elephant, the violin)	**Rusai** labai mėgsta futbolą. (kalbama apie rusus apskritai)

THE

VARTOSENA

Atvejai, kai artikelis *the* praleidžiamas			
1. Bendrieji teiginiai			
Water contains **oxygen.** (bet koks vanduo) Do you like music or history? (muzika/istorija apskritai) Children like games. (visi vaikai, visokie žaidimai)			
2. Žinomi žmonės			
President Kennedy, Admiral Nelson			
3. Žemynų pavadinimai			
Asia, Africa, Europe, South America, Central Africa ***But:*** the Arctic, the Antarctic			
4. Šalių, kalnų, ežerų pavadinimai (vienžodžiai)			
Spain, France, China, Russia, Greece, mount Everest, Lake Baikal, Texas ***But:*** The Netherlands, the USA, the Red Sea, the Pacific Ocean, the Baikal, the Volga			
5. Miesto aikščių, gatvių ir pan. pavadinimai			
Times Square, London Bridge, Oxford Street, White Road			
6. Kai kurie posakiai (veiksmažodis + daiktavardis)			
have breakfast – pusryčiauti shake hands – paspausti rankas			
7. Kai kurie laiko apibūdinimai			
at night by day/night before sunrise after sunset	at noon before midday after midnight	Morning came. Night fell. It's spring.	
But: in the morning, during the night, the next day			
8. Kai kurie žodžių junginiai (prielinksnis + daiktav.)			
for example on time day by day	in turn on top (of) eye to eye	in line (with) hand in hand side by side	
9. Keliavimo būdas go/travel			
by air on foot	by bicycle on horseback	by bus by plane	by car
10. *Go to school* pobūdžio junginiai			
go to / be in: bed, class, hospital, town ***But:*** in **a** hospital in Montreal go to / be at: church, school, sea, work			
11. Laikraščių straipsnių pavadinimai, reklaminiai skelbimai			
POLICE SEEK MAN IN BLUE TROUSERS			

THIS, THAT

šis, tas

this (plural **these**) – šis, ši

that (plural **those**) – tas, anas (tie, anie)

this/these	1. **this** chair – ši(ta) kėdė **these** bananas – ie (šitie) bananai (tie daiktai netoli nuo manęs) 2. **this** morning – šįryt **this** week – šią savaitę **this** Friday – šį penktadienį **this** year – šiais metais 3. **this** street – ši gatvė **these** houses – šie namai (tai mano artimiausioji aplinka)
that/those	1. **that** chair over **there** – ana ta kėdė (šie daiktai toli nuo manęs) 2. **those** old films – tie senieji filmai **at that** time – tuomet **in those** days – tomis dienomis (tai buvo kažkada seniai)

VARTOSENA

Kaip atskiri įvardžiai	
Hello! Who's **that?** – Hello, Bob. **This** is Mary. What's **this? That**'s funny. Who did **that?**	Sveikas! Kas kalba? – Sveikas, Bobai. Čia Meri. Kas tai? Tai juokinga. Kas tai padarė?
Drauge su įvardžiu *one*	
Which is your pencil? – **This** one. What book do you want? – **That** one.	Kuris pieštukas tavo? – **Šis**. Kokios knygos tu nori? – **Tos**.

NO/NONE, SOME, ALL

Nė kiek, šiek tiek, visa

	Countable	Uncountable	Count/Uncount
nė kiek	no/none	no/none	no/none
truputį, šiek tiek	a few	a little/a bit	
keletas	some	some (any)	some/any
daug	many	much	a lot
visi, visa	every, each; all, whole	all	all

NO/NONE

Nė kiek, niekas, joks

NO = NOT... ANY...	
I need **no** help.	I don't need any help.
I've got **no** money to give you.	I haven't got any money to give you.

Singular Countable Nouns	Plural Nouns	Uncountable Nouns
no book	no books	no cheese

NONE	
None of us speaks English.	**Niekas** iš mūsų nemoka angliškai.
How many new videos have you got? – **None**.	Kiek turi naujų vaizdajuosčių? – **Nė kiek**. (Jokių)

A FEW, A LITTLE

Nedaug, maža(i)

Countable	Uncountable
There are **a few** boys in the garden. There aren't **many** boys in the garden. Sode **mažai** berniukų.	There's **a little** salt on the table. There isn't **much** salt on the table. Ant stalo **maža** druskos.
Would you like some sweets? – Yes, only **a few**. Nori saldainių? – Taip, **truputį**.	How much money do you have? – Only **a little**. Kiek turi pinigų? – **Mažai**.
Only **a few** of these books are mine. Tik **keletas** šių knygų mano.	I'd like **a little of** this cake. Norėčiau **šiek tiek** šio torto.
a few days, **a few** miles **keletas** dienų, **kelios** mylios	She eats **a little**. Ji **nedaug** tevalgo.

A BIT (OF)

Nedaug, mažai, truputį

a bit of wood = **a little of** wood   ***But:*** **a drop of** water (skystis)

Do you have any string? I need **a bit**.	Gal turi virvutę? Man reikia **truputį**.
I've got **a bit of** news (peace, advice, fun).	Turiu naujienų. (su abstrakčiaisiais daiktavardžiais)
My leg still hurts **a bit**. I'm **a bit** tired.	Man **truputį** skauda koją. Aš **kiek** pavargau.
Would you like something to eat? – No, thanks. I'm not **a bit** hungry.	Nori ko (nors) užvalgyti? – Ne, ačiū. Aš visai ne alkanas.

SOME, ANY

Keli, keletas

VARTOSENA

	Countable	Uncountable
+	There are **some** toys in the box. Dėžutėje yra žaislų.	There is **some** salt on the table. Ant stalo yra druskos.
?	Are there **any** balls in the box? Ar kamuolių yra dėžutėje?	Is there **any** salt on the table? Ar druskos yra ant stalo?
–	No, there aren't **any** girls in the garden. Ne, sode nėra (jokių) mergaičių. (There are no girls...)	No, there isn't **any** salt on the table. Ne, ant stalo nėra jokios druskos. (There is no salt...)

SOME	
1. I need **some** pencils. Give me **some** sugar.	Man reikia pieštukų. Duok man cukraus.
2. Did you buy **some** (**any**) sugar?	Tu nupirkai cukraus? (manau, kad nupirkai)
3. Would you like **some** more coffee? Will you have **some** cake?	Nori dar kavos? Imsi dar torto? (manau, kad neatsisakysi)
4. Can I have **some** milk, please? Could you lend me **some** money?	Ar galėčiau paprašyti dar pieno? (prašymas) Ar negalėtum paskolinti man šiek tiek pinigų?
5. **Some** boys like sports, and **some** boys like watching TV.	Vieni berniukai mėgsta sportą, kiti – žiūrėti televizorių.
ANY	
1. There isn't **any** coffee left.	Kavos visiškai neliko.
2. Are there **any** toys in the box?	Ar dėžutėje yra kamuolių? (iš anksto atsakymo nežinau)
3. **Any** dictionary is better than none.	Geriau turėti bet kokį žodyną negu jokio.

MUCH, A LOT (OF), MANY

Daug

VARTOSENA

	Countable	Uncountable
+	There are so **many** boys in the garden, that... (with *as, so, too*) Sode tiek (**daug**) berniukų, kad...	There is so **much** salt in the soup that... (with as, so, too) Sriuboje tiek (**daug**) druskos, kad...
?	**How many** friends have you got? Kiek turi draugų? Have you got **many** friends? Ar turi **daug** draugų?	**How much** money have you got? Kiek turi pinigų? Have you got **much** money? Ar turi **daug** pinigų?
–	There aren't **many** boys in the class. Klasėje **mažai** berniukų.	Bob doesn't say **much**. Bobas **mažai** kalba.

A LOT OF (LOTS OF)		
	Countable	**Uncountable**
+	There were **a lot of (lots of)** cars on the road. Kelyje buvo **daug** mašinų. ***Not:*** ...**many** cars...	There was **a lot of (lots of)** traffic on the road. Judėjimas kelyje buvo **labai didelis**. ***Not:*** ...**much** traffic...
?	Have you got **a lot of (lots of)** friends? – Yes, **lots.** Ar turi **daug** draugų? – Taip, **daug**.	Have you got **a lot of (lots of)** money? – Yes, **lots**. Ar turi **daug** pinigų? – Taip, **daug**.
–	I haven't got **a lot of (lots of)** friends. Aš turiu **mažai** draugų. ***Geriau:*** I haven't got **many** friends.	I haven't got **a lot of (lots of)** money. Aš turiu **mažai** pinigų. ***Geriau:*** I haven't got **much** money.

A LOT (LOTS)	
Lucy reads **a lot**.	Liusė **daug** skaito.
Bob was ill yesterday. Today he's feeling **lots** better.	Vakar Bobas sirgo. Šiandien jis jaučiasi **daug** geriau.

ALL/WHOLE, EVERY, EACH

Visas/visi, kiekvienas/visi

All/Whole	Every	Each
the **whole** book the **whole** of the class (**all** the class)	**every** day, **every** time **every** boy	**each** house **each** girl
all (of) the books **all (of)** our friends	**every** one of the books **everyone/everybody**	**each** of two books **each** of my socks
all (of) the cake **all (of)** that soup		
all of them (3 ir daugiau)	**every one of them** (3 ir daugiau)	**each** of them (2)

BOTH, EITHER, NEITHER

Abu, vienas iš dviejų, nė vienas iš dviejų

Both	Either	Neither
	either road	**neither** road
both (of) the roads **both (of)** his parents	**either of** the roads **either of** two boys	**neither of** the roads
both of them	**either of** them	**neither of** them

Both	
We **both** like pop music.	Mudu abu mėgstame popmuziką.
My neighbour has two cats. I like them **both** (both of them).	Mano kaimynas turi dvi kates. Man patinka abi.

Either	
Which hat do you prefer? – I don't like **either** of them.	Kuri skrybėlaitė tau labiau patinka? – Nė viena iš jų.
Both roads lead to the theatre. Take **either one**. You can take **either**.	Abu keliai eina į teatrą. Rinkis kurį nors.

BOTH, EITHER, NEITHER

Abu, vienas iš dviejų, nė vienas iš dviejų

Neither = not either	
I don't like Ann. **Neither** does Bob. Bob doesn't, **either**. **(*Not:*** Neither doesn't Bob.)	Man Anė nepatinka. Ir Bobui ji nepatinka.
I can't play chess. **Neither** can my wife. My wife can't, **either**. **(*Not:*** Neither can't my wife.)	Aš nemoku žaisti šachmatais. Ir mano žmona nemoka.
I've got two white shirts, but I don't like **either** of them.	Turiu dvejus baltus baltinius, bet abeji man nepatinka.

Both ... and, either ... or, neither ... nor	
Both Bob **and** Mary like watching TV.	Ir Bobas, ir Merė mėgsta žiūrėti televizorių.
You can have **either** a dog **or** a cat.	Gali laikyti namuose arba šunį, arba katę.
Neither Bob **nor** Mary went to school yesterday.	Nei Bobas, nei Merė nenuėjo vakar į mokyklą.

NATIONALITIES

TAUTYBĖS

country	adjective	a citizen	the people
America Russia	Americ**an** Russi**an***	an Americ**an** a Russi**an**	the Americ**ans** the Russi**ans**
China Japan	Chin**ese*** Japan**ese***	a Chin**ese** a Japan**ese**	the Chin**ese** the Japan**ese**
Greece Switzerland	Greek* Swiss	a Greek a Swiss	the Greeks the Swiss
Britain Poland Sweden Spain	Brit**ish** Pol**ish*** Swed**ish*** Span**ish***	a Brit**ish** a Pole a Swede a Span**ish**	the Brit**ish** the Poles the Swedes the Span**ish**
England France Ireland	English* French* Irish	an English**man** a French**man** an Irish**man** (add man or woman)	the English the French the Irish

* Sutampa su kalbos pavadinimu.

DEGREES OF COMPARISON OF ADJECTIVES

Būdvardžių laipsniavimas

This apple is as **big** as that one. Šis obuolys toks pat didelis, kaip ir anas. Ann is as **tired** as me. Anė tokia pat pavargusi, kaip ir aš.	This apple is **bigger** than that one. Šis obuolys didesnis už aną. Ann is more **tired** than me. Anė pavargusi daugiau negu aš.	This apple is the **biggest** of them all. Šis obuolys didžiausias iš visų. Ann is the **most tired** in the class. Anė pavargo daugiausia iš visų klasėje.

DARYBA

rich brave sad (vienskiemeniai būdv.)	rich**er** brav**er** sadd**er**	rich**est** brav**est** sadd**est**
simple clever easy (dviskiemeniai būdv. su galūnėmis -in -le, -y, -er, -ow)	simpl**er** clever**er** easi**er**	simpl**est** clever**est** easi**est**
difficult polite	**more** difficult **more** polite	**most** difficult **most** polite
bored tired	**more** bored **more** tired	**most** bored **most** tired
Būdvardžiai **left, single, absent, wooden... nelaipsniuojami**.		

DEGREES OF COMPARISON OF ADJECTIVES

IŠIMTYS

bad ill	worse	worst
far	farther further	farthest furthest
good well	better	best
little	less	least
much/many	more	most

BŪDVARDŽIŲ EILĖS TVARKA

quality	size	age/heat	shape	colour	origin	material
nice dirty beautiful	big tall light	old cold hot	square round	red black dark	French Indian medical	metal plastic nylon
a beautiful blonde French girl				an interesting new English book		

DEGREES OF COMPARISON OF ADVERBS

Prieveiksmių laipsniavimas

slow → slow**ly**

slow**ly** dangerous**ly**	**more/less** slow**ly** **more/less** dangerous**ly**	**most/least** slow**ly** **most/least** dangerous**ly**

Bob runs **fast**.	Bob runs **faster** than Tom.	Bob runs **fastest** of them all.

(adv. = adj.)

1. early	earlier	earliest
2. fast	faster	fastest
3. late	later	latest
4. hard	harder	hardest
5. high	higher	highest
6. low	lower	lowest
7. long (time)	longer	longest
8. loud (loud**ly**)	louder (**more** loudly)	loudest (**most** loudly)

DARYBA

1. soon	soon**er**	soon**est**
2. near	near**er**	near**est**

IŠIMTYS

1. well	better	best
2. badly	worse	worst
3. far	further	furthest
4. much	more	most
5. little	lest	least

PRIEVEIKSMIŲ VIETA SAKINYJE

1. **Every month** we go to the theatre. (sakinio pradžioje)
2. I **often** <u>play</u> football. (sakinio viduryje)
3. He <u>is</u> **really** a good football player. (po **to be**)
4. She plays the piano **very well.** (sakinio gale)
5. Who goes to the cinema? – <u>Peter</u> **often** does. (trumpas atsakymas)

NUMBERS AND FRACTIONS

Skaičiai ir trupmenos

1	one	1st	first		
2	two	2nd	second	1/2	a half
3	three	3rd	third	1/3	a third
4	four	4th	four**th**	1/4	a four**th**
5	five	5th	fif**th**	1/5	a fif**th**
6	six	6th	six**th**	1/6	a six**th**
7	seven	7th	seven**th**	1/7	a seven**th**
8	eight	8th	eigh**th**	1/8	an eigh**th**
9	nine	9th	nin**th**	1/9	a nin**th**
10	ten	10th	ten**th**	1/10	a ten**th**
11	eleven	11th	eleven**th**	1/11	an eleven**th**
12	twelve	12th	twelf**th**	1/12	a twelf**th**
13	thirteen	13th	thirteen**th**	1/13	a thirteen**th**
14	fourteen	14th	fourteen**th**	1/14	a fourteen**th**
15	fifteen	15th	fifteen**th**	1/15	a fifteen**th**
16	sixteen	16th	sixteen**th**	1/16	a sixteen**th**
17	seventeen	17th	seventeen**th**	1/17	a seventeen**th**
18	eighteen	18th	eighteen**th**	1/18	an eighteen**th**
19	nineteen	19th	nineteen**th**	1/19	a nineteen**th**
20	twenty	20th	twentie**th**	1/20	a twentie**th**
21	twenty-one	21st	twenty-first	1/21	a twenty-first
30	thirty	30th	thirt**ieth**	1/30	a thirt**ieth**
31	thirty-one	31st	thirty-first	1/31	a thirty-first

101 a hundred **and** one
203 two hundred **and** three
432 four hundred **and** thirty-two
1736 a/one thousand seven hundred **and** thirty-six
60 000 sixty thousand
500 000 five hundred thousand
1 000 000 a million

NUMBERS AND FRACTIONS

Skaičiai ir trupmenos

couple = 2 **dozen** = 12 **score** = 20
(a couple of days = a few days)

several hundred men	hundreds of people
a thousand pages	many thousands of books
half a million	millions and millions of stars

300 = three hundred (jei skaičius tikslus)

1/4 = a **quarter** = a fourth
3/4 = **three quarters** = three fourths
2/3 = two **thirds**
3/17 = **three seventeenths**
$1\,^{1}/_{2}$ = **one and a half**
$2\,^{3}/_{8}$ = **two and three eighths**

a half of the	cake
half of the	cake
half the	cake

a quarter of the cake
two thirds of the cake

One and a half months have passed since I saw him (plural).	Pusantro mėnesio praėjo, kai jį mačiau.
A month **and a half** has passed since I saw him (singular).	
This tower is **half as high as** that one (before adj.).	Pagal aukštį šis bokštas yra perpus mažesnis už aną.
This house is **two thirds the height of** that one (before nouns).	Šio namo aukštis yra du trečdaliai ano namo (aukščio).

ADVERBS OF TIME

Laiko prieveiksmiai

Past	Now	Future
yesterday	today	tomorrow
yesterday evening	this evening	tomorrow evening
last night	tonight	tomorrow night
the day before yesterday		the day after tomorrow
last week	this week	next week
the week before last		the week after next
two weeks ago		in two weeks' time

ADVERBS OF TIME

Laiko prieveiksmiai

How often? never, seldom (rarely), sometimes, often, usually, always, ever
How many times? once a day, twice a month, three times a year... every day, every other day, every three months... hourly, daily, weekly, monthly, yearly

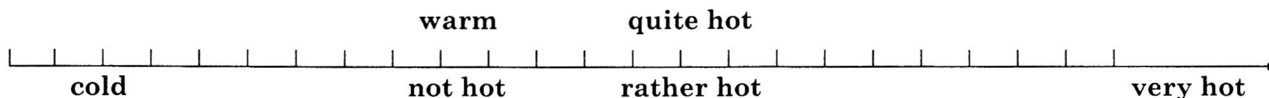
How long?	
yet	**still**
Aren't you ready **yet**? Ar tu **dar** nepasirengęs? Have you finished? – Not **yet**. Ar tu baigei? – **Dar** ne.	Do you **still** go to school? Tu **dar** eini į mokyklą? He is **still** a strong man. Jis **dar** stiprus vyras.
Not... any more/longer	
He doesn't work here **any more**. Jis jau čia nebedirba. I can't wait here **longer**. Aš ilgiau negaliu čia jo laukti.	

QUITE / RATHER

Gana

+ būdvardis **quite** short **quite** new **rather** short **rather** new	**+ prieveiksmis** **quite** easily **quite** often **rather** easily **rather** often
+ veiksmažodis She **quite** likes it. We **rather** enjoyed it.	**+ daiktavardis** There's **quite** a large spot. It's **rather** a nice coat.

quite	**rather**
quite bright, quite nicely, quite a good football player (teigiama reikšmė)	rather dull, rather badly, rather boring (neigiama reikšmė)



THERE IS / THERE ARE

Yra

There's someone at the door. **There aren't** enough plates in the kitchen.	Kažkas yra už durų. Virtuvėje trūksta lėkščių.
Are there any apples? Yes, **there are**. **There are** some apples on the table.	Ar yra kokių obuolių? Taip. Ant stalo yra keli obuoliai.
There was nothing to do.	Nebuvo ten ko veikti.

PRONOUNS

Įvardžiai

PERSONAL PRONOUNS
ASMENINIAI ĮVARDŽIAI

I	I am a short boy. – Aš nedidelis berniukas.
You	You are my friend. – Tu – mano draugas.
He	He is a teacher. – Jis mokytojas. (vyras)
She	She is a singer. – Ji dainininkė. (moteris)
It	It is a car. – Tai automobilis. (negyvieji daiktai, gyvuliai)
We	We are pupils. – Mes mokiniai.
You	You are our friends. – Jūs mūsų draugai.
They	They are at the theatre. – Jie yra teatre. (žmonės) They are on the shelf. – Jie ant lentynos. (gyvūnai, daiktai)

I	**me**	**my**	**mine**	**myself**
you	**you**	**your**	**yours**	**yourself**
he	**him**	**his**	**his**	**himself**
she	**her**	**her**	**hers**	**herself**
it	**its**	**its**		**itself**
we	**us**	**our**	**ours**	**ourselves**
you	**you**	**your**	**yours**	**yourselves**
they	**them**	**their**	**theirs**	**themselves**
I am a boy. Aš berniukas.	Help **them**. Padėk jiems/joms.	It's **her** book. Tai jos knyga.	This bag is **his**. Tai jo krepšys.	I'll do it **myself**. Tai aš pasidarysiu pats/pati.

PREPOSITIONS OF PLACE

Vietos prielinksniai

in – at

We were **at** home all day. We were **in** the house.	Mes buvome namie visą dieną. Mes buvome name.
They stayed **at** the hotel. They stayed **in** the hotel because it was raining.	Jie apsistojo (apsigyveno) viešbutyje. Jie liko viešbutyje, nes lijo.

in – into – inside

He walked **into** the park. He walked **in** the park. Stay **inside** the house: there's a dog in the garden.	Jis nuėjo į parką Jis vaikštinėjo po parką. Pasilik namie (viduje) – sode šuo.

over/under – above/below

over/under The cat is **under** the table.	virš/po (tiksliai pagal vertikalę) Katė yra po stalu
above/below The cat on the table is **above** the cat under the sofa.	Aukščiau/žemiau (ne vienas virš kito) Katė ant stalo yra aukščiau negu katė po sofa.

near – next to

The cinema is **near** the baker's. Bob's sitting **next to** me in the classroom.	Kino teatras yra **prie** duonos parduotuvės. Bobas sėdi klasėje **greta** manęs.

between – among

There's a tree **between** two houses. I found a letter **among** my papers.	**Tarp** dviejų namų yra (auga) medis. Laišką radau **tarp** savo popierių.

PREPOSITIONS OF TIME

Laiko prielinksniai

WHAT TIME IS IT?

KIEK VALANDŲ, KIEK LAIKO?

It's twelve o'clock in the daytime. It's midday. Dvylikta (valanda) dienos. Vidudienis.	
Five minutes past twelve. Penkios (minutės) pirmos.	**Ten minutes past twelve.** Dešimt (minučių) pirmos.
A quarter past twelve. Ketvirtis pirmos.	**It's half past twelve.** Pusė pirmos.

7.30 **a.m.** = half past seven in the morning

PREPOSITIONS OF TIME

Laiko prielinksniai

It's twelve o'clock at night. It's midnight. Dvylikta (valanda) nakties. Pusiaunaktis.	
Five minutes to one. Be penkių (minučių) pirma.	**Ten minutes to one.** Be dešimties (minučių) pirma.
A quarter to one. Be ketvirčio pirma.	**Twenty minutes to one.** Be dvidešimties pirma.
Twenty five minutes to one. Be dvidešimtpenkių pirma.	**It's one o'clock.** Pirma (valanda).

8 **p.m.** = eight o'clock in the evening

TIME and DATES

Laikas ir datos

in	on	–
		Prielinksniai nevartojami, jei yra žodžiai: *last, this, next, that, every, some.*
in the morning in the evening in the day in the night		every morning this evening
	on Monday on Saturdays on the sixth of May on Sunday morning	yesterday today tomorrow tomorrow afternoon next Monday
in the third week of November		last week next week
in October in the month of July		next month every month
in (the) spring in (the) summer		this spring
in 1996 in the following year		every year
in the 20th century		last century

in the night (time) = during the night = at night

in the day (time) = during the day

TIME and DATES

at	**at** 5 o'clock; **at** 7.30 on Sunday morning; **at** the moment; **at** lunch time; **at** midday; **at** Christmas; **at** the New Year; **at** Easter
by	I'll finish this work **by** 7 o'clock. Tą darbą baigsiu 7 valandą.
until (till)	Stay at home **until** six o'clock. Būk namie **iki** 6 valandos.
during	Be quiet **during** the lesson. Netriukšmauk **per** pamoką.
since	I've lived here **since** 1986. Aš gyvenu čia **nuo** 1986 metų.
for	I've lived here **for** ten years. Aš gyvenu čia jau dešimt metų.
after	**After** 10 o'clock Bob goes to bed. **Po** 10 valandos Bobas eina miegoti.
before	He got there **before** 6 o'clock. Jis nusigavo ten **iki** šeštos (valandos).
between	The accident has taken place **between** 10 p.m. and 7 a.m. Nelaimingas atsitikimas įvyko **tarp** 10 valandos vakaro ir 7 valandos ryto.
from ... to	The normal working week is **from** Monday **to** Friday. Įprastinė darbo savaitė tęsiasi **nuo** pirmadienio **iki** penktadienio.

What's the date today? Kuri šiandien mėnesio diena?	It's the sixteenth **of** July. Šiandien liepos šešioliktoji.
When were you born? Kada jūs gimėte?	**On** the fifteenth **of** September, 1953. 1953 metų rugsėjo penkioliktąją.
In what year was Mozart born? Kuriais metais gimė Mocartas?	**In** 1756. 1756 metais.

THE WEEK

SUNDAY	SEKMADIENIS	THURSDAY	KETVIRTADIENIS
MONDAY	PIRMADIENIS	FRIDAY	PENKTADIENIS
TUESDAY	ANTRADIENIS	SATURDAY	ŠEŠTADIENIS
WEDNESDAY	TREČIADIENIS		

TIME and DATES

THE MONTHS

Winter	Spring	Summer	Autumn
December gruodis	March kovas	June birželis	September rugsėjis
January sausis	April balandis	July liepa	October spalis
February vasaris	May gegužė	August rugpjūtis	November lapkritis

YEARS

1200 = twelve hundred	1903 = nineteen three
1044 = ten forty-four	1996 = nineteen ninety-six

CONTRACTED FORMS...

Santrumpinės formos

am	**'m**	I'm very happy.	**had**	**'d**	She'd already left.
are	**'re**	You're clever.	**would**	**'d**	I'd like a cup of tea.
is	**'s**	He's a pupil.	**should**	**'d**	I'd like a cup of coffee.
have	**'ve**	You've got blue eyes.	**will**	**'ll**	I'll do this work later.
has	**'s**	He's got a new car.			

am	**am not**	**I'm not...**	**did**	**did not**	**didn't**
are	**are not**	**aren't**	**can**	**can not (cannot)**	**can't**
is	**is not**	**isn't**	**could**	**could not**	**couldn't**
was	**was not**	**wasn't**	**will**	**will not**	**won't**
were	**were not**	**weren't**	**shall**	**shall not**	**shan't**
have	**have not**	**haven't**	**must**	**must not**	**mustn't**
has	**has not**	**hasn't**	**should**	**should not**	**shouldn't**
had	**had not**	**hadn't**	**ought to**	**ought not to**	**oughtn't to**
do	**do not**	**don't**	**need**	**need not**	**needn't**
does	**does not**	**doesn't**			

IRREGULAR VERBS

Netaisyklingieji veiksmažodžiai

be (am, are, is)	was, were	been	būti
become	became	become	tapti
begin	began	begun	pra(si)dėti
bite	bit	bitten	kąsti
blow	blew	blown	pūsti
break	broke	broken	lūžti, laužyti
bring	brought	brought	nešti
build	built	built	statyti
burst	burst	burst	sprogti
buy	bought	bought	pirkti
can	could	–	galėti
catch	caught	caught	griebti
choose	chose	chosen	rinkti(s)
come	came	come	ateiti
cost	cost	cost	kainuoti
cut	cut	cut	pjauti
dig	dug	dug	kasti
do	did	done	daryti
draw	drew	drawn	piešti
drink	drank	drunk	gerti
drive	drove	driven	vairuoti
eat	ate	eaten	valgyti
fall	fell	fallen	kristi
feel	felt	felt	jausti
fight	fought	fought	kovoti
find	found	found	rasti
fly	flew	flown	lėkti
forget	forgot	forgotten	užmiršti
forgive	forgave	forgiven	atleisti
freeze	froze	frozen	šaldyti
get	got	got	gauti
give	gave	given	duoti
go	went	gone	eiti
grow	grew	grown	augti
have (has)	had	had	turėti
hear	heard	heard	girdėti
hide	hid	hidden	slėpti(s)
hit	hit	hit	smogti
hold	held	held	laikyti
hurt	hurt	hurt	skaudinti
keep	kept	kept	laikyti
know	knew	known	žinoti
lead	led	led	vesti, vadovauti
leave	left	left	palikti

IRREGULAR VERBS

lend	lent	lent	skolinti
let	let	let	leisti
lie	lay	lain	gulėti
light	lit	lit	apšviesti
lose	lost	lost	prarasti
make	made	made	daryti
mean	meant	meant	reikšti
meet	met	met	su(si)tikti
pay	paid	paid	mokėti
put	put	put	dėti
read	read	read	skaityti
ride	rode	ridden	joti
ring	rang	rung	skambinti
rise	rose	risen	kilti
run	ran	run	bėgti
say	said	said	sakyti
see	saw	seen	matyti, žiūrėti
sell	sold	sold	parduoti
send	sent	sent	siųsti
set	set	set	dėti
sew	sewed	sewn	siūti
shake	shook	shaken	purtyti
shine	shone	shone	spindėti
shoot	shot	shot	šaudyti
show	showed	shown	rodyti
shut	shut	shut	už(si)daryti
sing	sang	sung	dainuoti
sit	sat	sat	sėdėti
sleep	slept	slept	miegoti
speak	spoke	spoken	kalbėti
spend	spent	spent	leisti, eikvoti
stand	stood	stood	stovėti
steal	stole	stolen	vogti
stick	stuck	stuck	lipinti
swear	swore	sworn	prisiekti, keikti(s)
swim	swam	swum	plaukti
take	took	taken	imti
teach	taught	taught	mokyti
tear	tore	torn	plėšyti
tell	told	told	sakyti, kalbėti
think	thought	thought	galvoti
throw	threw	thrown	mesti
wake	woke	woken	busti
wear	wore	worn	dėvėti
win	won	won	laimėti
write	wrote	written	rašyti

TO BE

Būti

VARTOSENA
(to be – am, are, is, was, were, been)

1. I **am** hungry.	Aš alkanas.
2. My son **is** eight.	Mano sūnui aštuoneri (metai).
3. He **is** a good friend.	Jis geras draugas.
4. She **is** from Britain.	Ji iš Anglijos.
5. There **is** someone at the door.	Kažkas ten prie durų.

PRESENT SIMPLE

Affirmative	Interrogative	Negative
I **am** hungry.	**Am** I hungry?	I'**m not** hungry.
You (we, they) **are** (**'re**) hungry.	**Are** you hungry?	You'**re not** hungry.
He (she, it) **is** hungry.	**Is** he hungry?	He **isn't** hungry.

PAST SIMPLE

Affirmative	Interrogative	Negative
I **was** ill.	**Was** I ill?	I **wasn't** ill.
You (we, they) **were** ill.	**Were** you ill?	You **weren't** ill.
He (she, it) **was** ill.	**Was** he ill?	He **wasn't** ill.

TO HAVE

Turėti

VARTOSENA
(to have – has, had)

1. **to have = to have got** It **has** four legs. It **has got** four legs. I **have** a headache. I **have got** a headache. I **am having** a headache.	Jis turi keturias kojas. Man skauda galvą.
2. I **have** breakfast **at** 8 o'clock.	Aš pusryčiauju 8 valandą.

TO HAVE

Turėti

PRESENT SIMPLE

Affirmative			Interrogative	Negative
I You We They	**have** **('ve)**	a job.	**Do** you **have** a job? **Have** you **got** a job?	You **don't have** a job. You **haven't got** a job.
He She It	**has** **('s)**	a job.	**Does** he **have** a job?	He **doesn't have** a job. He **hasn't got** a job.

PAST SIMPLE

Affirmative			Interrogative	Negative
I They He	**had** **('d)**	a job.	**Did** they **have** a job?	They **didn't have** a job.

MUST

Privalėti

must go (be dalelytės to!) **must = have to (have got to)**

PRESENT SIMPLE

Affirmative			Negative		
I He They	**must**	go now. have dinner. be more careful.	I He They	**mustn't** **(must not)**	go now. have dinner. do this work.

Interrogative		
(Why) **must**	I	go now? (protestui reikšti)

must	have to
I **must** go home early. (man pačiam reikia)	I **have to** write the letter. (mokytojas liepė)

MUST

Privalėti

PAST SIMPLE

must → had to

Affirmative			Negative		
I He They	**had to**	go. have dinner. be more careful.	I He They	**hadn't to** **(had not)** **didn't** **have to**	go. have dinner. do that work.

Interrogative			
(Why) **had** — **Did**	I he they	**to** — **have to**	go? have dinner? do that work?

FUTURE SIMPLE

must → will have to

We **will have to** get up early to catch the bus. Mums reiks anksti keltis, kad spėtume į autobusą.

1. **Must** reikšme *privalėti, turėti*

Privalėti, turėti	**Neturėti**	**Nereikėti, neturėti** **must → have to/need to**
You **must** eat to live. Reikia valgyti, kad gyventum.	You **mustn't** smoke here! Tu neturi čia rūkyti!	You **don't have to** be very strong to be good at music. Tau nereikia būti labai stipriam, kad galėtum gerai muzikuoti.

2. **Must** reikšme *turi būti, tikriausiai*

It's dark. It **must** be late already. Tamsu. Tikriausiai, jau vėlu.	***But:*** It **can't** be so late already. Negali būti jau taip vėlu.

3. Must / should

Must	Should
You **must** work hard. Tu turi daugiau dirbti. (kitaip neišlaikysi egzamino)	You **should** work hard. Tau reiktų daugiau dirbti. (jei nori daryti mažiau klaidų)
You **must** be tired after your journey. Tu tikriausiai esi po kelionės pavargęs . (kelionė buvo labai sunki)	You **should** be tired after your walking. Tu turėtum būti po pasivaikščiojimo pavargęs. (o gal ir nepavargai)

SHOULD / OUGHT TO

Reikėti, turėti

should = ought to

PRESENT SIMPLE

Affirmative			
I You He, she It We They	**should** **ought to**	be have go	carefull. bought some cheese. to bed early.

Interrogative			
Should **Shouldn't**	I you he, she it we they	be have do	working now? sent him a card? the washing?

Negative			
I You He, she It We They	**shouldn't** **oughtn't to**	be have tell	so noisy. forgotten that. lies.

Present Time	Past Time
You **should write** to him. Tu turėtum jam parašyti. (tu tai dar gali padaryti)	You **should have written** to him yesterday. Tau reikėjo parašyti jam dar vakar. (bet tu, deja, to nepadarei)

VARTOSENA

1. The children **should** be home soon. (It's 4 p.m. They usually get home by 4.15 p.m.)	Vaikai greit turi būti namie. (Dabar keturios valandos. Jie paprastai pareina namo 15 min. po keturių.)
2. It's 11.30 p.m. You **should** be in bed.	Dabar pusė dvylikos. Tu turėtum jau miegoti.
3. You **shouldn't** lend him so much money. You **oughtn't to** work so hard.	Tu neturėtum duoti jam tiek pinigų. Tau nereikėtų taip sunkiai dirbti.
4. They **shouldn't** make so much noise!	Jie neturėtų taip smarkiai triukšmauti!

MAY

Galėti

PRESENT SIMPLE

Affirmative		
I He They	**may**	have ... go ... see ...

Negative		
I He They	**may not**	have ... go ... see ...

Interrogative (Prašymas)		
May	I he they	leave the room?

VARTOSENA

1. He **may** be ill.	Jis **galbūt/bene** serga. (galimybė)
2. It **may** rain tomorrow.	**Galbūt** rytoj lis. (galimybė ateityje)
3. She **may** have missed the train.	Ji **bene** bus pavėlavusi į traukinį. (galimybė praeityje)
4. I **may not** be able to play tennis today. The weather is bad.	Aš **tikriausiai** šiandien negalėsiu žaisti teniso. Prastas oras. (galimybė ne...)
5. **May** I use your telephone? – Yes, certainly you **may**.	Ar **galiu** (leidžiama) paskambinti jūsų telefonu. Prašom, **galite**.

COULD / MIGHT

Galėtų

PRESENT SIMPLE

Affirmative		
I	**could** **might**	be ... have ... look ...

Negative		
I	**couldn't** **mightn't**	be ... have ... look ...

Interrogative						
Question			Negative question			
Could **Might**	I	be ...? have ...? look ...?	**Couldn't** **(Could)** **Mightn't** **(Might)**	I	(not) (not)	be ...? have ...? look ...?

COULD / MIGHT

Galėtų

VARTOSENA

1. It **could (might)** rain tomorrow.	Rytoj **gali** palyti. (bet šiandien šviečia saulė)
2. One day I **could (might)** become a millionaire.	Kada nors, **galimas daiktas**, aš tapsiu milijonieriumi. (vargu)
3. **Could** I have some tea? – No, you can't.	Ar man **galima** arbatos? – Ne, negalima. (prašant leidimo)
4. Excuse me, **could** you tell me how to get to the post office, please?	Atsiprašau, ar **negalėtumėte** man pasakyti, kaip nueiti į paštą? (prašant patarimo)
5. You **could (might)** try to talk more quietly!	**Galėtum** kalbėti ir tyliau! (nelabai mandagus kreipinys)

You **couldn't** have met him.	You **might not** have met him.
Tu jo **negalėjai** anksčiau sutikti. (jis išvažiavo anksčiau negu tu pasirodei čia)	Tu **galėjai** jo anksčiau ir nesutikti. (galėjai jo ir nesutikti, nors buvo jis čia)

NEED

Reikėti

TAISYKLINGASIS VEIKSMAŽODIS

need needs needed needing

My hair **needs** washing.	Man reikia išsitrinkti galvą.
All animals **need** to eat.	Visiems gyvūnams reikia ėsti.
We don't **need** to read all these books.	Mums nėra ko skaityti visas šias knygas.

MODALINIS VEIKSMAŽODIS

need need

Taisyklingasis	**Modalinis**
You don't **need** to hurry.	You **needn't** hurry.
Tau nėra ko skubėti. Turime daug laiko.	

DARE

Drįsti

TAISYKLINGASIS VEIKSMAŽODIS

dare dares dared daring

MODALINIS VEIKSMAŽODIS

dare

Taisyklingasis	**Modalinis**
He didn't **dare** to ask him. Jis neišdrįso jo paklausti.	How **dare** you talk to me like that? Kaip tu drįsti taip kalbėtis su manim?

THE PASSIVE VOICE

Neveikiamoji rūšis

DARYBA

be + Past Participle

is asked – klausia
was made – buvo padarytas
can be seen – galima matyti

Active	**Passive**
Bob **made** these chairs. Bobas padarė šias kėdes. Tom **sent** me a card. Tomas pasiuntė man atviruką.	These chairs **were made** by Bob. Šios kėdės padarytos Bobo. I **was sent** a card. Man atsiuntė atviruką.

Present Simple	
Active	**Passive**
ask asks do	**am/are** asked **is** asked **am/are done**

Present Progressive	
Active	**Passive**
am asking are asking is asking am doing	**am being** asked **are being** asked **is being** asked **am/are being done**

THE PASSIVE VOICE

Present Perfect	
Active	**Passive**
have asked has asked have done	**have been** asked **has been** asked **have been done**

Past Simple	
Active	**Passive**
asked did	**was/were** asked **was done**

Past Progressive	
Active	**Passive**
was/were asking was doing	**was/were being** asked **was being done**

Past Perfect	
Active	**Passive**
had asked had done	**had been** asked **had been done**

Future Simple	
Active	**Passive**
shall/will ask will do	**shall/will be** asked **will be done**

Future Perfect	
Active	**Passive**
will have asked will have done	**will have been** asked **will have been done**

PRESENT SIMPLE

Paprastasis esamasis laikas

DARYBA

Affirmative		Interrogative		Negative	
I You We like They	tennis. cooking.	**Do** you **like**	tennis? cooking?	You **don't like**	tennis. cooking.
He She likes It	tennis. cooking.	**Does** he **like**	tennis? cooking?	He **doesn't like**	tennis. cooking.

VARTOSENA

1. The sun **rises** in the east.	Saulė teka rytuose. (visada)
2. He **gets** up at 7 o'clock. He **plays** tennis every day.	Jis keliasi 7 valandą. Jis kasdien žaidžia tenisą. (jis taip įpratęs)
3. She **looks** like her mother. I **don't know** his name.	Ji panaši į savo motiną. Aš nežinau jo vardo. (apskritai)
4. Bob **passes** the ball to Johnson and ...	Bobas perduoda kamuolį Džonsonui ir... (futbolo reportažas)
5. I **think** we **are** wrong. It **is** windy today.	Manau, kad mes klystame. Šiandien vėjuota diena. (būklė)
6. Tomorrow **is** Tom's birthday.	Rytoj Tomo gimimo diena. (būtinai)

PAST SIMPLE

Paprastasis būtasis laikas

DARYBA

Taisyklingieji veiksmažodžiai – to walk

Affirmative		Interrogative			Negative	
I You We They He She It	walked to school (yesterday).	**Did**	I you we they he she it	walk to school (yesterday)?	I You We They He She It	**did not (didn't)** walk to school (yesterday).

definite time in the past ↓ **then** — **now** ↓ →

PAST SIMPLE

Paprastasis būtasis laikas

Netaisyklingieji veiksmažodžiai – to go (went)

Affirmative		Interrogative			Negative	
I You We They He She It	went to school (yesterday).	**Did**	I you we they he she it	go to school (yesterday)?	I You We They He She It	**did not (didn't)** go to school (yesterday).

VARTOSENA

1. When **did** you **buy** that dress? – I **bought** it yesterday. The train **left** at 9.15.	Kada tu pirkai šitą suknelę? – Pirkau ją vakar. Traukinys išvyko 9.15. (veiksmas įvyko apibrėžtu laiku praeityje)
2. Once there **was** a king, who **had** a beautiful daughter.	Kartą gyveno karalius, kuris turėjo gražią dukterį. (būklė praeityje)

FUTURE SIMPLE

Paprastasis būsimasis laikas

DARYBA

1. shall/will

Affirmative	Interrogative	Negative
I'll We'll (**shall/will**) come.	**Shall (Will)** I we come?	I We **won't (shan't) come.**
He'll come.	**Will** he come?	He **won't** come.

2. going to

Affirmative		Interrogative		
I'm (**am**)	**going to** paint the fence.	**Am**	I	**going to** paint the fence?
You'**re** We'**re** (**are**) They'**re**	**going to** paint the fence.	**Are**	you we they	**going to** paint the fence?
He's She's (**is**) It's	**going to** paint the fence.	**Is**	he she it	**going to** paint the fence?

FUTURE SIMPLE

Negative	
I'm **(am)**	**not going to** paint the fence.
You'**re** We'**re** **(are)** They'**re**	
He's She's **(is)** It's	

shall/will VARTOSENA

1. I'**ll** help you.	Aš tau padėsiu. (pažadas)
2. It'**ll** be windy tomorrow.	Rytoj bus vėjuota. (prognozė)
3. Very well. I'**ll** buy it.	Labai gerai. Pirksiu jį. (nuspręsta šiuo momentu)
4. Perhaps I'**ll** do it.	Galbūt aš tai padarysiu. (esama galimybės)
5. **What** shall we do?	Ką darysime? (pasiūlymas, patarimai)
6. **Will** you close the door?	Ar neuždarytum durų? (įsakymas, prašymas)
7. I **won't/shan't** do it.	Aš to nedarysiu. (atsisakymas)

to be going to VARTOSENA

1. What **are** you **going to** do when you grow up? – I'**m going to** be a singer.	Ką tu ketini veikti užaugusi? – Manau būti dainininkė. (nutarta anksčiau)
2. It'**s going to** rain.	Bus lietaus. (matyti debesų)

VARTOSENA

Present Progressive

1. I'**m seeing** him at 10 o'clock tomorrow.	Matysiu jį rytoj 10 valandą. (jau dėl to susitarėme)
2. I'**m going** to London tomorrow.	Rytoj važiuoju į Londoną. (ateities planai su judesio veiksmažodžiais)
3. **Are** you **doing** anything tonight?	Ar tu šiandien vakare ką veiksi?

PRESENT PROGRESSIVE

Esamasis tęstinis laikas

DARYBA

Affirmative		Interrogative		Negative	
I **am** (**'m**)	playing tennis.	**Am** I	playing tennis?	I **am not** (**'m not**)	playing tennis.
You We **are** They		**Are** you		You **are not** (**aren't**)	
He She **is** It		**Is** she		She **is not** (**isn't**)	



Present Progressive

VARTOSENA

1. What **are** you **doing**? – I'**m reading** now. Wait for me! I'**m coming**. It **is raining.** (at present)	Ką tu veiki? – Skaitau. (dabar) Palauk manęs! Jau einu. (bemat) Lyja. (šiuo metu)
2. We **are living** in a small flat. (at present) We (normally) live in a village near London.	Mes gyvename mažame bute. (tik šiuo metu) Mes gyvename kaime netoli Londono. (visada, paprastai)
3. When **are** you **meeting** Bob? – **I'm meeting** him at 12 o'clock tomorrow.	Kada tu susitinki su Bobu? – Aš susitinku su juo ryt 12 valandą. (tokie mano ateities planai)

Nevartojami (paprastai) veiksmažodžiai:

1.	see feel recognize	hear smell appear	look taste seem	sound	Can you **hear** the wind? Tu girdi vėją?
2.	want (to) wish hope (to)	refuse (to) like forgive	love prefer	hate	Which chocolate do you **like** best? Kurį šokoladą tu labiau mėgsti?
3.	think realize mean expect	know forget believe agree	understand feel(=think) remember guess		I **think** the shop is open now. Manau, kad parduotuvė dabar atdara.

PRESENT PROGRESSIVE

4.	be, have	I expect Bob **is** asleep. ***But:*** I'm having a bath. Manau, kad Bobas miega. Aš dabar maudausi vonioje. I **have** a headache. Man skauda galvą.
5.	cost own owe belong to contain consist of depend (on) matter concern	How much does it **cost**? Kiek tai kainuoja? The bottle **contains** a litre of milk. Butelyje telpa litras pieno.

PAST PROGRESSIVE

Būtasis tęstinis laikas

DARYBA

Affirmative			Interrogative		
I He She It	**was**	**working.**	**Was** **Wasn't**	I he she it	**working?**
You We They	**were**		**Were** **Weren't**	you we they	

Negative	
I, he, she, it **wasn't**	**working.**
You, we, they **weren't**	

Būtuoju tęstiniu laiku **NEVARTOJAMI** tie patys veiksmažodžiai kaip ir ***esamuoju tęstiniu***

VARTOJIMAS

1. It **was raining** (1) when Bob **left** (2) my house.	Lijo (1), kai Bobas išėjo (2) iš mano namų (2 veiksmas vyko 1 fone)
2. I **was reading** while my sister **was eating** breakfast.	Aš skaičiau, kai mano sesuo pusryčiavo. (abu veiksmai tęstiniai)
3. What **were** you **doing** at 7 o'clock yesterday?	Ką tu veikei vakar vakare 7 valandą? (tęstinis veiksmas nurodytu laiku)

FUTURE PROGRESSIVE

Būsimasis tęstinis laikas

DARYBA

Affirmative		Interrogative		
I'll **(will/shall)** We'll	**be working** tomorrow at 7 o'clock.	**Will** **Shall**	I we	**be working** tomorrow at 7 o'clock?
He'll **(will)**		**Will**	he	

Negative	
I **won't** We **(shan't)**	**be working** tomorrow at 7 o'clock.
He , she **won't**	

VARTOSENA

1. I'**ll be having** a bath at 7 o'clock tomorrow morning.	Vonioje maudysiuos rytoj 7 valandą. (nurodytas laikas ateityje)
2. **Will** you **be going** there? – Yes, I'**ll be going** there.	Eisi ten? – Taip, eisiu. (be mandagumo ženklų; be noro)
3. I'**ll be seeing** him there tomorrow.	Aš matysiu jį ten rytoj. (jis visada būna ten tuo laiku)

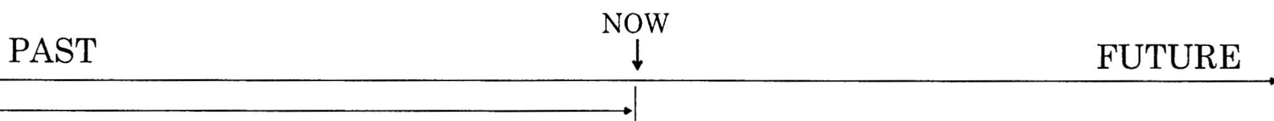
PRESENT PERFECT

Esamasis atliktinis laikas

DARYBA

to write, wrote, written / to paint, painted

Affirmative		Interrogative		
I've You've **(have)** We've They've	**written** a new book.	**Have** **Haven't**	I you we they	**written** a new book?
He's She's **(has)** It's	**painted** the house.	**Has** **Hasn't**	he she it	**painted** the house?



PRESENT PERFECT

Negative			
I You **haven't** We **(have not)** They	**written** any new book.	He **hasn't** She **(has not)** It	**painted** the house.

VARTOSENA

1. I **have studied** English since 1973. How long **have** you **had** that bicycle?	Aš mokausi anglų kalbos nuo 1973 metų. Kiek laiko tu turi tą dviratį? (laiko tarpas)
2. I **have visited** London, but I **have** never **been** to Paris.	Aš esu buvęs Londone, bet niekada nebuvau Paryžiuje. (iki šiol)
3. Do you want to see the new film "Police School 6"? I'**ve** already **seen** it. **Have** you **seen** "The Treasure Island"?	Ar nori pažiūrėti filmą „Šeštoji policijos mokykla"? Aš jau esu jį matęs. Tu jau esi matęs „Lobių salą"? (pastaruoju laiku)
4. I'**ve** just **had** a delicious cake.	Aš ką tik valgiau skanaus pyragaičio.
5. Somebody'**s borrowed** my pen. Lucy isn't here. She'**s gone** shopping.	Kažkas paėmė (yra paėmęs) mano plunksnakotį. Liusės nėra. Ji išėjusi apsipirkti. (rezultatas tebėra akivaizdus)

PRIEVEIKSMIŲ VIETA

Have you	**ever**	done it?	
No, I've	**never**	done it.	
Yes, I've	**often**	done it.	Yes, I've done it **once.**

already – yet – still	
I've **already** finished my work. They haven't done it **yet**. Has Bob done his work **yet**? He **still** hasn't finished his work.	Aš jau esu baigęs savo darbą. Jie dar nėra jo padarę. Ar Bobas dar nėra savo darbo padaręs? Jis dar nėra savo darbo pabaigęs.

Present Perfect	**Present Perfect Progressive**
Who's eaten my cake? Kas suvalgė mano pyragaitį? (The plate is empty. Lėkštelė tuščia.)	Who's been eating my cake? Kas valgė mano pyragaičio? (Some is left. Šiek tiek jo yra likę.)
I've read your book. Aš perskaičiau tavo knygą. (I've finished it. Aš baigiau ją skaityti.)	I've been reading your book. Aš skaitau tavo knygą. (I haven't finished it. Aš dar nebaigiau jos skaityti.)

PRESENT PERFECT PROGRESSIVE

Esamasis atliktinis tęstinis laikas

DARYBA

Affirmative		**Interrogative**		
I'**ve** You'**ve** **(have)** We'**ve** They'**ve**	**been reading** all evening.	**Have** **Haven't**	I you we they	**been reading** today?
He'**s** She'**s** **(has)** It'**s**		**Has** **Hasn't**	he she it	

Negative	
I (you, we, they) **haven't (have not)**	**been reading** all week.
He (she, it) **hasn't (has not)**	

Esamuoju atliktiniu tęstiniu laiku **NEVARTOJAMI** tie patys veiksmažodžiai kaip ir ***esamuoju tęstiniu laiku***

VARTOSENA

1. Where have you been? – I'**ve** **been returning** a library book. What **have** you **been doing**? – I'**ve been cooking** breakfast.	Kur buvai? – Grąžinau knygą bibliotekai. Ką tu darei? – Ruošiau pusryčius. (veiksmas ką tik baigėsi)
2. He'**s been writing** the story of his life. (He's written the story of his life.)	Jis rašo savo gyvenimo istoriją. (jam dar reiks ilgai rašyti) (Jis parašė savo gyvenimo istoriją.)
3. He'**s been building** his garage for ages. We'**ve been living** in this flat since 1980.	Jis stato savo garažą ilgių ilgiausiai. Mes gyvename šiame bute nuo 1980 metų..
4. Look! It'**s been** raining.	Žiūrėk! Lietus nulijo. (gatvės dar šlapios)

PAST PERFECT

Būtasis atliktinis laikas

DARYBA

to write, wrote, written; to paint, painted

Affirmative		Interrogative		
I'**d** You'**d** We'**d** They'**d** **(had)** He'**d** She'**d** It'**d**	**written** a new book. **painted** the house.	**Had** **Hadn't**	I you we they he she it	**written** a new book? **painted** the house?

Negative		
I (you, we, they, he, she, it)	**hadn't** **(had not)**	**written** any new book. **painted** the house.

VARTOSENA

1. When the match **had finished** (1), Bob left quickly (2). Lucy **had cooked** dinner (1) by the time Bob came home (2). It was (2) the first time he'**d visited** the zoo (1). (Past in the Past)	Kai rungtynės baigėsi (1), Bobas greit išėjo (2). Liusė paruošė pietus (1) iki Bobui pareinant namo (2). Tai buvo (2) pirmas kartas (po to), kai jis buvo pabuvojęs (1) zoologijos sode. (1 – pradžioje; 2 – paskiau)
2. If you **had driven** more carefully, you would have avoided this accident. (Unreal Past Perfect)	Jei tu būtum vairavęs mašiną atidžiau, būtum tos avarijos išvengęs. (bet avarija jau įvyko)

PAST PERFECT PROGRESSIVE

Būtasis atliktinis tęstinis laikas

DARYBA

Affirmative		Interrogative		
I'**d** You'**d** We'**d** They'**d** **(had)** He'**d** She'**d** It'**d**	**been waiting** for two hours when Bob came.	**Had**	I you we they he she it	**been wait-** **ing** for two hours when Bob came?

PAST PERFECT PROGRESSIVE

Negative		
I (you, we, they, he, she, it)	**hadn't** **(had not)**	**been waiting** for two hours when Bob came.

Būtasis atliktinis tęstinis laikas turi tas pačias funkcijas kaip ir ***esamasis atliktinis tęstinis*** laikas, tačiau reiškia **praeities** laiko momentą

VARTOSENA

1. I **had been studying** English for two years when I took the exam. **Had** it **been raining** before he crashed his car? No, it **hadn't been raining** at all.	Kai laikiau egzaminą, aš jau dvejus metus buvau studijavęs anglų kalbą. (aš ir dabar ją studijuoju) Ar buvo paliję, kai jis sudaužė savo mašiną? (iki ir galbūt per susidūrimą) Ne, lietus visai nelijo. (nei prieš, nei po to)
2. It **had been raining** all night, and the streets were still wet in the morning.	Lijo visą naktį, ir ryte gatvės dar buvo šlapios. (rezultatas akivaizdus)

FUTURE PERFECT

Būsimasis atliktinis laikas

DARYBA

to write, wrote, written / to paint, painted

Affirmative		**Interrogative**		
I'll **(shall/will)** You'll	**have written** a new book. **have painted** the house.	**Will** **(Shall)**	I we	**have written** a new book? **have painted** the house?
We'll They'll He'll **(will)** She'll It'll		**Will**	you they he she it	

Negative		
I We	**won't** **(shan't)**	**have written** any new book. **have painted** the house.
You They He She It	won't	

FUTURE PERFECT

VARTOSENA

I'm sure that he **will have** reached the restaurant (1) by 6 o'clock. They **will** already **have left** (1) by the time we get there (2). (PAST IN THE FUTURE)	Aš tikiu, kad šeštą valandą jis bus pasiekęs restoraną (1). Jie jau bus iš ten išvažiavę, kai mes ten atvyksime (2). (1 – tai lyg praeities įvykis 2 atžvilgiu)

FUTURE PERFECT PROGRESSIVE

Būsimasis atliktinis tęstinis laikas

DARYBA

Affirmative		Interrogative		
I'll (shall/will) We'll	**have been working ...**	**Will** **(Shall)**	I we	**have been working ...?**
You'll They'll **(will)** He'll She'll It'll		**Will**	you they he she it	

Negative	
I **won't** We **(shan't)**	**have been working ...**
He (she, it, we, they) **won't**	

Būsimasis atliktinis tęstinis laikas turi tas pačias funkcijas kaip ir ***esamasis atliktinis tęstinis*** laikas tačiau reiškia **ateities** laiko momentą

VARTOSENA

I'll **have been reading** for two hours when Bob comes home.	Kai Bobas pareis, aš jau būsiu porą valandų skaitęs.

IF-CLAUSES

Šalutiniai sakiniai su *IF*

1. **If** you **eat** too much, you **get** fat.	Jei daug valgysi, tapsi storas. (tai bendra taisyklė)
2. **If** we **leave** now, we'**ll** catch the bus.	Jei dabar išvažiuosime, spėsime į autobusą. (spėjinys)
3. **If** I **were** you, I'**d** buy a new car.	Tavo vietoje pirkčiau naują automobilį.
4. **If** you **had driven** more carefully, you **wouldn't have been** injured.	Jei būtum atsargiau važiavęs, nebūtum nukentėjęs. (bet, deja, patyrei avariją ir čia nieko nepadarysi)

INDIRECT SPEECH. SEQUENCE OF TENSES

Netiesioginė kalba. Laikų derinimas

Present Forms → Past Forms	
"I **come** to school at nine o'clock." „Aš ateinu į mokyklą devintą valandą."	Mary said that she **came** to school at nine o'clock. Merė sakė ateinanti (, kad ji ateina) į mokyklą devintą valandą.
"I **have** a pencil." „Aš turiu pieštuką."	The boy said that he **had** a pencil. Berniukas sakė turįs (, kad jis turi) pieštuką.
"I'm **reading**." „Aš skaitau."	She told us that she **was reading**. Ji sakė mums (tuo laiku) skaičiusi (, kad skaitė).
"I've **finished**." „Aš baigiau."	He said that he **had finished**. Jis pasakė baigęs (, kad baigė).

Present Forms → Past Forms	
Margaret said: "I **hope** it **won't** rain." Margarita pasakė: „Manau, kad lietaus nebus".	Margaret said that she **hoped** it **wouldn't** rain. Margarita sakė mananti (kad ji mano), jog lietaus nebus.

But:

The teacher **told** us that the Earth **goes** round the Sun.
Mokytojas sakė mums, kad Žemė sukasi apie Saulę. (tai visada teisinga)

Past Forms → Past Perfect Forms	
The man said: "I **met** you when you were at school." Žmogus pasakė: „Mes esame susitikę, kai mokėtės mokykloje".	The man said that he **had met** me when I was at school. Žmogus pasakė, kad mes buvome susitikę, kai aš dar mokiausi mokykloje.

INDIRECT SPEECH. SEQUENCE OF TENSES

Past Forms → Past Perfect Forms	
"I **was reading** when she came in." „Aš skaičiau (tuo metu), kai ji įėjo".	He told me he **had been reading** when she came in. Jis man pasakė, kad jis (tuo laiku skaitęs) skaitė, kai ji įėjo.

don't/doesn't	→	**didn't**
am/is	→	**was**
are	→	**were**
has/have (gone)	→	**had (gone)**
will	→	**would**
can	→	**could**
may	→	**might**
must	→	**must (had to)**

this	→	that
these	→	those
here	→	there
now	→	then/at that moment
today	→	that day
yesterday	→	the day before
two years ago	→	two years before
tomorrow	→	the next day

PASAKOJAMIEJI SAKINIAI

Bob said: "I'm ill." "You must go this evening."	Bob told me **(that) he was ill.** He said that **we must go** this evening. He explained to me **why he was late.**

KLAUSIAMIEJI SAKINIAI

Bob said: "Are you happy, Tom?" The boy said: "Is it raining?" "Where are you going?" "What's your name?" "Do you like ice-cream?"	Bob asked Tom **if (whether) he was happy.** The boy asked **if it was raining.** She asked him **where he was going.** They asked me **what my name was.** The boy wants to know **if you like ice-cream.**

PRAŠYMAI IR ĮSAKYMAI

"Give me the money." "Come in, please." "Don't sit there!" "Open the window."	He ordered me **to give him the money.** He asked me **to come in.** I told you **not to sit** there! The teacher asked me **to open the window.**

PRONUNCIATION of *-d*/*-ed* ENDING

Galūnių *-d*/*-ed* tarimas

[d]

po kai kurių priebalsių					
[b]	robb**ed**	[m]	seem**ed**	[v]	liv**ed**
[ð]	bath**ed**	[n]	sign**ed**	[w]	bow**ed**
[g]	begg**ed**	[ŋ]	ring**ed**	[z]	us**ed**
[l]	fail**ed**	[r]	car**ed**	[dʒ]	judg**ed**

[d] po balsių	[ɪd] po [d], [t]	[t] po kitų priebalsių
play**ed**, agre**ed**, stay**ed**, ti**ed**, pai**d**	add**ed**, land**ed**, start**ed**, visit**ed**	look**ed**, laugh**ed**, wish**ed**, watch**ed**

PRONUNCIATION of *-s* ENDING

Galūnių *-s* tarimas

	+ [ɪz]	+ [z]	+ [s]
plural nouns	vase – vases	day – days	cat – cats
possessive nouns	James – James's	Bob – Bob's	Bert – Bert's
verbs	teach – teaches	play – plays	like – likes

[ɪz]

po žvarbiųjų priebalsių					
[z]	rises	[dʒ]	oranges	[ʒ]	garages
[s]	kisses	[tʃ]	watches	[ʃ]	wishes

[z] po balsių ir šių priebalsių: [b], [d], [g], [v], [ð], [m], [n], [ŋ], [l], [r]	[s] po kitų priebalsių
boys, ways, pays, beds, pigs, cars, rooms	cats, cups, plates, walks, laughs

DOUBLING THE CONSONANT

Priebalsės dvejinimas

verb	+ *ing*	+ *ed*	+ *er* (noun)
stop	sto**pp**ing	sto**pp**ed	sto**pp**er
get	ge**tt**ing		
rub	ru**bb**ing	ru**bb**ed	
sit	si**tt**ing		
run	ru**nn**ing		ru**nn**er
swim	swi**mm**ing		swi**mm**er
plan	pla**nn**ing	pla**nn**ed	pla**nn**er

adjective	+ *er*	+ *est*	+ *en* (verb)
big	bi**gg**er	bi**gg**est	
sad	sa**dd**er	sa**dd**est	sa**dd**en
hot	ho**tt**er	ho**tt**est	

But: 1) great – greater – greatest; look – looking – looked (dvi balsės greta)
2) play – playing – played – player; row – rowed (**w**, **y** po balsės)
3) box – boxing (**x**)

be'gin – be'gi**nn**ing ad'mit – ad'mi**tt**ed pre'fer – pre'fe**rr**ed (paskutinis skiemuo kirčiuotas)	'enter – 'entering 'visit – 'visiting de'velop – de'veloped (paskutinis skiemuo nekirčiuotas)

CHANGING -*y* to -*i*

-*y* keitimas -*i*

-y → -ie prieš pridedant **-s** (veiksmažodžiams, daiktavardžiams)	to fly – he fl**ies** to cry – she cr**ies** to try – he tr**ies** baby – bab**ies** city – cit**ies**
-y → -i prieš pridedant **-ed, -er, -est, -ly** (veiksmažodžiams, būdvardžiams, prieveiksmiams)	cry – cried – crier copy – copied – copier carry – carried – carrier happy – happier – happiest funny – funnier – funniest early – earlier – earliest
-ie → -y (veiksmažodžiams)	die – dying lie – lying tie – tying

DROPPING FINAL *-e*

Galinės raidės *-e* iškritimas

-e iškrinta, pridėjus galūnę,
kuri prasideda balse (-ed, -er, -est, -ing)

verb	**+ *ing***	**+ *ed***	**+ *er* (noun)**
us**e** lik**e** writ**e** chang**e**	us**ing** writ**ing** chang**ing**	us**ed** lik**ed** chang**ed**	us**er** writ**er**

adjective	**+ *er***	**+ *est***
larg**e** whit**e** blu**e**	larg**er** whit**er** blu**er**	larg**est** whit**est** blu**est**

ADDING *-e* BEFORE *-s*

-e įterpimas prieš *-s*

Kai **-s** dedama prie žvarbiųjų garsų, prieš **-s** įterpiama **-e**
(-s, -ss, -sh, -ch, -tch, -x, -z, -zz)

wa**tch** wi**sh** tea**ch**	he wa**tch**es he wi**sh**es he tea**ch**es
bo**x** bu**s**	bo**x**es bu**s**es

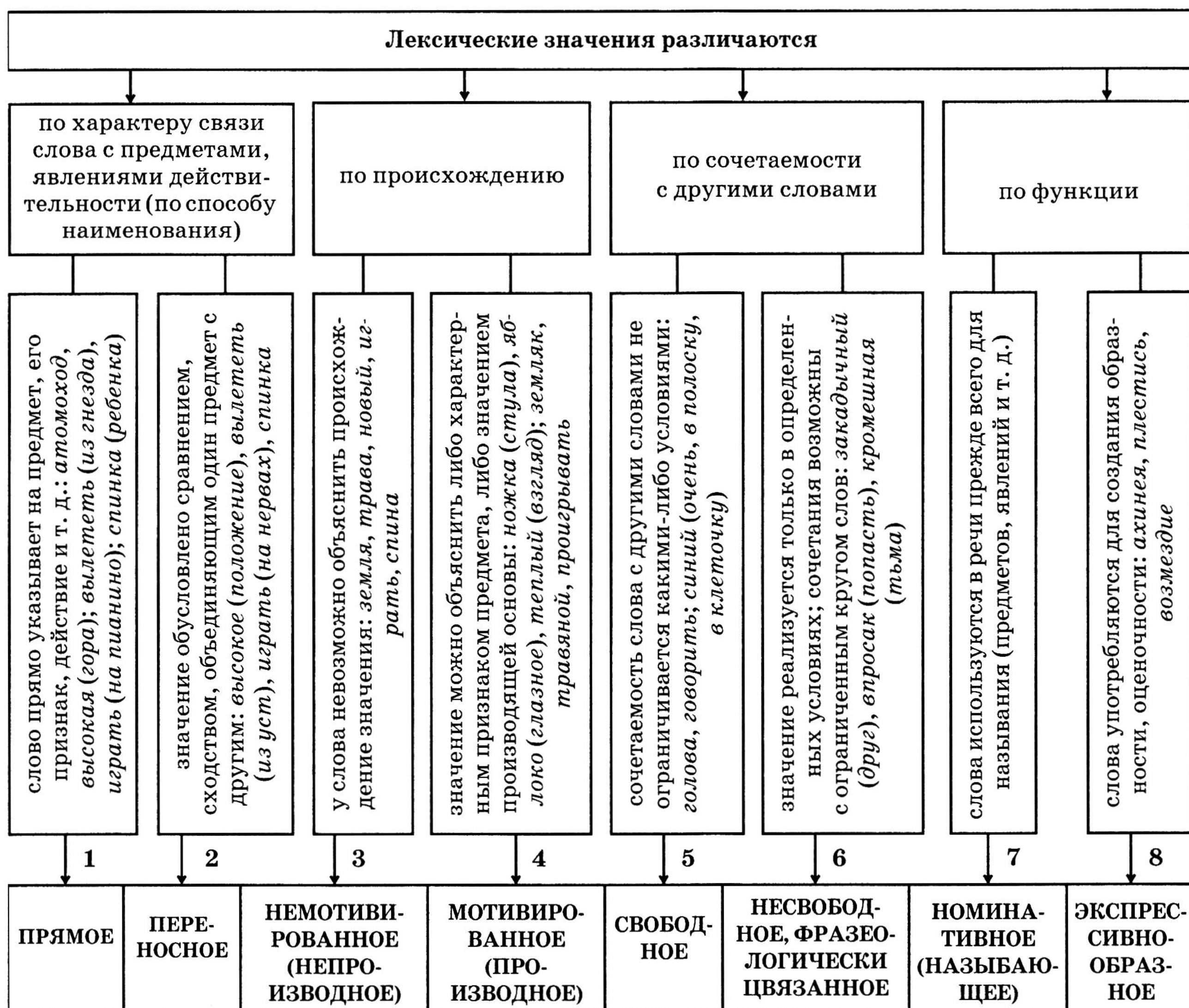
Sutartinių santrumpų sąrašas

nouns – daiktavardžiai (daiktav.)
adjectives (adj.) – būdvardžiai (būdv.)
adverbs (adv.) – prieveiksmiai
pronouns – įvardžiai
prepositions – prielinksniai
verbs – veiksmažodžiai
singular – vienaskaita
plural – daugiskaita

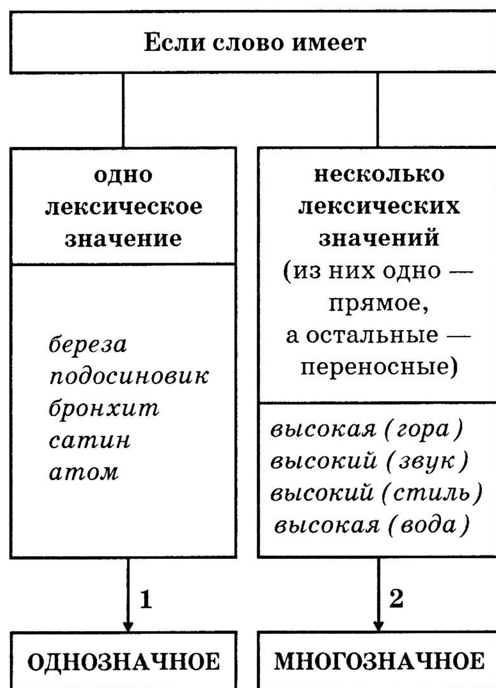
Rusų kalba

ЛЕКСИКА

1. Типы лексических значений слова



2. Слово: однозначное или многозначное?



3. Способы переноса наименований



4. Смысловые ряды слов

Если слова по своим значениям

очень **близки**, а по смысловым или стилистическим оттенкам различаются

безграничный, необозримый, бескрайний; врач, доктор; губы, уста

1 → **СИНОНИМЫ**

различаются, а по форме

одинаковы

горн (музыкальный духовой инструмент), *горн* (приспособление в кузнице)

2 → **ОМОНИМЫ**

похожи

глиняный, глинистый; невежа, невежда

3 → **ПАРОНИМЫ**

противопоставлены друг другу

высокий — низкий; старый — новый; больной — здоровый

4 → **АНТОНИМЫ**

5. Как отличить многозначное слово от омонима?

Если слово имеет

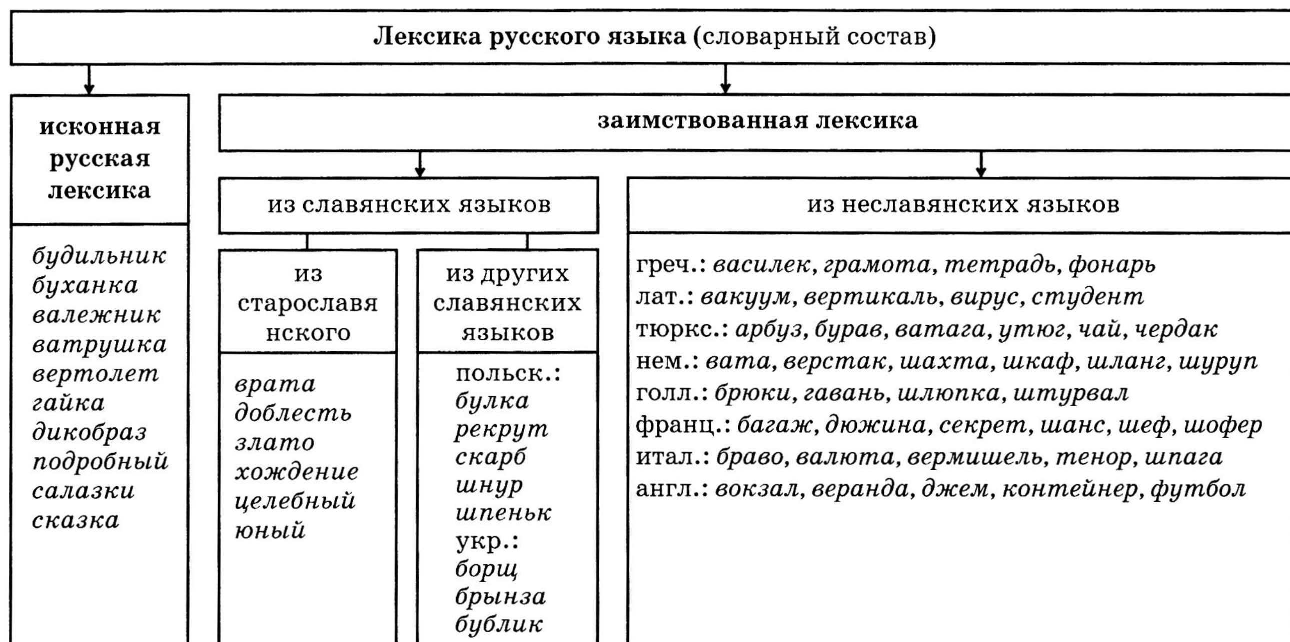
1. **одинаковые** или близкие по смыслу **синонимы** → **МНОГОЗНАЧНОЕ СЛОВО**
2. **одинаковые формы** при изменении слов → **МНОГОЗНАЧНОЕ СЛОВО**
3. **одинаковые словообразовательные средства** → **МНОГОЗНАЧНОЕ СЛОВО**
4. **разные синонимы** → **ОМОНИМЫ** (разные слова)
5. **разные формы** при изменении слов → **ОМОНИМЫ** (разные слова)
6. **разные словообразовательные средства** → **ОМОНИМЫ** (разные слова)

6. Место русского языка среди других славянских языков

Индоевропейские языки

- неславянские
- славянские
  - западнославянские: чешский, словацкий, польский, лужицкий
  - восточнославянские: украинский, русский, белорусский
  - южнославянские: старославянский, болгарский, македонский, сербскохорватский, словенский

7. Лексика с точки зрения ее происхождения



8. Основные признаки старославянизмов

Старославянизмы имеют признаки

фонетические

в начале слова		неполногласие		чередования	
ст.-сл.	русск.	ст.-сл.	русск.	ст.-сл.	русск.
***а**: аз, агнец*	***я**: я, ягненок*	***ра**: град, брада, краткий*	***оро**: город, борода, короткий*	***д/жд***	***д/ж***
***е**: един, Елена*	***о**: один, льна*	***ла**: глас, власы*	***оло**: голос, волосы*	*водить*: *вождь*	*водить*: *вожак*
***ю**: юшка*	***у**: уха*	***ре**: брег, пред*	***ере**: берег, перед*	*перед*: *прежде*	*перед*: *опережать*
***ра**: равный*	***ро**: ровный*	***ле**: плен, влечь, шлем*	***оло/ело**: полонить, волочить, ошеломить*	***т/щ***	***т/ч***
***ла**: ладья*	***ло**: лодка*			*свет*: *освещение*	*свет*: *свечение*

морфологические

суффиксы	
ст.-сл.	русск.
***-тель**: сеятель, хранитель*	
***-ени (е)**: учение, повеление*	
-ущ- (-ющ-) ***-ащ- (-ящ-)*** *горящий, могущий, сидящий*	***-уч- (-юч-)*** ***-ач- (-яч-)*** *горячий, могучий, сидячий*
приставки	
***из-**: излить*	***вы-**: вылить*
вос- (воз-)	***вс-***
пре-	***пере-***
пред-	***перед-***
чрез-	***черес-***
низ-	***с-***

9. Лексика с точки зрения сферы ее употребления

Если слово в современном русском языке

- **употребляется свободно, неограниченно** → 1 → **ОБЩЕЫПОТРЕБИТЕЛЬНАЯ**
- **не вошло в состав свободно употребляемой лексики**
  - употребляется в определенной сфере деятельности (наука, делопроизводство и т. д.): *дефи́с*, *рашпиль*, *нахлёстка*, *скальпель* → 2 → **ПРОФЕССИОНАЛНАЯ И ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКАЯ**
  - употребляется на определенной территории: *голи́цы* (*варежки*), *балка* (*овраг*), *гай* (*лес*), *стёжка* (*тропинка*) → 3 → **ДИАЛЕКТНАЯ**
  - употребляется определенной группой лиц для наименования предметов, имеющих в литературном языке свои названия: *колёса* (нарк. таблетки), *упакованный* (богатый), *тачка* (такси) → 4 → **ЖАРГОННАЯ**

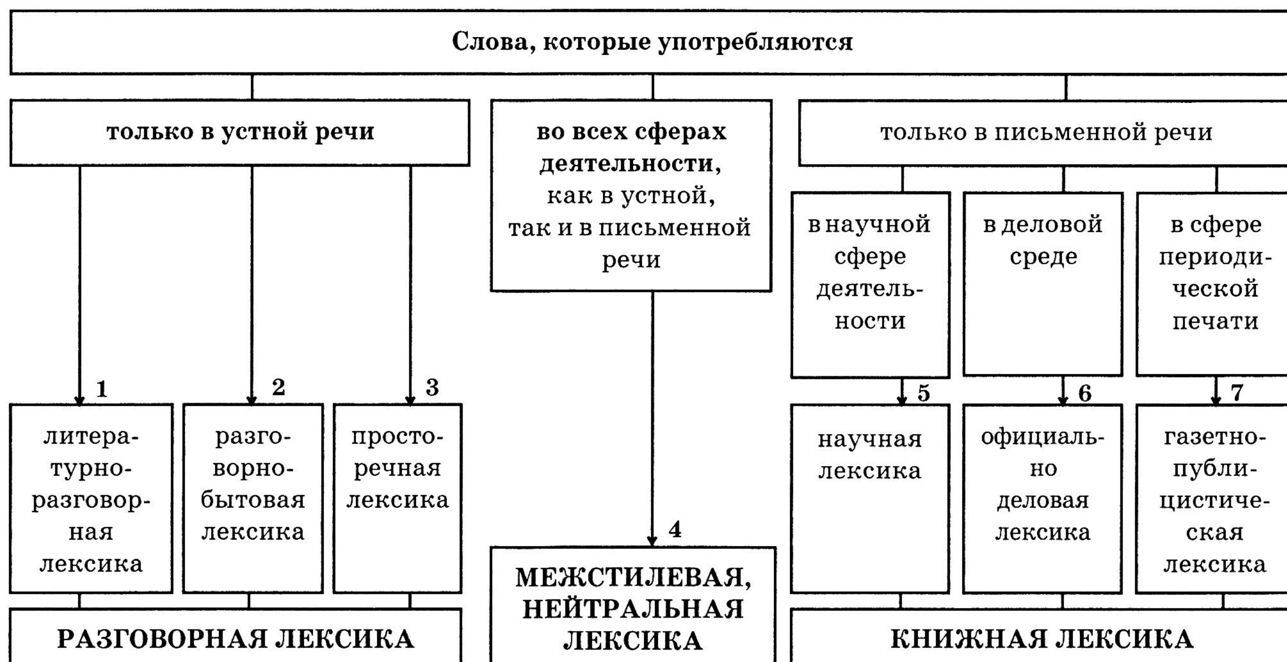
1	2	3	4
ОБЩЕЫПОТРЕБИТЕЛЬНАЯ	ПРОФЕССИОНАЛНАЯ И ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКАЯ	ДИАЛЕКТНАЯ	ЖАРГОННАЯ
ЛЕКСИКА			

10. Лексика с точки зрения ее активного и пассивного запаса

Лексика современного русского языка

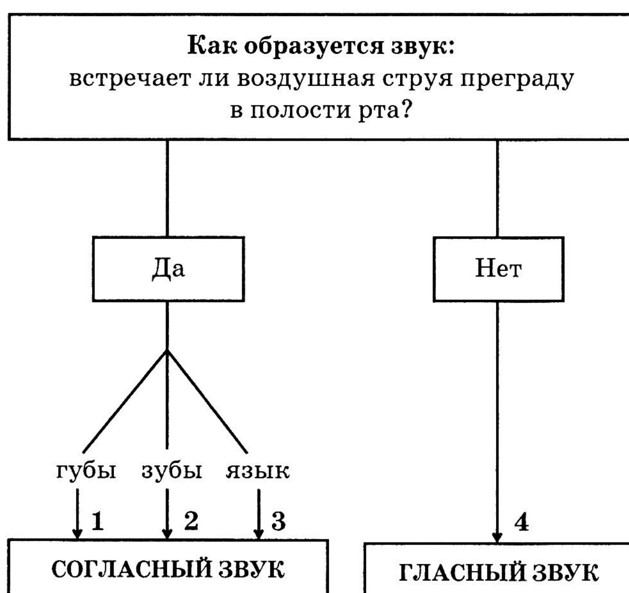
- **слова активного употребления** (используются повседневно): *дом*, *веселый*, *смеяться*, *хорошо* → 1 → **АКТИВНЫЙ ЗАПАС**
- **неологизмы**
  - общеязыковые (возникают для обозначения новых понятий): *космодром*, *атомщик*, *прилуниться*, *голубой экран*, *ракетодром* → 2 → **АКТИВНЫЙ ЗАПАС**
  - индивидуально-речевые (авторские): *цветь*, *звень* (Есенин); *чемберленье* (Маяковский) → 3 → **ПАССИВНЫЙ ЗАПАС**
- **устаревшие слова** (вышли из активного употребления)
  - историзмы (исчезли соответствующие реалии): *боярин*, *бурмистр*, *вече*, *царь* → 4 → **ПАССИВНЫЙ ЗАПАС**
  - архаизмы (появились новые названия реалий): *ланиты* (*щеки*), *вежды* (*веки*), *длань* (*ладонь*) → 5 → **ПАССИВНЫЙ ЗАПАС**

11. Лексика с точки зрения ее стилевой принадлежности



ФОНЕТИКА

12. Гласные и согласные звуки



13. Как передан звук на письме: одной или двумя буквами?

На письме звук может быть обозначен			
одной буквой	**двумя буквами**		
	в сочетании с мягким знаком	одина-ковыми	разными
дом [д][о][м] *бил* [б’][и][л]	*день* [н’] *моль* [л’]	*рассвет* [с] *жжёт* [ж]	*сжёг* [ж] *сшил* [ш] *детский* [ц]
—	мягкий согласный	долгий согласный	

14. Сколько звуков может быть обозначено одной буквой?

Одной буквой может быть обозначен:

один звук	два звука	нет звука на месте буквы
ряд [а]	*яблоко* [ja]	*день* [-]
льд [о]	*льёт* [jo]	*сердце* [-]
тюль [у]	*мою* [jу]	*вестник* [-]
лес [э]	*въезд* [jэ]	*съел* [-]

15. Какие звуки передают буквы *е*, *ь*, *ю*, *я*?

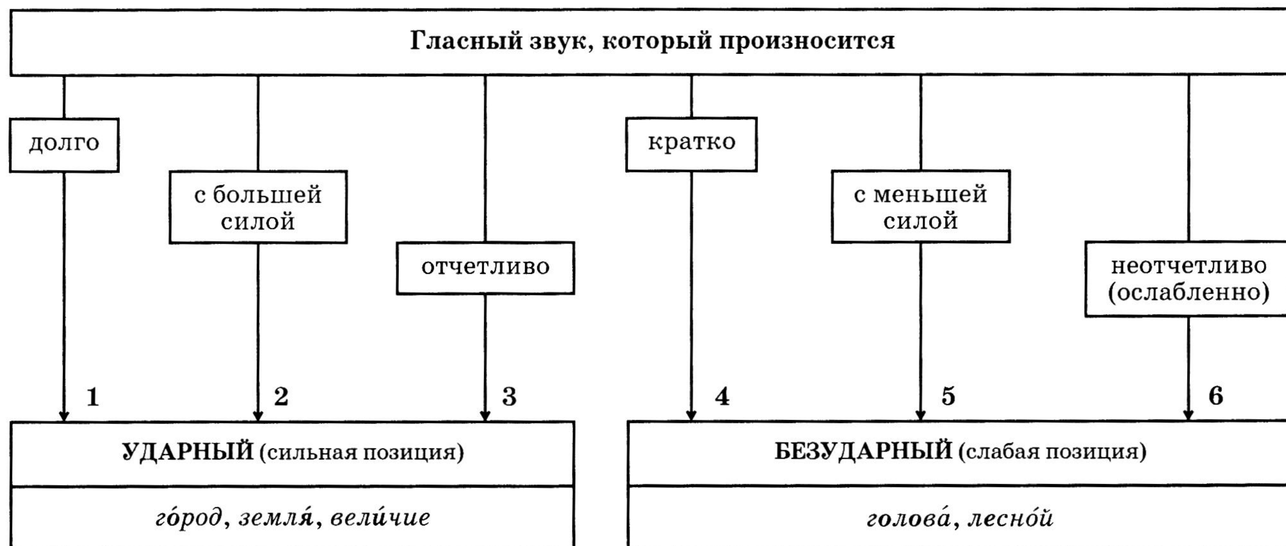
Буквы *е*, *ь*, *ю*, *я* передают звуки:

[jэ], [jo], [jу], [ja]			[э], [о], [у], [а]
в начале слова:	после *ь* и *ъ*:	после гласных:	после согласных, являясь средством обозначения их мягкости на письме:
есть *ель* *ёж* *ёмкий* *юла* *юбка* *яма* *язва*	*взморье* *побережье* *питьё* *ружьё* *вьюк* *пью* *объехать* *съюлить* *объявление*	*новая* *моё* *крою* *твоя* *взятие* *горение* *здание* *армия* *синяя*	*лес* *медный* *плёс* *крюк* *мята* *клятва* *вялый*

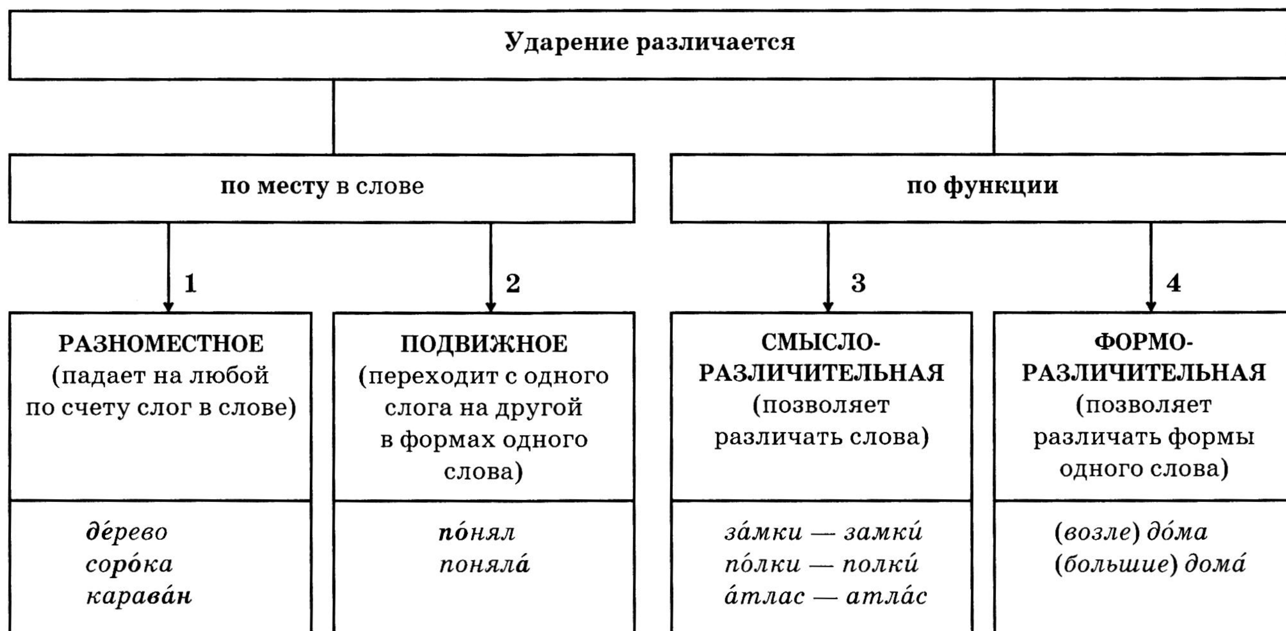
16. Различие гласных звуков по их артикуляции

Подъем	Ряд		
	передний	средний	задний
Верхний	[и]	[ы]	[у]
Средний	[э]		[о]
Нижний		[а]	
	неогубленные		огубленные

17. Гласные звуки: ударные — безударные



18. Роль ударения в слове



19. Как изменяются гласные звуки [а], [о], [э]?

Находится ли гласный под ударением (в сильной позиции)?

Да — звук не изменяется

ма́ма [а́]
се́рый [э́]
го́рдый [о́]
э́тот [э́]

→ 1 **сильная позиция**

Нет — звук изменяется

в первом предударном слоге

после твердых согласных:
[а], [о] → [ʌ]
не различаются в звучании
валы́ [ʌ]
волы́ [ʌ]

→ 2 **1-я слабая позиция**

после мягких согласных:
[а], [э] → [иэ]
часы́ [иэ]
леса́ [иэ]

→ 3 **1-я слабая позиция**

в начале слова

[а], [о] → [ʌ]
арба́ [ʌ]
окно́ [ʌ]

→ 4 **начало слова**

в остальных слогах

после твердых согласных:
[а], [о], [э] → [ъ]
садово́д [ъ][ʌ]
города́ [ъ][ʌ]
го́рода [ъ][ъ]
но́вого [ъ][ъ]

→ 5 **2-я слабая позиция**

после мягких согласных:
[а], [э] → [ь]
часово́й [ь]
лесово́з [ь]
ба́ня [ь]
по́ле [ь]

→ 6 **2-я слабая позиция**

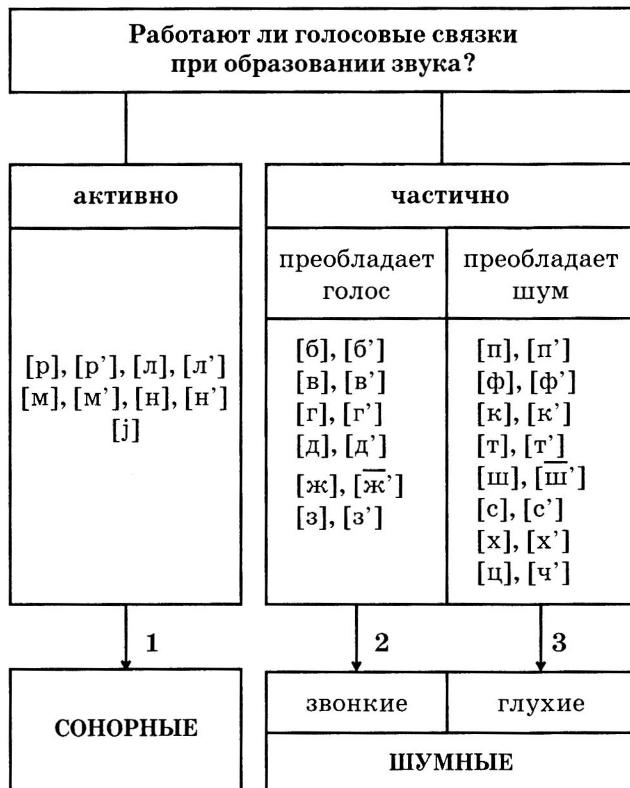
20. Согласные звуки по месту образования



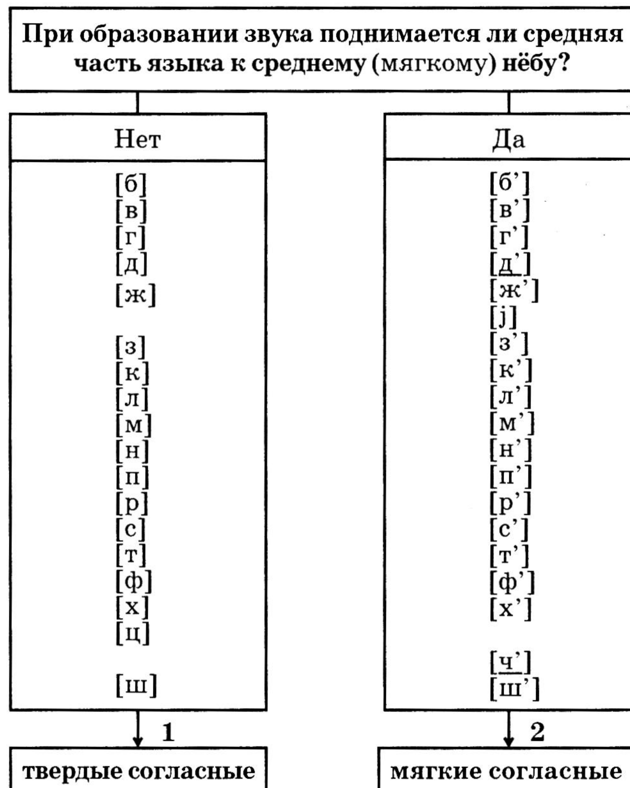
21. Согласные звуки по способу образования



22. Согласные звуки: сонорные и шумные



23. Согласные звуки: твердые и мягкие



24. Как изменяются согласные звуки в слове? (понетические законы в области согласных)

каходится ли согласный звук перед гласным, сонорным или перед [в], [в']
(сильная позиция для согласных)?

Да → звук не изменяется:
слабый [сл][б]
правда [пр] [д]
подыскать [п][д] [к]
подвал [п][дв]
свить [св']
— **СИЛЬНАЯ ПОЗИЦИЯ**

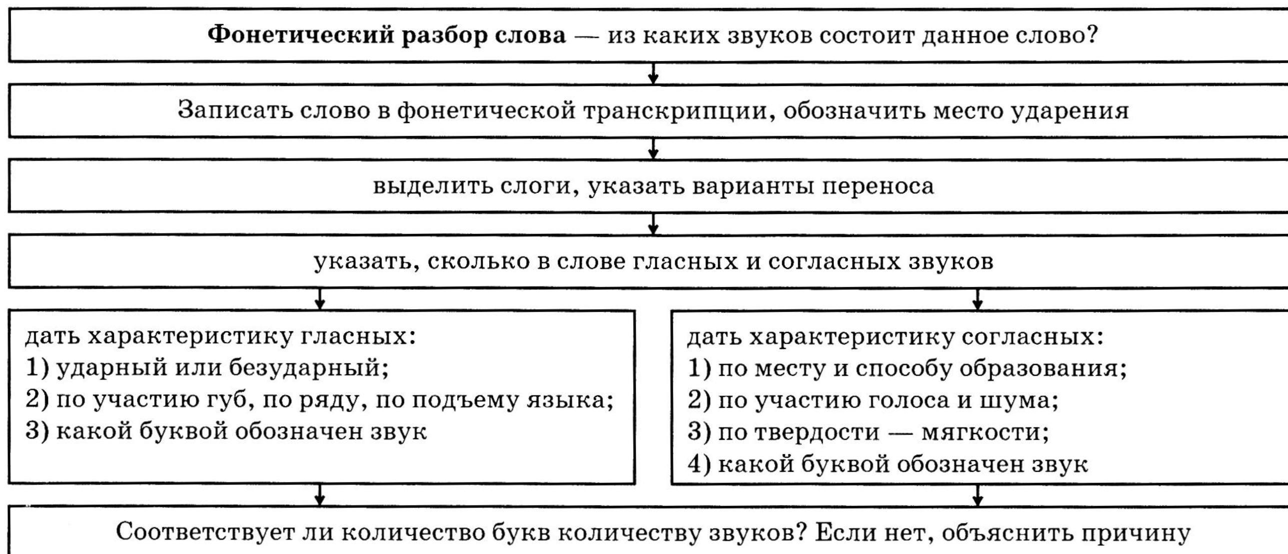
Нет → звук изменяется:

звонкий перед глухим становится глухим	глухой перед звонким становится звонким	твердый перед мягким, если одинаковое место образования, становится мягким	звонкий в конце слова оглушается
подшить [т] *надписать* [т] *вперед* [ф]	*просьба* [з'] *молотьба* [д']	*власть* [с'т'] *дневной* [д'н'] *смерч* [р'ч'] *вместе* [в'м'][с'т']	*дуб* [п] *ряд* [т] *воз* [с]
ассимиляция (уподобление одного звука другому, рядом стоящему)			**закон конца слова**
по глухости	**по звонкости**	**по мягкости**	

Нет → звук не произносится (выпадает):
сердце [рц]
праздник [з'н']
совестный [сн]
— **упрощение групп согласных**

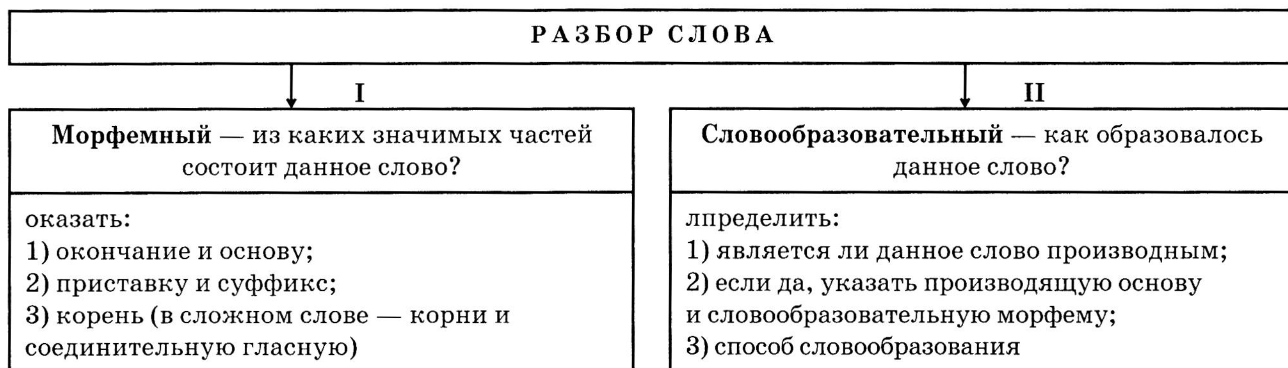
СЛАБАЯ ПОЗИЦИЯ

25. Схема фонетического разбора слова



МОРФЕМИКА. СЛОВООБРАЗОВАНИЕ

26. Последовательность разбора слова по составу



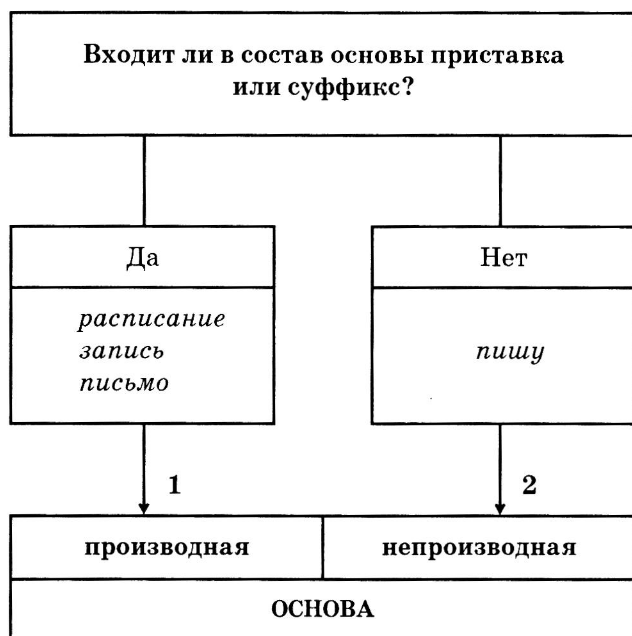
27. Как найти окончание и основу слова?

Слово

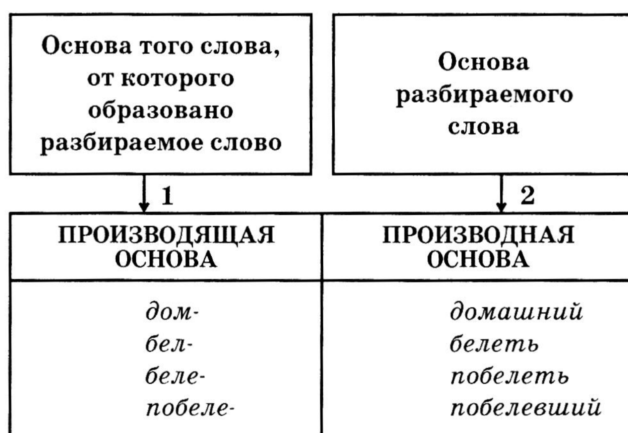
- **неизменяемое**
  - 1 → Все слово представляет собой основу
- **изменяемое**
  - глагол
    - в неопределенной форме → 2 → Отбрасывая суффикс инфинитива → находим основу неопределенной формы
    - в форме прошедшего времени → 3 → Отбрасывая суффикс *-л-* и родовое окончание → находим основу неопределенной формы
    - в форме настоящего или простого будущего времени → 4 → 1. Спрягая слово, находим личное окончание. 2. Отбрасывая окончание, находим основу настоящего или простого будущего времени
  - части речи, изменяемые по падежам → 5 → 1. Склоняя слово, находим падежное окончание. 2. Отбрасывая окончание, находим основу

Примечание. Одна и та же основа (например, основа *привлекательн-* прилагательного *привлекательный*) может быть п р о и з в о д н о й (по отношению к основе *привлека-* глагола *привлекать*) и в то же время п р о и з в о д я щ е й (для основы существительного *привлекательность*).

28. Основа: производная или непроизводная?



29. Основа: производящая или производная?



Чтобы выяснить, сколько в данном слове суффиксов и приставок, необходимо последовательно, пока не получится непроизводная основа (корень), сравнивать путем наложения две основы — производную и производящую. капример: *привлекательность — привлекательный — привлекать — привлек — влек*. е результате в слове *привлекательность* выделяем суффиксы *-ость*, *-тельн-*, *-а-*; приставку *при-*.

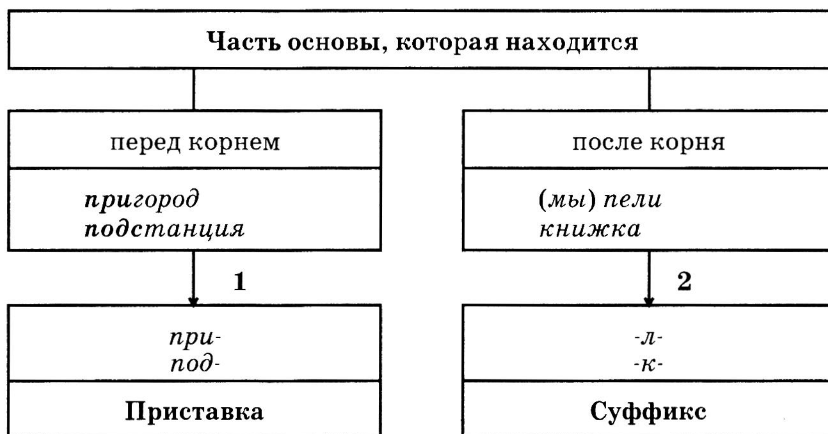
30. Как найти корень слова?

Чтобы найти корень слова, нужно:

1) подобрать несколько родственных слов (со сходной основой);
2) найти в этих словах такую часть, которая несет основное лексическое значение и является

во всех словах одинаковой	отличается только чередованием	
	согласных	гласных
зима *зимовка* *зазимовать* *зимний*	*езжу* *поездка* *поезд*	*излагать* *предполагаю* *расположить*
1	2	3
-зим-	*-езж-* *-езд-*	*-лаг-* *-лож-*
Корень слова		

31. Приставка и суффикс



32. Общая схема морфемного состава слова

В любом слове есть

В неизменяемом слове есть только

В изменяемом слове обязательно есть

основа

окончание

В любой основе есть

В непроизводной основе есть только

В производной основе обязательно есть

корень

приставка или суффикс (или и то и другое)

В сложном слове два (или больше) корня; между ними может стоять соединительная гласная

В слове может быть две приставки или два суффикса (или больше)

33. Основные способы образования слов

Способы словообразования

- одна производящая основа (4–7)
- не менее двух производящих основ (8–9)

№	Примеры	Способ
1	*спутник^1 → спутник^2* *ячмень^1 → ячмень^2*	**Лексико-семантический (образование омонимов)**
2	*мороженое (молоко) → (вкусное) мороженое*	**Морфолого-синтаксический (переход из одной части речи в другую)**
3	*тот + час → тотчас* *сего + дня → сегодня* *быстро + растворимый → быстрорастворимый*	**Лексико-синтаксический (образование слова из словосочетания)**
4	*ходить → **пере** + ходить* *ехать → **подъ** + ехать*	префиксальный (приставочный)
5	*город → город + **ск-ой*** *читать → чит + **к-а***	суффиксальный
6	*гора → **при**+гор + **ок*** *море → **за**+мор + **ск-ий***	префиксально-суффиксальный
7	*иск-ать → иск* *выход-ить → выход* *физик-а → физик*	безаффиксный (минус суффикс или окончание)
8	*диван-кровать* *сбербанк* *водопровод* *ООН, НТВ, СНГ*	сложение (полных и сокращенных основ)
9	*легк + о + атлет + ическ-ий* *земл + е + черпа-лк-а*	сложение + суффикс

Способы 4–9: **Морфологический**



34. Общая схема словообразовательного анализа слова

<table>
<tr><td colspan="3">Является ли слово производным?</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td colspan="2">Да. В слове есть</td></tr>
<tr><td rowspan="4">добрый</td><td>производящая основа — это основа того (более простого по своему строению) родственного слова, от которого образовано данное слово</td><td>словообразовательная морфема — приставка, суффикс</td></tr>
<tr><td colspan="2">доброта</td></tr>
<tr><td>добр-</td><td>-от-</td></tr>
<tr><td>производящая основа</td><td>словообразовательная морфема</td></tr>
</table>

МОРФОЛОГИЯ

35. Последовательность морфологической характеристики слова

Части речи (знаменательные и служебные)	
изменяемые	неизменяемые
1. Наименование части речи	1. Наименование части речи
2. Начальная форма	
3. Разряд по значению	2. Разряд по значению
4. Постоянные для данной части речи морфологические признаки	
5. Признаки формы, употребленной в данном предложении	3. Разряд по структуре
6. Синтаксическая функция (член предложения)	4. Роль в предложении (член предложения; средство соединения слов, частей предложения, предложений и т. п.)
7. Особенности правописания (если есть)	5. Особенности правописания (если есть)

36. Классификация частей речи

Слово, которое

- **обозначает**
  - **и называет**
    - предмет → 1
    - признак (свойство, качество) предмета → 2
    - количество предметов или порядковый номер → 3
  - **не называет, а указывает**
    - на предмет → 4
    - на свойство предмета → 5
  - **действие или состояние** → 6
  - **признак действия** → 7
  - **признак другого признака** → 8
  - **чувство, состояние**
    - не только обозначает, но и → 9
    - только обозначает, но не называет → 10
- **связывает**
  - предложения → 11
  - члены предложения (слова). Управляет ли падежом?
    - Нет → 12
    - Да → 13
- **вносит в речь смысловые и эмоциональные оттенки** → 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Имя существительное	**Имя прилагательное**	**Имя числительное**	**Местоимение**		**Глагол**	**Наречие**		**[Одна из самостоятельных частей речи]**	**Междометие**	**Союз**		**Предлог**	**Частица**
земля	*добрый*	*семь седьмой*	*он*	*какой*	*работать болеть*	*уверенно (побеждает)*	*очень (хороший)*	*досада досадно*	*эх*	*чтобы*	*и*	*через*	*даже*
самостоятельные (знаменательные) — обозначают явления, существующие в объективной действительности									**служебные (незнаменательные) — выражают отношения между словами и предложениями**				
ЧАСТИ РЕЧИ													

ЗНАМЕНАТЕЛЬНЫЕ ЧАСТИ РЕЧИ: ПОСТОЯННЫЕ ПРИЗНАКИ

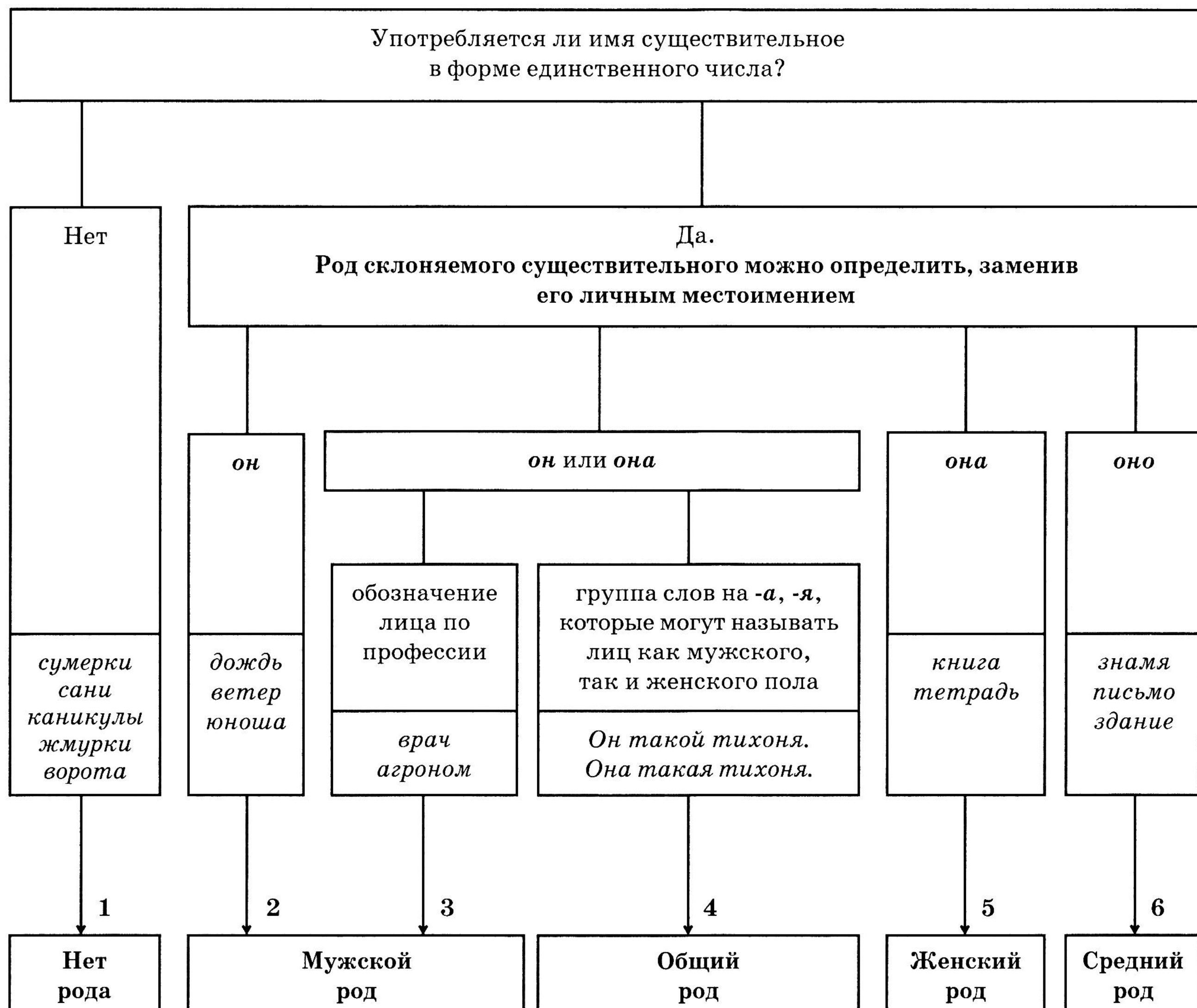
37. Существительное: одушевленное или неодушевленное?

Если форма винительного падежа множественного числа совпадает с формой	
родительного падежа множественного числа	**именительного падежа множественного числа**
учеников *медведей* *раков* *москвичей* (жителей Москвы) (*взял*) *королей, валетов* (игральные карты) (*купил*) *кукол* (*нашел*) *спутников* (нам по пути)	*березы* *личинки* «*Москвичи*» (автомобили) (*запускать*) *искусственные спутники Земли*
↓ 1	↓ 2
ОДУШЕВЛЕННЫЕ	**НЕОДУШЕВЛЕННЫЕ**

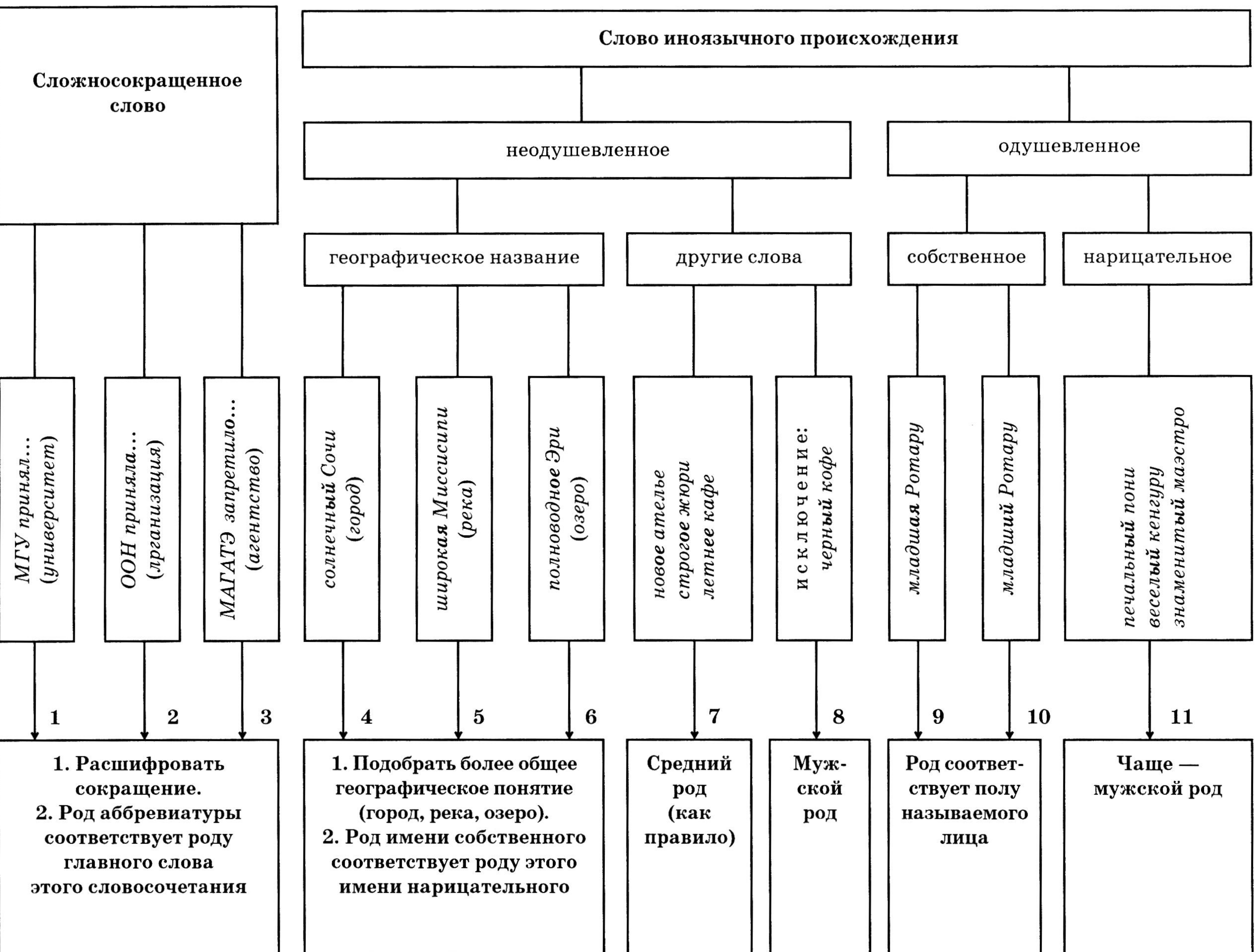
38.Существительное: собственное или нарицательное?

Если имя существительное является	
обобщенным наименованием однородных предметов	**названием единичного предмета, выделенного из ряда однородных**
озеро *река* *гора* *автомобиль* *орден* (награда) *человек*	*Байкал* *Ангара* *Машук* *«Волга»* *«Знак почета»* *Юрий*
↓ 1	↓ 2
НАРИЦАТЕЛЬНОЕ	**СОБСТВЕННОЕ**

39. Род склоняемых существительных



40. Род несклоняемых существительных



41. Типы склонений имен существительных

Если имя существительное

- не изменяется по падежам (падеж определяется по прилагательному)
- изменяется по падежам
  - но у него нет формы единственного числа
  - **Какое окончание имеет начальная форма слова (им. п. ед. ч.)? (Обратите внимание на последние буквы слова!)**

№	Условие	Примеры	Тип склонения
1	не изменяется по падежам (падеж определяется по прилагательному)	*кино, коммюнике*	Не имеет склонения
2	изменяется по падежам, но у него нет формы единственного числа	*ножницы*	Склоняется только во мн. числе
3	*-а*	*волна*	Первое склонение
4	*-я* в словах мужского, а также общего рода	*дядя, тихоня*	Первое склонение
5	*-я* в словах женского рода. Образовано ли слово от прилагательного (или причастия)? — Нет	*земля*	Первое склонение
6	*-я* в словах женского рода. Образовано ли слово от прилагательного (или причастия)? — Да (слова на *-ая*)	*столов**ая**, учащ**ая**ся*	Склоняется как прилагательное (или причастие)
7	*-я* в словах среднего рода на ***мя*** + слово *дитя*	*вре**мя**, бре**мя**, стре**мя**, вы**мя**, зна**мя**, пла**мя**, и**мя**, пле**мя**, се**мя**, те**мя** + дитя*	Разносклоняемое
8	нулевое (последняя буква — согласная, кроме ***й***)	*город*	Второе склонение
9	нулевое — последняя буква ***й***. Образовано ли слово от прилагательного (или причастия)? — Нет	*трамвай*	Второе склонение
10	нулевое — последняя буква ***й***. Образовано ли слово от прилагательного (или причастия)? — Да (слова на ***-ий, -ой, -ый***)	*часов**ой**, учащ**ий**ся*	Склоняется как прилагательное (или причастие)
11	*-е*. Образовано ли слово от прилагательного (или причастия)? — Да (слова на ***-ее, -ое***)	*будущ**ее**, морожен**ое***	Склоняется как прилагательное (или причастие)
12	*-е*. Образовано ли слово от прилагательного (или причастия)? — Нет	*поле*	Второе склонение
13	*-о*	*окно*	Второе склонение
14	нулевое — последняя буква ***ь***. В словах мужского рода (кроме слова *путь*)	*дождь*	Второе склонение
15	нулевое — последняя буква ***ь***. *путь*	*путь*	Разносклоняемое
16	нулевое — последняя буква ***ь***. В словах женского рода	*жизнь*	Третье склонение

42. Разряды имен прилагательных

Такой признак предмета, который

выражает его качество и воспринимается сам по себе, независимо от других предметов (основа такого прилагательного, как правило, непроизводная)

новый, нов, новее
тихий, тих, самый тихий
разумный, разумен, разумнейший

→ 1

выражает отношение одного предмета или явления к другому предмету или явлению (основа всегда производная)

одушевленному (лицу или животному)

отцов (пиджак)
заячий (мех)

→ 2

неодушевленному

серебряная (чаша)
городской (парк)
книжный (магазин)

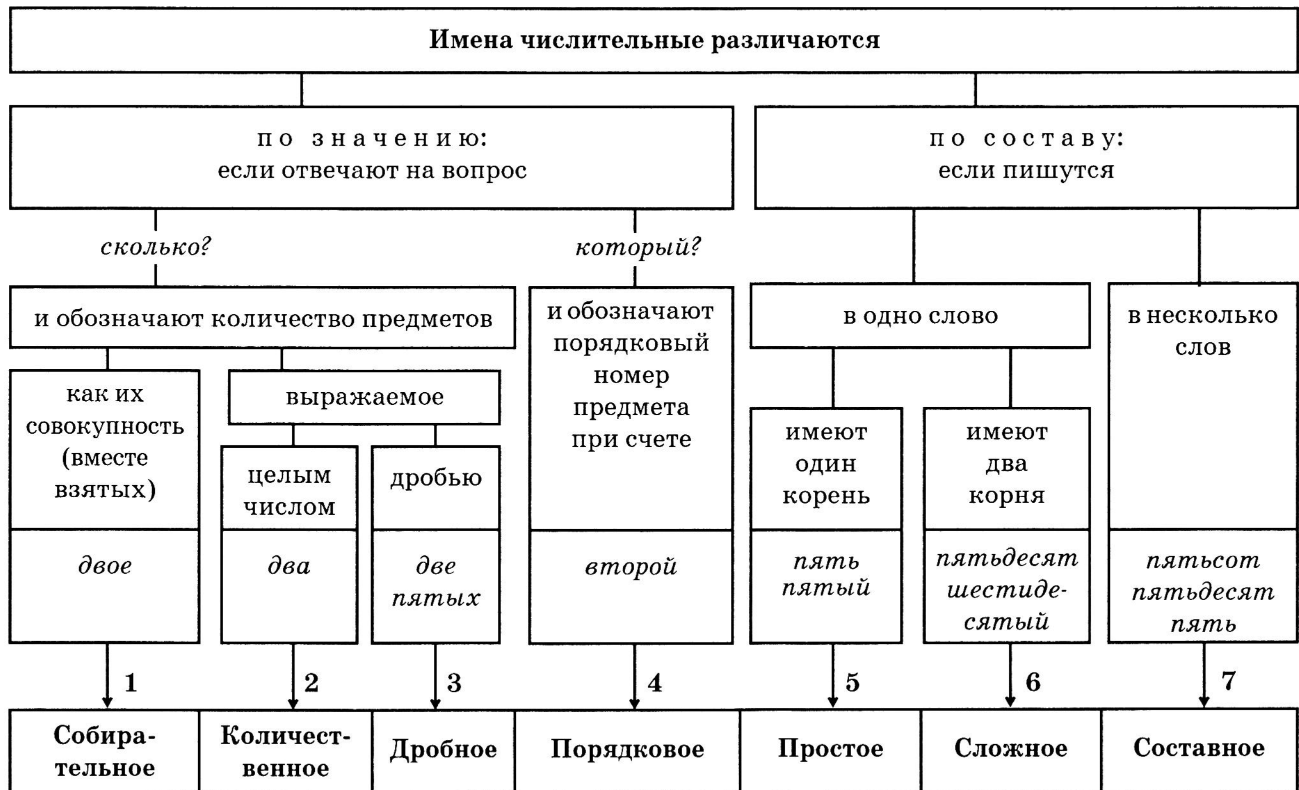
→ 3

КАЧЕСТВЕННОЕ	ПРИТЯЖАТЕЛЬНОЕ	ОТНОСИТЕЛЬНОЕ
могут иметь краткую форму, степени сравнения, синонимы, антонимы; образуют отвлеченные существительные	не имеют степеней сравнения	не имеют кратких форм, степеней сравнения, синонимов, антонимов

43. Типы склонения имен прилагательных



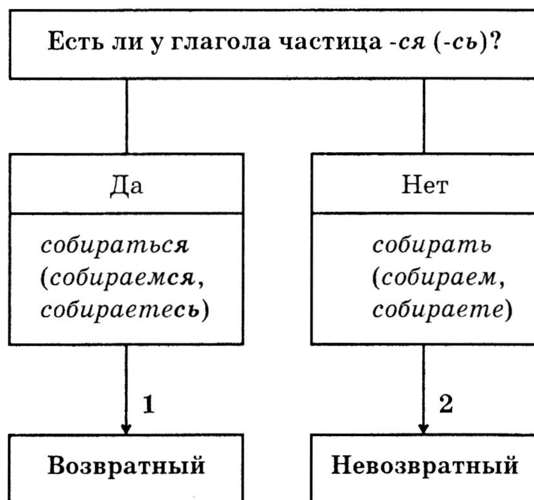
44. Разряды имен числительных



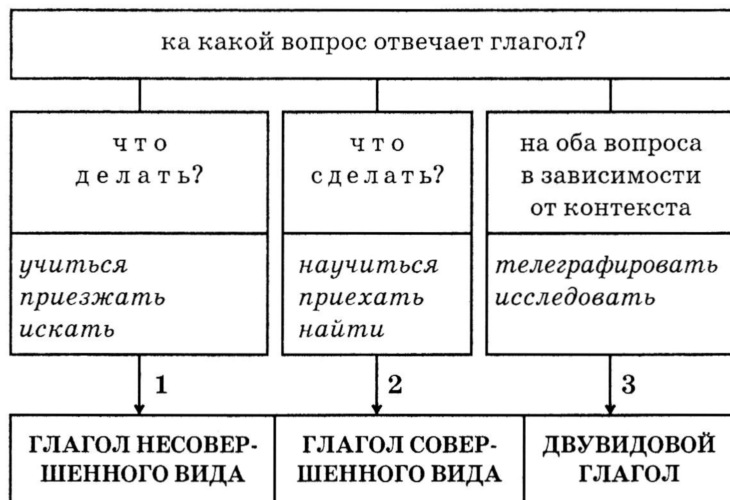
45. Разряды местоимений

МЕСТОИМЕНИЯ								
я мы ты вы он она оно они	*себя* (не имеет формы именительного падежа)	*этот тот такой таков столько*	*мой твой наш ваш свой его ее их*	*весь всякий каждый сам самый любой иной другой*	*кто, что, какой, который, чей, сколько* Если слово употребляется:		*никто ничто никакой ничей не́кого не́чего*	*не́кто не́что не́который не́кий не́сколько кто-то что-нибудь кое-какой* и др.
					в вопросительном значении	для связи главной и придаточной частей в сложноподчиненном предложении		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Личные	**Возвратное**	**Указательные**	**Притяжательные**	**Определительные**	**Вопросительные**	**Относительные**	**Отрицательные**	**Неопределенные**

46. Глагол: возвратный или невозвратный?



47. Глагол: совершенного или несовершенного вида?



48. Глагол: переходный или непереходный?

Если глагол

может управлять дополнением

без предлога

в винительном падеже

в родительном падеже

при обозначении части вещества

при глаголах со значением достижения, лишения

при переходном глаголе с отрицанием

в остальных случаях

в дательном падеже

в творительном падеже

с предлогом

не может управлять дополнением

т. е. может иметь при себе прямое дополнение

т. е. может иметь при себе косвенное дополнение

1

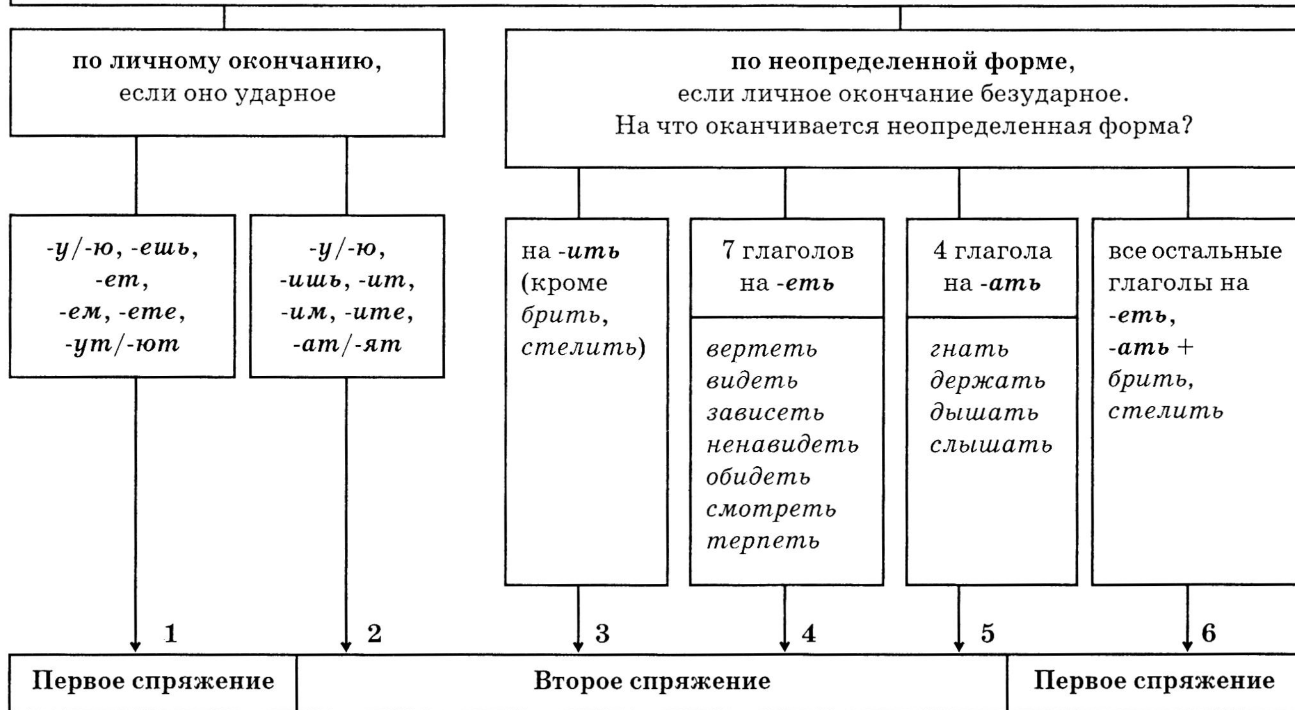
2

3

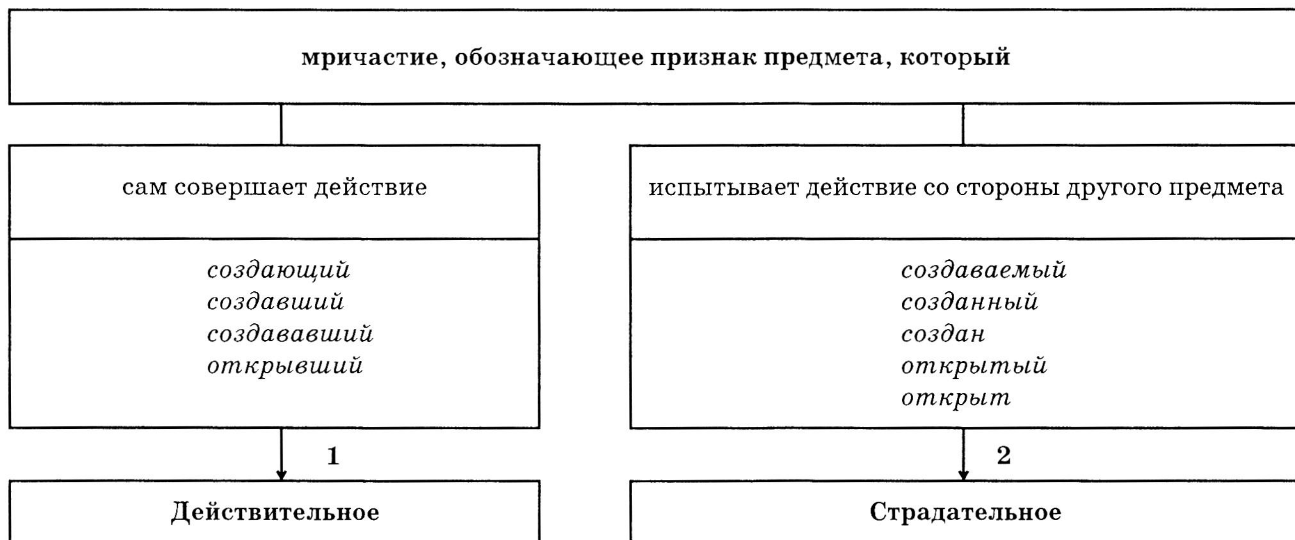
Переходный

Непереходный

49. Спряжение глаголов



50. Причастие: действительное или страдательное?



ЗНАМЕНАТЕЛЬНЫЕ ЧАСТИ РЕЧИ: ПЕРЕМЕННЫЕ ПРИЗНАКИ

51. Прилагательное и страдательное причастие: полная или краткая форма?

Какое окончание у прилагательного или страдательного причастия?							
В единственном числе			Во множественном числе	В единственном числе			Во множественном числе
мужской род ***-ый, -ой, -ий***	женский род ***-ая, -яя***	средний род ***-ое, -ее***	***-ые, -ие***	мужской род (нулевое окончание)	женский род ***-а, -я***	средний род ***-о, -е***	***-ы, -и***
добрый *молодой* *синий* *купленный*	*добрая* *молодая* *синяя* *купленная*	*доброе* *молодое* *синее* *купленное*	*добрые* *молодые* *синие* *купленные*	*добр* *тих* *молод* *куплен*	*добра́* *тиха́* *молода́* *куплена*	*до́бро* *мо́лодо* *си́не* *куплено*	*до́бры* *мо́лоды* *си́ни* *куплены*
↓ 1	↓ 2	↓ 3	↓ 4	↓ 5	↓ 6	↓ 7	↓ 8
ПОЛНАЯ ФОРМА				**КРАТКАЯ ФОРМА**			
Может выполнять функции именной части составного сказуемого или согласованного определения				Выполняет функцию именной части составного сказуемого			

52. Степени сравнения прилагательных и наречий

Прилагательное и наречие
- в исходной форме → 1
- с помощью суффиксов *-ее (-ей)*, *-е*, *-ше* — простая форма → 2
- с помощью слов ***более***, ***менее*** — составная форма → 3

Прилагательное
- с помощью суффиксов ***-ейш-***, ***-айш-*** — простая форма → 4

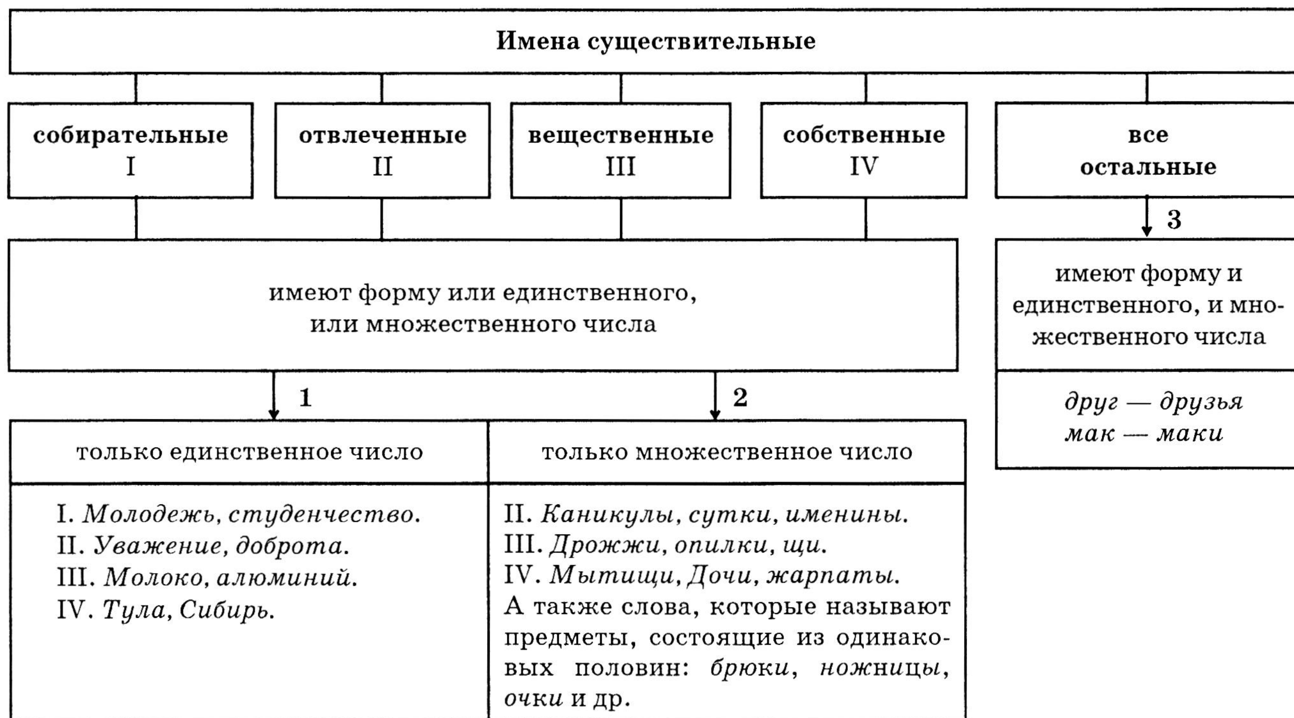
Прилагательное, **Наречие**
- с помощью слов ***наиболее***, ***наименее***, ***самый*** — составная форма → 5

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ	СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ		ПРЕВОСХОДНАЯ СТЕПЕНЬ		
сильный *сильно*	*сильнее (-ей)* *моложе* *тоньше*	***более*** *сильный* ***менее*** *сильно*	*сильнейший* *ярчайший*	***самый*** *сильный* ***наиболее*** *сильный* ***наименее*** *сильный*	*сильнее* ***всех*** ***наиболее*** *сильно* ***наименее*** *сильно*

53. Части речи, изменяемые по родам

Имя прилагательное в форме	полной	*новый*	*новая*	*новое*
	краткой	*нов*	*нова*	*ново*
Имя числительное		*один, два первый, оба*	*одна, две первая, обе*	*одно, два первое, оба*
Местоимение		*он наш*	*она наша*	*оно наше*
Глагол в форме причастия	полного	*сделанн**ый***	*сделанн**ая***	*сделанн**ое***
	краткого	*сделан*	*сделан**а***	*сделан**о***
Глагол в форме	**прошедшего времени**	*пришел*	*пришл**а***	*пришл**о***
	условного наклонения	*пришел бы*	*пришла бы*	*пришло бы*
РОД		**мужской**	**женский**	**средний**

54. Число имен существительных



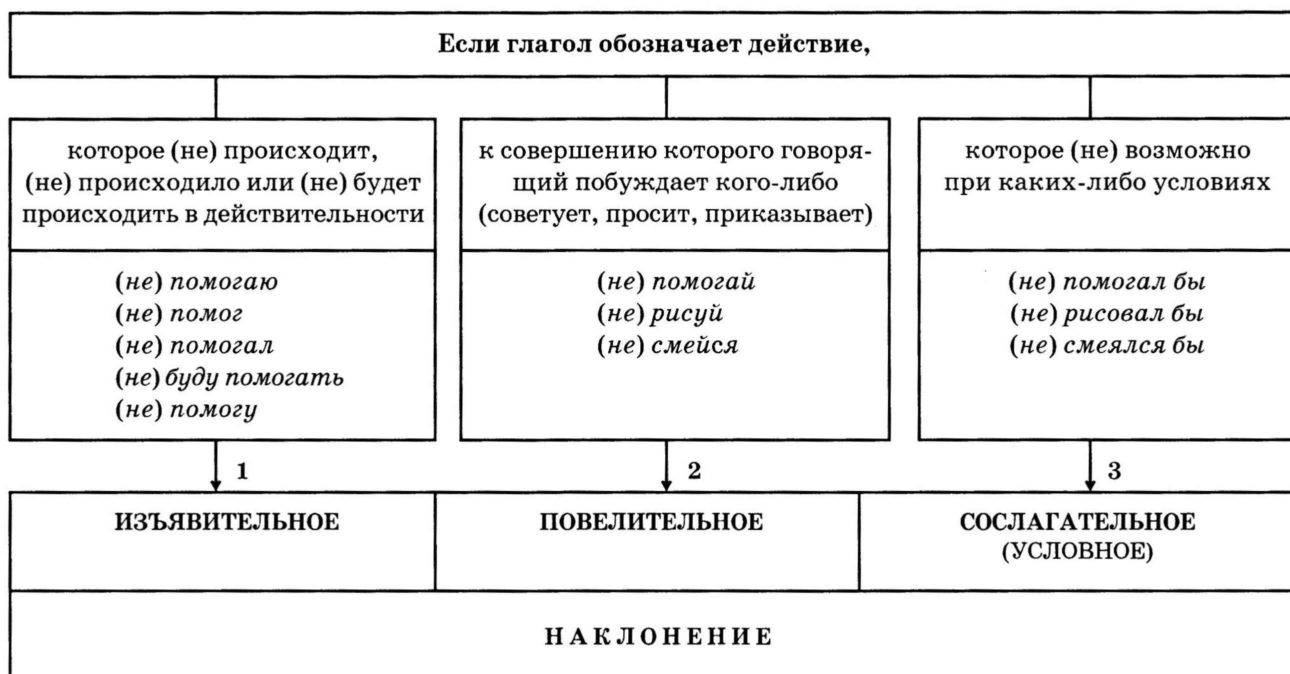
55. Падеж имен существительных

Если имя существительное отвечает на вопрос

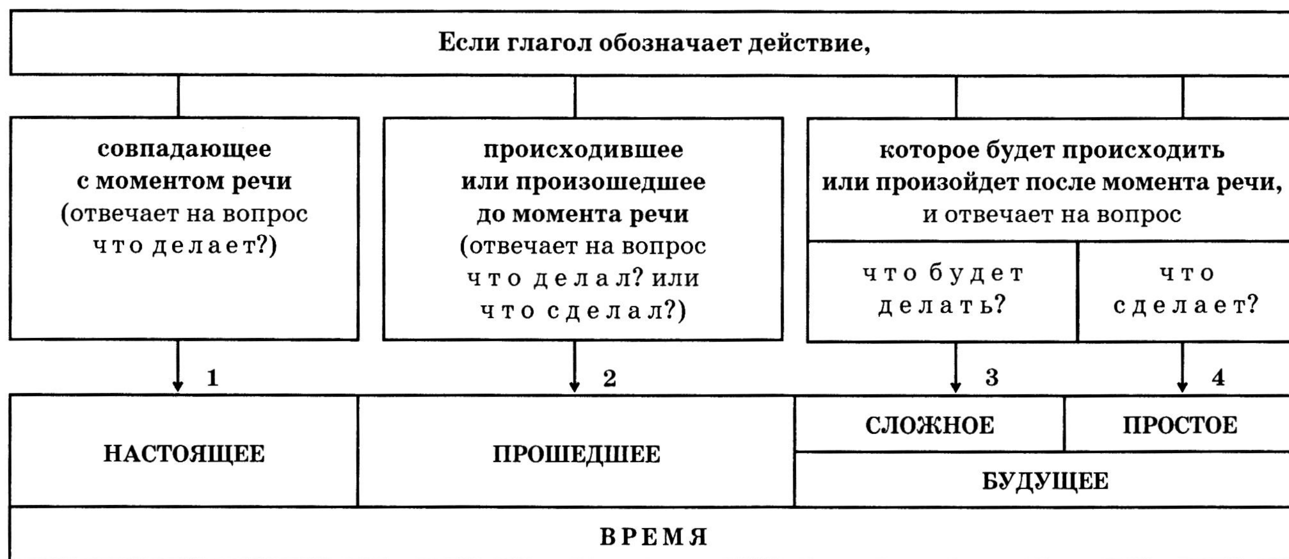
- к т о? → 1 → **именительный**
- ч т о? ка какой вопрос отвечало бы одушевленное существительное в этой позиции?
  - к т о? → 2 → **винительный**
  - к о г о? → 3 → **винительный**
- к о г о? ка какой вопрос отвечало бы неодушевленное существительное в этой же позиции?
  - ч т о? → 4 → **винительный**
  - ч е г о? → 5 → **родительный**
- к о м у? ч е м у? → 6 → **дательный**
- к е м? ч е м? → 7 → **творительный**
- (*в*, *на*, *о*, *при*) к о м? ч ь м? → 8 → **предложный**

П А Д Е Ж

56. Наклонение глаголов



57. Время глаголов



58. Лицо глаголов (в форме настоящего и будущего времени)



59. Род у глаголов (в форме прошедшего времени)

Если глагол обозначает действие, относящееся			
к одному лицу			ко многим лицам
я *ты*			*мы* *вы* *они*
он	*она*	*оно*	
сиял *смеялся*	*сияла* *смеялась*	*сияло* *смеялось*	*сияли* *смеялись*
↓ 1	↓ 2	↓ 3	↓ 4
МУЖСКОЙ	**ЖЕНСКИЙ**	**СРЕДНИЙ**	Во множественном числе различий по роду нет
РОД			

60. Разряды наречий по значению

Если наречие отвечает на вопрос					
когда?	где? куда? откуда?	почему? по какой причине? отчего?	зачем? с какой целью? для чего?	как? каким образом?	в какой мере? в какой степени?
завтра *днем* *засветло* *вскоре*	*здесь* *поблизости* *вокруг* *сбоку*	*сгоряча* *спросонок* *сослепу*	*назло* *насмех* *незачем*	*наскоро* *врукопашную* *вдвоем*	*вдвое* *вдребезги* *вполоборота*
↓ 1	↓ 2	↓ 3	↓ 4	↓ 5	↓ 6
ВРЕМЕНИ	**МЕСТА**	**ПРИЧИНЫ**	**ЦЕЛИ**	**ОБРАЗА** (способа) **ДЕЙСТВИЯ**	**МЕРЫ И СТЕПЕНИ**
Обстоятельственные (сочетаются обычно с глаголами)				Определительные (сочетаются с глаголами, прилагательными и наречиями)	

61. Цхема морфологического анализа имен существительных

1. Начальная форма	именительный падеж единственное число
2. Разряд по значению	конкретное собирательное вещественное отвлеченное
3. Одушевленное — неодушевленное	
4. Собственное — нарицательное	
5. Род	
6. Тип склонения	
7. Число	
8. Падеж	
9. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
10. Особенности правописания (если есть)	

62. Схема морфологического анализа имен прилагательных

1. Начальная форма (определяется по форме слова, с которым приведено в предложении)	
2. Разряд по значению	качественное относительное притяжательное
3. Тип склонения	твердый мягкий смешанный
4. Род	
5. Число	
6. Падеж	
Для качественных прилагательных:	
а) форма	полная краткая
б) степени сравнения	сравнительная превосходная
7. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
8. Особенности правописания (если есть)	

63. Схема морфологического анализа глаголов

1. Начальная форма (инфинитив)	
2. Возвратный — невозвратный	
3. Переходный — непереходный	
4. Вид	совершенный несовершенный
5. Спряжение	первое второе разноспрягаемый глагол
6. Наклонение	изъявительное повелительное сослагательное
7. Время	настоящее будущее прошедшее
8. Лицо и число (для формы настоящего и будущего времени) Род и число (для формы прошедшего времени)	
9. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
10. Особенности правописания (если есть)	

64. Схема морфологического анализа причастий

1. Начальная форма (определяется по слову, к которому относится в предложении)	
2. От какого глагола образовано (указывается в инфинитиве)	
3. Действительное — страдательное	
4. Возвратное — невозвратное (для действительных причастий)	
5. Время	настоящее прошедшее
6. Вид	совершенный несовершенный
7. Число	
8. Падеж	
9. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
10. Особенности правописания (если есть)	

65. Схема морфологического анализа деепричастий

1. От какого глагола образовано (глагол указывается в инфинитиве)	
2. Возвратное — невозвратное	
3. Вид	совершенный несовершенный
4. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
5. Особенности правописания (если есть)	

66. Схема морфологического анализа наречий

1. Разряд по значению	образа действия меры и степени места времени причины цели
2. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
3. Особенности правописания (если есть)	

67. Схема морфологического анализа местоимений

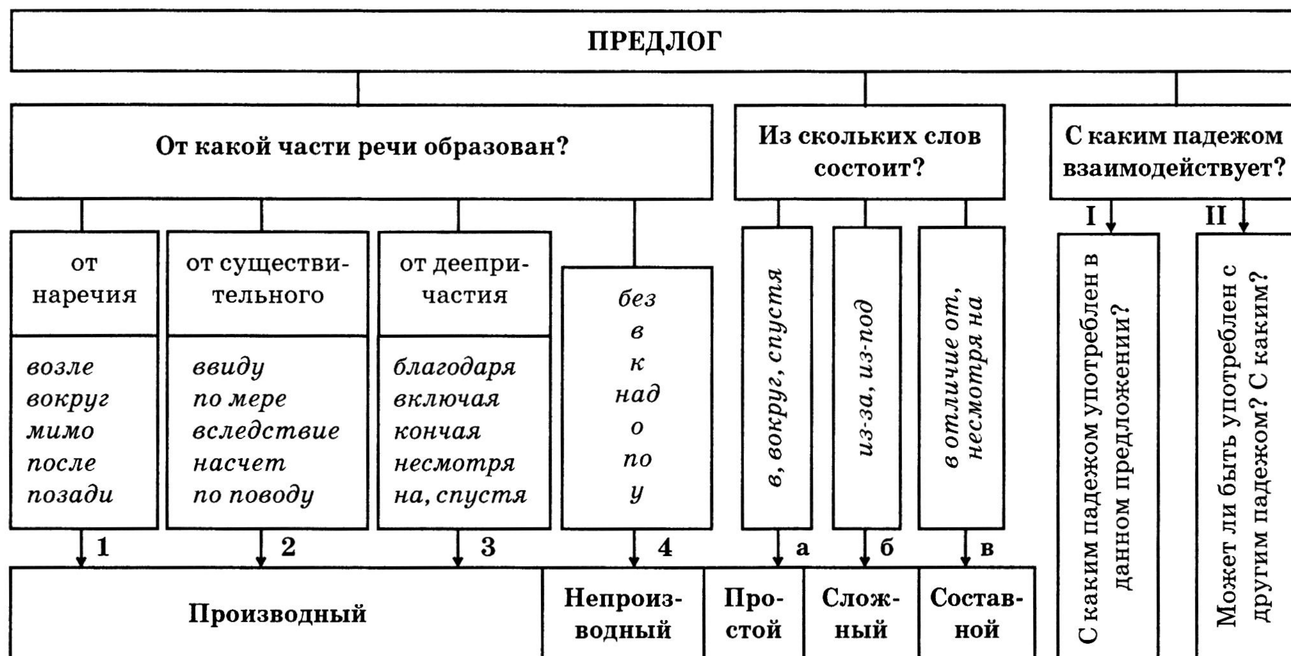
1. Начальная форма	
2. Разряд по значению	личное притяжательное указательное возвратное вопросительное относительное отрицательное неопределенное определительное
3. Род (если есть)	
4. Лицо, число (если есть)	
5. Одушевленное — неодушевленное (если есть)	
6. Падеж	
7. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
8. Особенности правописания (если есть)	

68. Схема морфологического анализа имен числительных

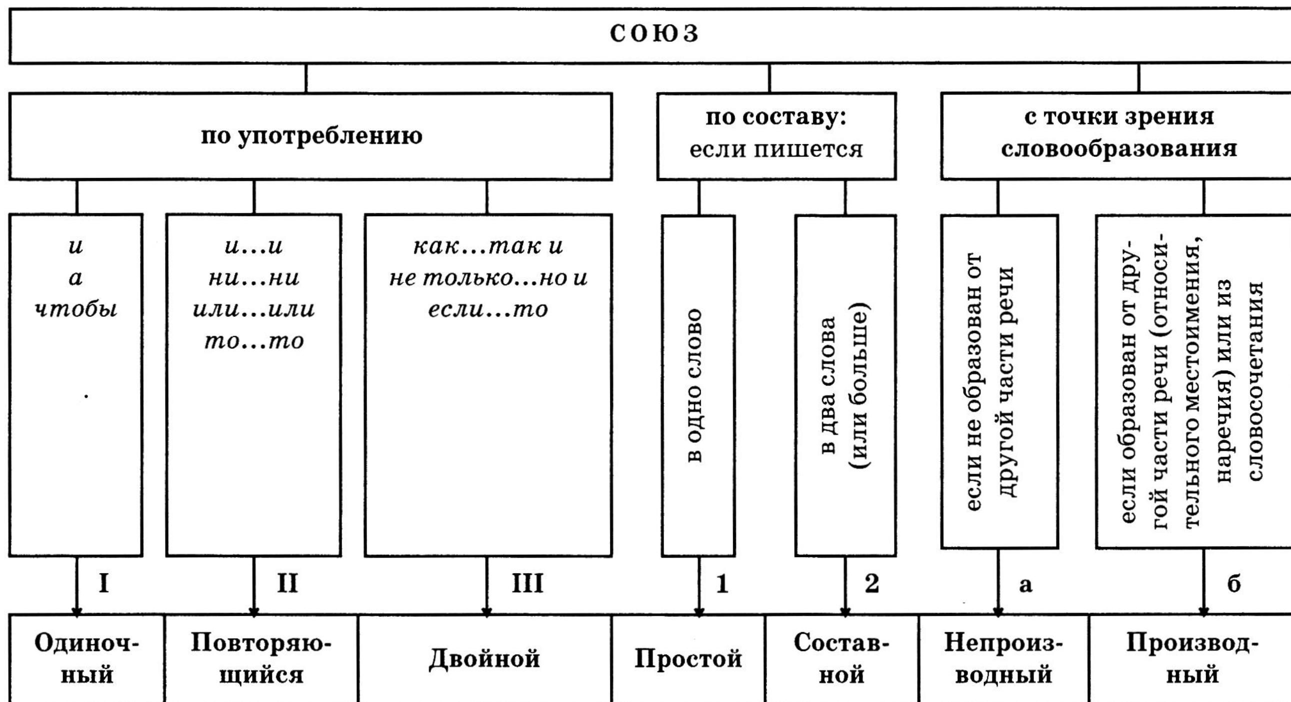
1.Начальная форма	
2. Разряд по значению	количественное собирательное дробное порядковое
3. Разряд по строению	простое сложное составное
4. Род (если есть)	
5. Число (если есть)	
6.Падеж	
7. Синтаксическая функция	каким членом предложения является
8. Особенности правописания (если есть)	

СЛУЖЕБНЫЕ ЧАСТИ РЕЧИ

69. Характеристика предлогов



70. Характеристика союзов



71. Разряды союзов по их функции и значению

Если союз связывает элементы

- **равноправные** (однородные члены предложения или части сложносочиненного предложения) — **сочинительные**
- **неравноправные** (придаточную часть сложноподчиненного предложения с главной его частью) — **подчинительные**

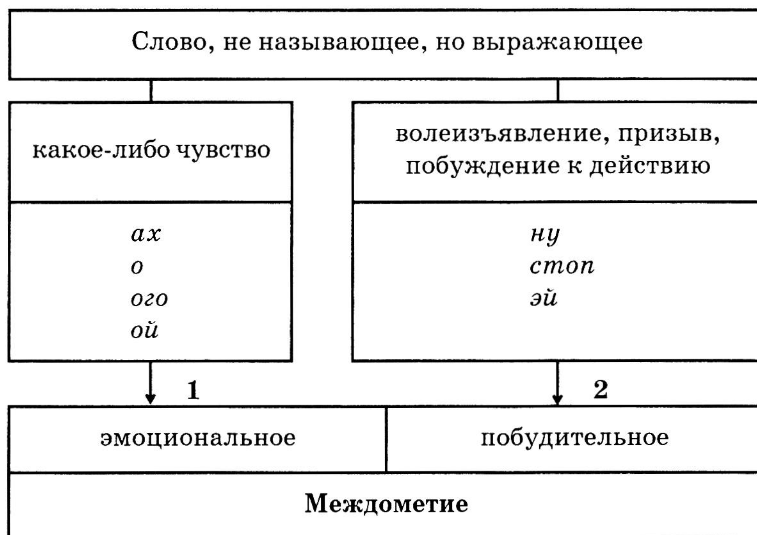
		союзы	значения
сочинительные	1	*и, да* (= *и*), *ни…ни, также, тоже*	соединительные
	2	*притом, причем, да и*	присоединительные
	3	*а, но, да* (= *но*), *однако* (= *но*), *зато, же*	противительные
	4	*или, либо, то…то, не то…не то, то ли…то ли*	разделительные
	5	*то есть, или* (= *то есть*)	пояснительные
	6	*как…так и, не только…но и, хотя и…но, если не…то, не столько…сколько*	сопоставительные
подчинительные	7	*что, чтобы, как*	изъяснительные
	8	*когда, едва, пока, лишь, как только, с тех пор как, в то время когда*	временны́е
	9	*потому что, так как, ибо, вследствие того что, благодаря тому что, ввиду того что*	причинные
	10	*чтобы, для того чтобы, дабы, лишь бы*	целевые
	11	*так что*	следствия
	12	*если, ежели, когда, коли*	условные
	13	*хотя, несмотря на то что*	уступительные
	14	*как, как будто, точно, словно*	сравнительные

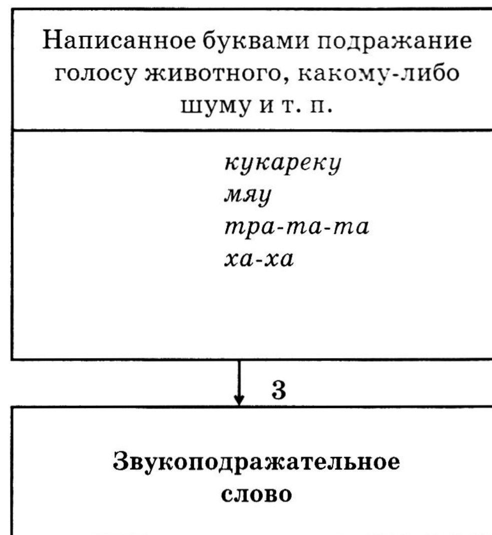
72. Разряды частиц

Частицы (по значению, функции и эмоциональной окраске)

№	Разряд	Частицы
1	**Указательные**	*вон, вот, это, вот именно, вот что, так вот*
2	**Уточняющие**	*именно, как раз, ровно, точно, в точности*
3	**Выделительно-ограничительные**	*единственно, почти, только, только лишь, лишь только*
4	**Утвердительные**	*да, ага, так, точно, так точно*
5	**Отрицательные**	*не, нет, вовсе не, отнюдь не, совсем не, далеко не*
6	**Вопросительные**	*разве, неужели, ли (ль)*
7	**Восклицательные**	*как, что за*
8	**Усилительные**	*даже, же, ни, ведь, всё, все-таки, вишь ты, еще бы, как, ну и, прямо, то-то, уж, хоть бы*
9	**Модально-волевые**	*бы, дай, давай, -ка, ну, пускай, пусть*
10	**Выражающие сомнение**	*авось, вишь, вряд ли, едва ли, как будто, ли, пожалуй, разве, словно*
11	**Обозначающие чужую речь**	*де, дескать, мол*
12	**Формообразующие**	*бы, бывало, да, пускай, пусть, -ся*
13	**Словообразующие**	*кое-, -то, -либо, -нибудь, угодно, ни*

73. Междометия и звукоподражательные слова





74. Схема морфологического анализа союзов

1. Разряд по функции	сочинительный подчинительный
2. Разряд по значению	1) *для сочинительных*: соединительный, противительный, пояснительный, разделительный и др. 2) *для подчинительных*: изъяснительный, временной, причинный, уступительный, целевой, условный, сравнительный, следственный и др.
3. Разряд по структуре	простой составной
4. Особенности правописания (если есть)	

75. Схема морфологического анализа предлогов

1. Разряд по происхождению	производный непроизводный
2. От какой части речи образован (для производных предлогов)	
3. Разряд по структуре	простой сложный составной
4. С каким падежом употребляется (или может употребляться)	
5. Особенности правописания (если есть)	

76. Схема морфологического анализа частиц

1. Разряд по значению	усилительная выделительно-ограничительная вопросительная	отрицательная восклицательная указательная и др.
2. Особенности правописания (если есть)		

77. Схема морфологического анализа междометий

1. Разряд по значению	побудительное эмоциональное и др.
2. Особенности правописания (если есть)	

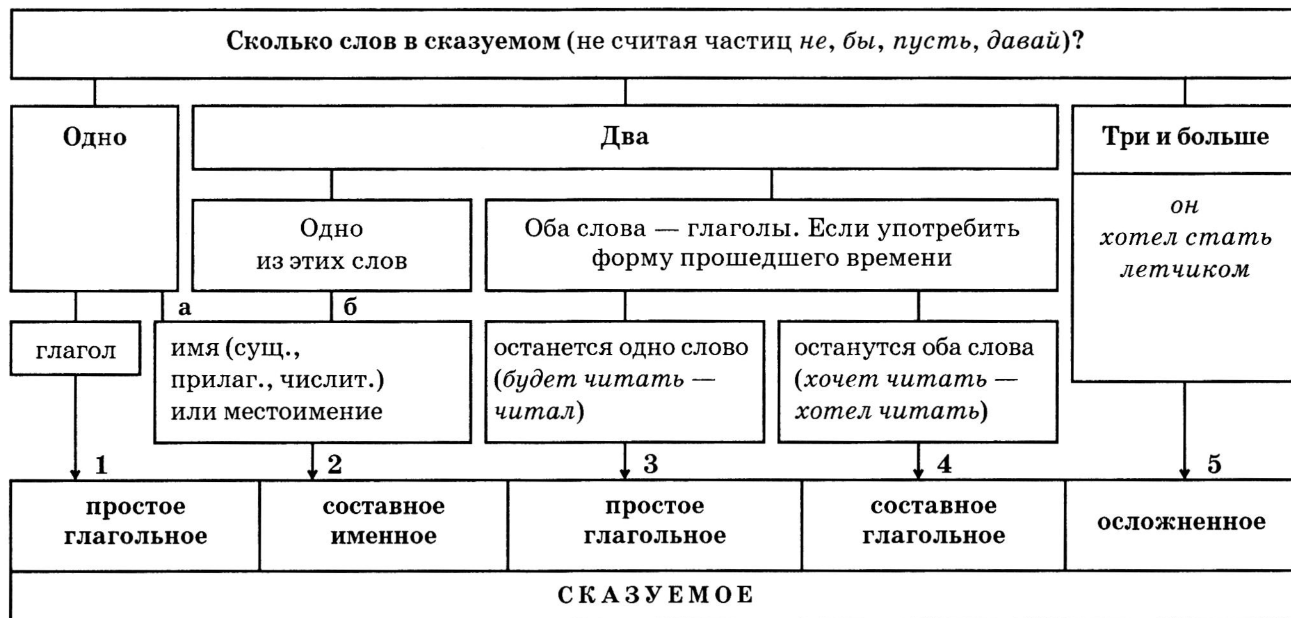
СИНТАКСИС

ПРОСТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

78. На какие вопросы отвечают члены предложения?



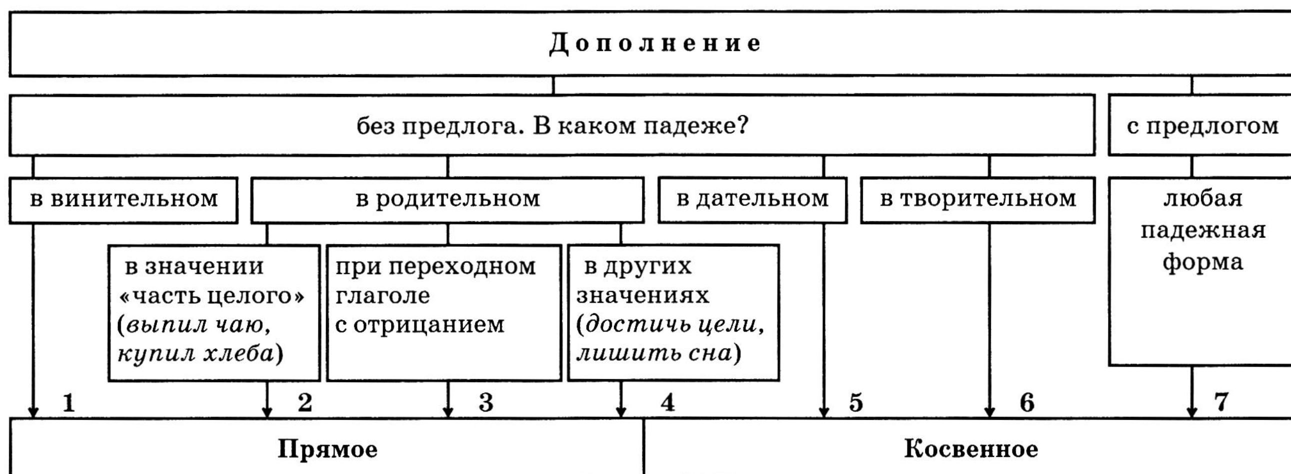
79. Сказуемое и его типы



Примеры.

- *Липы еще* ***зеленели*** *в таинственном иетнем саду.* (А. Ахматова.) **(1)**
  Я — ***поэт.*** (В. Маяковский.) **(2а)**
  Дворец ***казался островом*** *печальным.* (А. Пушкин.) **(2б)**
  Славную жаховку, город Николаев, эти дни когда-нибудь мы ***будем вспоминать.*** (И. Френкель.) **(3)**
  Давыдов на неопределенное время ***собрался поехать*** *во вторую бригаду.* (М. Шолохов.) **(4)**
  Он ***начал стараться писать*** *более внимательно.* **(5)**

80. Дополнение: прямое или косвенное?



Примечание. В роли дополнения могут выступать также:
неизменяемые слова, например: *Гарин глазами сказал «да».* (А. Н. Толстой.) *Сказал* что? — *«да»* (дополнение);
неопределенная форма глагола, например: *Наутро командир приказал наступать. Приказал* что? — *наступать* (дополнение; кроме того, признак дополнения — глаголы относятся к разным действующим лицам: *командир приказал*, а *наступать* должны *солдаты*).

Примеры.

- *Моя искренность поразила* ***Пугачева.*** (А. Пушкин.) **(1)**
  — Дед! — позвал он. — Дай ***воды.*** (А. Чехов.) **(2)**
  Я не люблю ***иронии*** *твоей.* (Н. Некрасов.) **(3)**
  Больной лишился ***сна.*** **(4)**
  Я ***никому*** *не позволю себя обманывать.* **(5)**
  Олово плавим, ***машинами*** *правим.* (В. Маяковский.) **(6)**
  ...Уже воображал, как он будет всюду рассказывать ***об этом своем каламбуре,*** *удачном по находчивости и смелости.* (А. Чехов.) **(7)**

81. Подлежащее и способы его выражения

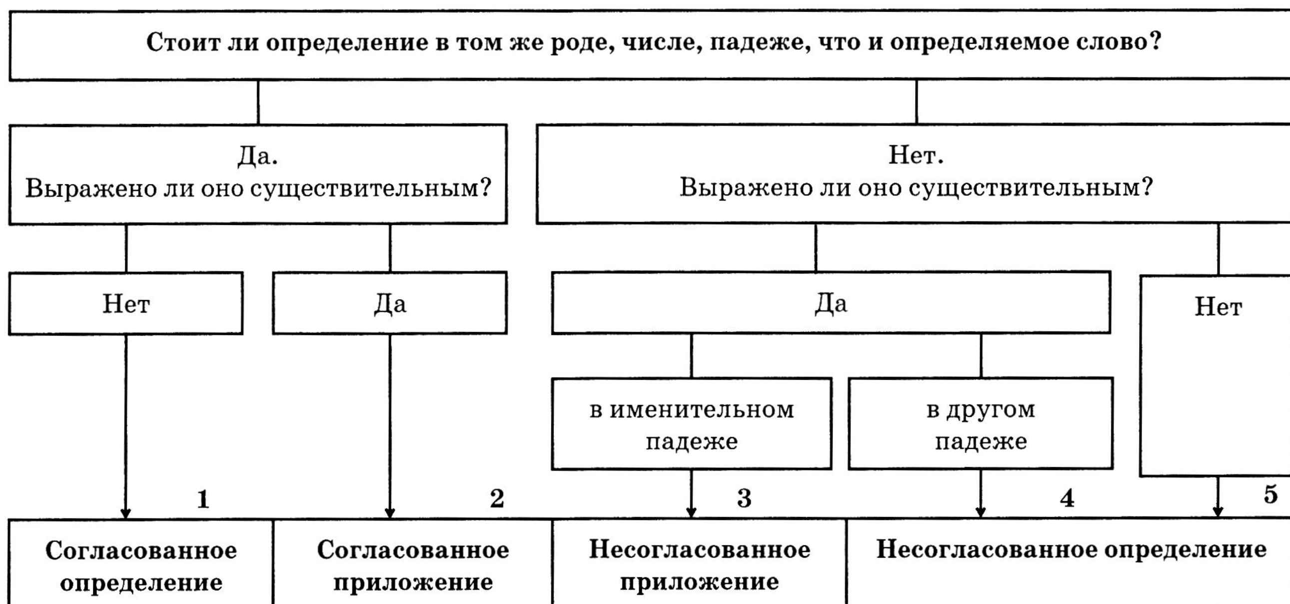
Способы выражения подлежащего

- **Слово**
  - 1 именительный падеж
    - а существительного
    - б прилагательного, перешедшего в существительное
    - в числительного
    - г местоимения
    - д причастия, перешедшего в существительное
  - 2 неопределенная форма глагола
  - 3 междометие
- **Словосочетание**
  - 4 им. п. + предлог *с* + тв. п. сущ.
  - 5 им. п. числительного + род. п. сущ.
  - 6 неопределенно-количественное слово (*много, сколько* и др.) + род. п. сущ.
  - 7 собирательное числительное, местоимение *кто, всякий, каждый*, прилагательное *любой* } + предлог *из* + род. п.
- 8 **Предложение**

Примеры.

- *За заставами ленинградскими вновь бушует соловьиная* ***весна.*** (А. Фатьянов.) **(1а)**
  А самый дерзкий и молодой *смотрел на солнце над водой.* (Н. Тихонов.) **(1б)**
  И опять идут ***двенадцать...*** (А. Блок.) **(1в)**
  Она *вмешивалась во все, знала все, хлопотала обо всем.* (А. Пушкин.) **(1г)**
  Опоздавшие *на спектакль не допускаются.* **(1д)**
  Грамоте ***учиться*** *всегда пригодится.* (Пословица.) **(2)**
  ...Далече грянуло ***ура...*** (А. Пушкин.) **(3)**
  Не шутя, Василий Теркин, подружились ***мы с тобой.*** (А. Твардовский.) **(4)**
  После этого вечера прошло ***семь недель.*** (А. Н. Толстой.) **(5)**
  Пришло ***несколько*** *новых* ***журналов.*** **(6)**
  Трое из них *приехали недавно;* ***Кто из нас*** *не знает этого?* ***Всякий из нас*** *(каждый из нас, любой из нас) готов помочь.* **(7)**
  «Не стреляйте в белых лебедей» *— повесть Бориса Васильева.* **(8)**

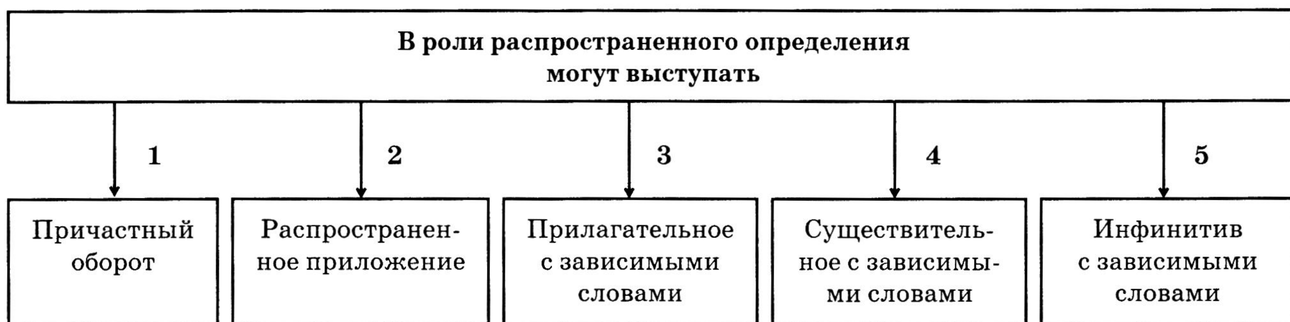
82. Виды определений



Примеры.

- *Переменилась **моя родная** Сибирь.* (В. Астафьев.) (1)
  *Он родился в городе **Воронеже**.* (2)
  *Вам нужно доехать до платформы «**Гаворонки**».* (3)
  *Несколько раз перечел я записку **Аси**.* (И. Тургенев.) (4)
  *Сильна была в нем привычка **спорить**; выстрел **слева** его насторожил.* (5)

83. Распространенное определение



Примеры.

- *След, **оттиснутый на снегу моей ногой**, быстро темнел и наливался водой.* (А. Куприн.) (1)
  *И Россия — **мать родная** — почесть всем отдаст сполна.* (А. Твардовский.) (2)
  ***Очень похожий лицом на мать**, характером он был весь в отца.* (3)
  *Старик нащупал возле себя длинную палку **с крючком на верхнем конце** и поднялся.* (А. Чехов.) (4)
  *Никто не допускал и мысли **покинуть отряд в трудную минуту**.* (5)

84. Виды обстоятельств



Примеры.

- *Читай **не так, как пономарь, а с чувством, с толком, с расстановкой**.* (А. Грибоедов.) **(1)**
*Его сопровождал молчаливый, **не по годам** серьезный Яков Сомов.* (М. Горький.) **(2)**
***Дня через три** потеплело.* (А. Куприн.) **(3)**
*Я ночевал **в городке** у моря.* **(4)**
*Сенокос запоздал **из-за дождей**.* (К. Паустовский.) **(5)**
*Пришел **мириться** к вам, совсем **не ради ссоры**.*
(И. Крылов.) **(6)**
***При каждой неудаче** надо анализировать свои ошибки; **Несмотря на плохую погоду**, экскурсия состоялась.* **(7)**

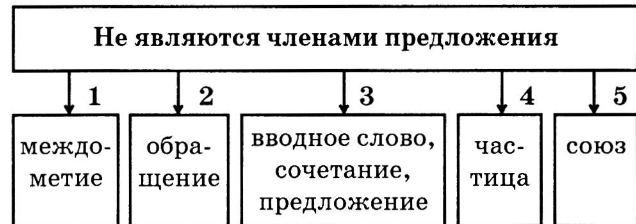
85. Распространенное обстоятельство



Примеры.

- ***Поджав губы**, помощник коменданта промолчал.*
(В. Богомолов.) **(1)**
*Он наводил на нее взгляд, **как зажигательное стекло**, и не мог отвести.* (И. Гончаров.) **(2)**
*Жди меня, и я вернусь **всем смертям назло**.*
(К. Симонов.) **(3)**
*Бой идет святой и правый, смертный бой **не ради славы, ради жизни** на земле.*
(А. Твардовский.) **(4)**

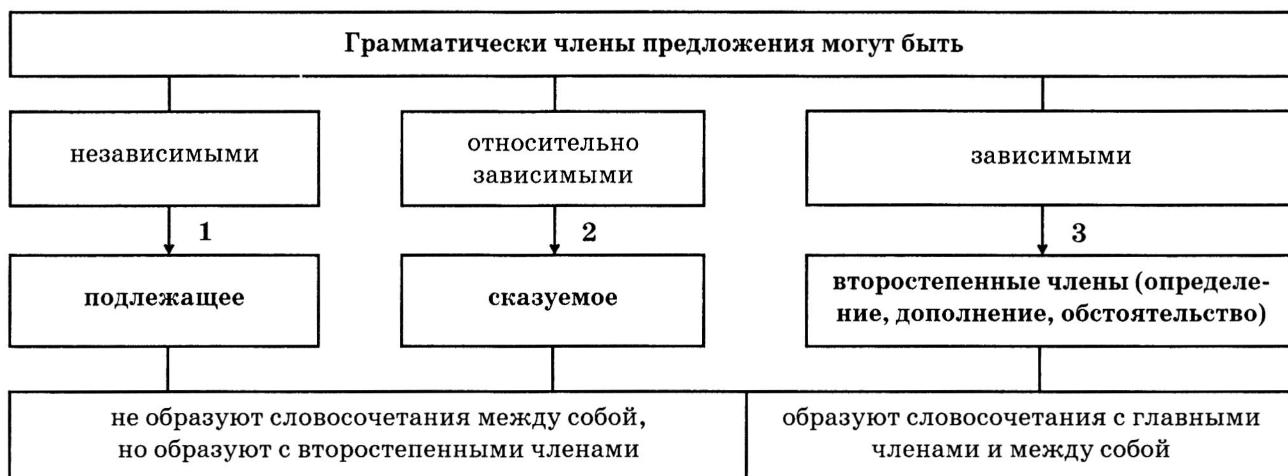
86. Слова, не являющиеся членами предложения



Примеры.

- ***Ах**, злые языки страшнее пистолета!*
(А. Грибоедов.) **(1)**
*Так разрешите же в честь новогоднего бала руку на танец, **сударыня**, вам предложить!*
(Ю. Левитанский.) **(2)**
*На Алексея все это, **видимо**, не действовало.*
(М. Горький.); *Гимназия — **все ее три этажа** — была насыщена запахом замазки.*
(В. Катаев.) **(3)**
***Да** у вас дело совсем уже слажено.*
(А. Пушкин.) **(4)**
*В тесноте, **да** не в обиде.* (Пословица.) **(5)**

87. Связь между словами в предложении: независимые и зависимые члены предложения



88. Виды связи между словами в словосочетании



Примеры.

- *Это было **бледное крошечное создание, напоминавшее цветок, выросший** без лучей солнца.* (В. Короленко.) **(1а)**
  *Рядом помещалась **каморка — хранилище** каталогов.* (Д. Гранин.) **(1б)**
  *А враги-дурни думают, что мы **смерти боимся.*** (А. Фадеев.) **(2а)**
  ***При сторожке находилась** огромная черная собака неизвестной породы…* (А. Чехов.) **(2б)**
  *Пехотные полки, застигнутые врасплох, выбегали из леса, и, **смешиваясь** друг с другом, роты **уходили вразбивку** беспорядочными толпами.* (Л. Толстой.) **(3)**

89. Характеристика предложения по его грамматической основе



Примеры.

- ***Белеет парус** одинокий в тумане моря голубом!* (М. Лермонтов.) (1)
  *Тонкий **свист** рябчика, красноватые **окна** домика в сумерках, **костер**, раздвигающий тьму...* (В. Белов.) (2)
  *— Вот **уеду**, так и **не буду знать**, отчего стрелялся Константин.* (А. Чехов.);
  ***Заходи** ко мне, **потолкуем**.* (А. Рекемчук.) (3)
  *Но тут тебя так **доймут** всяким вздором...* (А. Чехов.) (4)
  *После дела за советом **не ходят**.* (Пословица.) (5)
  *На улице было **светло** и **людно**.* (А. Рекемчук.); *Петру Николаевичу **следовало бы бросить курить**.* (А. Чехов.); ***Строить** не из чего...* (6)

90. Предложение: полное или неполное?



Примеры.

- *На небе спокойная синева.* (А. Пушкин.) (1)
  А по сторонам — словно вымершая от зноя степь. (М. Шолохов.) (2)
  Справа виднелась церковь, за нею еще какие-то здания. (Б. Васильев.) (3)
  — Дежурный, ко мне! (Б. Васильев.) (4)

91. Предложение: распространенное или нераспространенное?



Примеры.

- *Поздняя осень.* (Н. Некрасов.); *Кто-то тронул Боброва сзади за плечо.* (А. Куприн.) **(1)**
  Вьюга злится, вьюга плачет. (А. Пушкин.) **(2)**

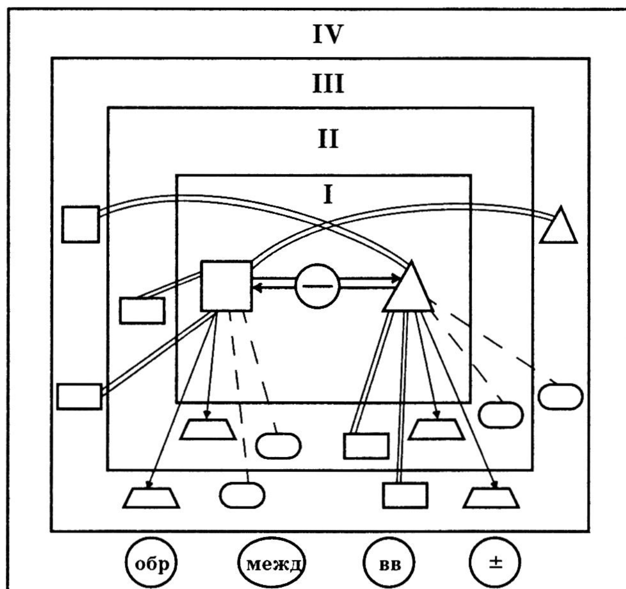
92. Распространение и осложнение простого предложения



Примеры.

- *Дремлет **чуткий** камыш.* (И. Никитин.) **(1)**
  ***Права** не дают, **права** берут.* (М. Горький.) **(2)**
  ***В одну скверную осеннюю ночь** Андрей Степанович Пересолин ехал **из театра**.* (А. Чехов.); ***Из Москвы** я выехал **последним пароходом**.* (К. Паустовский.); *Кустарник **скоро** кончился.* **(3)**
  Швед, русский — колет, рубит, режет... (А. Пушкин.) **(4а)**
  *Постепенно **к плеску, стуку, шороху, бульканью, ко** всем легкомысленным **звукам** воды присоединились тяжелый **гул** людских голосов и гортанные **выкрики**.* (К. Паустовский.) **(4б)**
  *А в лесу, казалось, шел говор тысячи могучих, хотя и глухих голосов, **о чем-то грозно перекликавшихся во мраке**.* (В. Короленко.) **(5а)**
  *Потом Леля перевязывала меня, то **плача от испуга и стыда**, то **тут же смеясь сквозь слезы над своей глупостью и моим жалким видом**.* (К. Паустовский.) **(5б)**
  *Молодой, нежный месяц, **будто забытый жницей серебряный серп**, лежал на синем пологе ночи.* (К. Паустовский.) **(5в)**
  *— **Эге, красавица**, у тебя остры зубы!* (М. Горький.) **(6а, б)**
  *Тут Дубровский закрыл лицо руками; он, **казалось**, задыхался.* (А. Пушкин.); *...Они, **то есть секунданты, должно быть**, несколько переменили свой прежний план и хотят зарядить пулею один пистолет Грушницкого.* (М. Лермонтов.) **(5в, 6в)**
  ***Да**, были люди в наше время!* (М. Лермонтов.); ***Нет**, никогда я зависти не знал.* (А. Пушкин.) **(6г)**

93. Структурная схема простого предложения



— подлежащее
— сказуемое
— связка
— согласование
— примыкание
— определение
— дополнение
— обстоятельство
— управление
— координация между главными членами

обр — обращение
вв — вводные слова и предложения
межд — междометие
± — слова-предложения *Да; Нет*

I — основа предложения
II — распространение предложения второстепенными членами
III — осложнение предложения однородными членами
IV — осложнение предложения словами, не являющимися членами предложения

94. Характеристика предложения по отношению к действительности, по цели высказывания и эмоциональной окраске



Примеры.

- *Майскими короткими ночами, отгремев, закончились бои…* (А. Фатьянов.) **(1а)**
  Не жалею, не зову, не плачу… (С. Есенин.) **(1б)**
  Истоки способностей и дарований детей на кончике пальцев. (В. Сухомлинский.) **(2а)**
  Где начало того конца, которым оканчивается начало? (К. Прутков.) **(2б)**
  Родная Земля! Назови мне такую обитель! (Н. Некрасов.) **(2в)**
  Поэзия! Ты служба крови! (И. Сельвинский.) **(3а)**
  К обеду приехал лекарь. (А. Чехов.) **(3б)**

СЛОЖНОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

95. О построении схемы сложного предложения

Для уяснения структуры сложного предложения и взаимоотношений между его частями нужно уметь построить его схему.

Способы построения такой схемы могут быть различны.

1. Наиболее традиционна структурная схема сложного предложения. Ее элементы можно обозначить следующим образом:

— простое предложение, входящее в состав сложного

— вводное предложение

— простое предложение, осложненное вводным

— простое предложение с прямой речью

— бессоюзная связь между частями сложного предложения

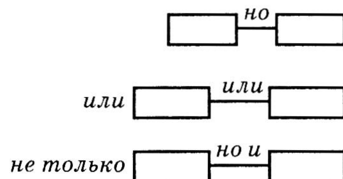
— сочинительная связь (между равноправными частями предложения)

— подчинительная связь (между главной и придаточной — неравноправными частями предложения)

— сопоставительная связь (между взаимообусловленными частями предложения)

Подобную обобщенную схему можно детализировать, вводя в нее дополнительные элементы, например:

а) в схему сложносочиненного предложения — обозначение сочинительных союзов, одиночных, повторяющихся и двойных:



б) в схему сложноподчиненного предложения — обозначение вопроса к придаточной части, подчинительного союза или союзного слова и типа придаточной части:



95. О построении схемы сложного предложения

в) обозначение последовательности частей сложного предложения, например: *Когда весна придет, не знаю.* (А. Фатьянов.)

2 → главная часть

1 → придаточная часть

2. Однако не во всех случаях структурная схема достаточно удобна. Например, она не отражает расположения частей сложноподчиненного предложения, когда придаточная часть находится внутри главной.

Более наглядной здесь может стать **построчная схема** сложного предложения.

Ее элементы:

——— — **прямая** линия — синтаксически равноправные части сложного предложения (бессоюзного, сложносочиненного), а также главная часть сложноподчиненного предложения.

~~~ — **волнистая** линия — придаточная часть сложноподчиненного предложения.

Располагая последовательно эти элементы в строке, можно построить схему сложного предложения и обозначить на ней знаки препинания, а также средства связи и взаимоотношения частей предложения. Например:

Труд человека кормит — лень портит. (Пословица.)

——— — ———. (бессоюзное предложение)

Ум хорошо, а два лучше. (Пословица.)

———, *а* ———. (сложносочиненное предложение)

Когда в товарищах согласья нет, на лад их дело не пойдет. (И. Крылов.)

Когда ~~~, ———. **в каком случае?** (сложноподчиненное предложение)

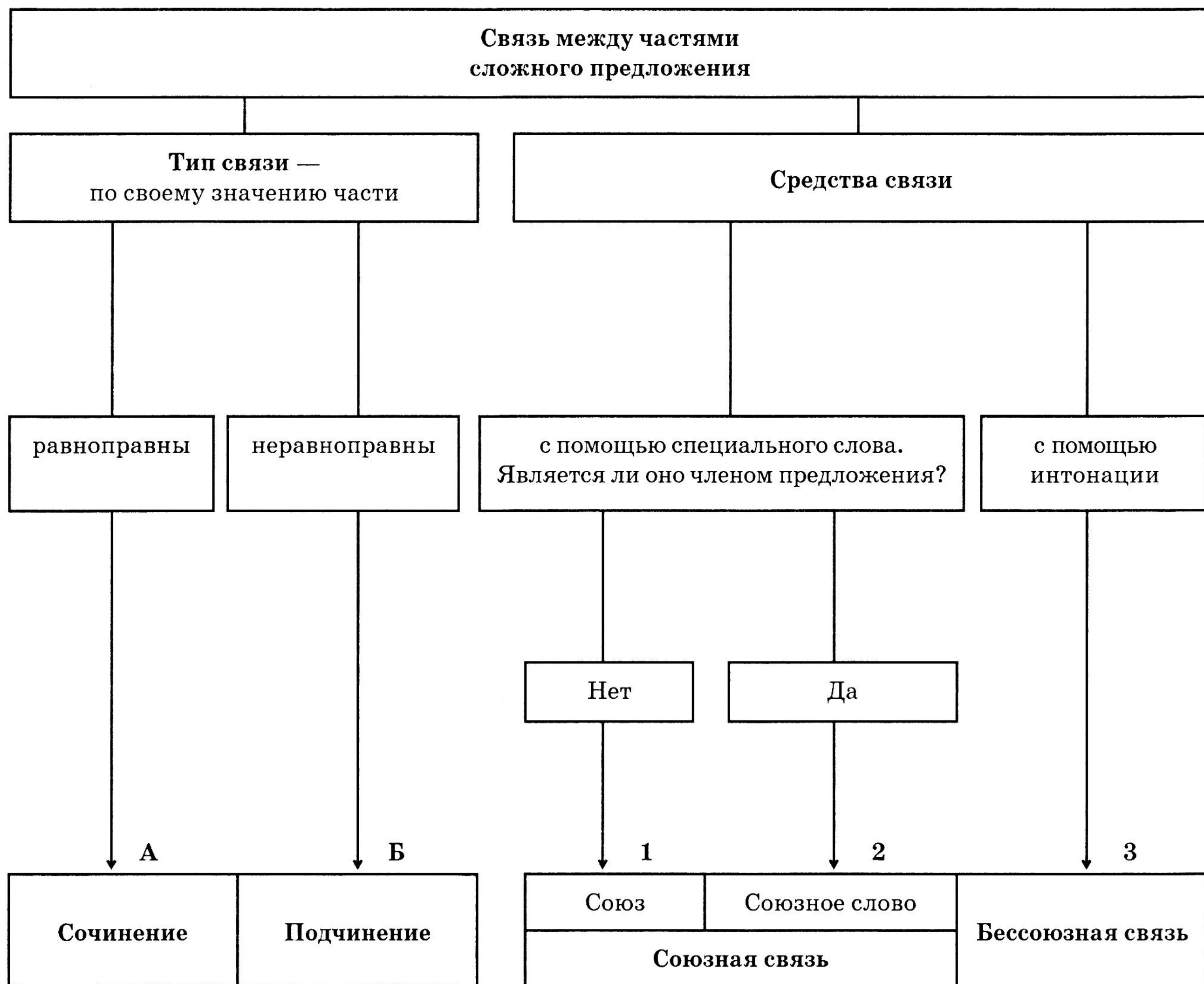
Человеку, который сам ничего не знает, не о чем и рассказать людям. (Б. Горбатов.)

———, *который* ~~~, ———. **какому?** (сложноподчиненное предложение с придаточной частью внутри главной; П-образная линия соединяет начало и конец главной части; дуга соединяет придаточную часть с той частью главного предложения, в которой находится опорное слово)

Посмотрю я, где ты достанешь черевички, которые могла бы я надеть на свою ногу. (Н. Гоголь.)

(сложноподчиненное предложение с двумя придаточными, одно из которых является главным по отношению к другому придаточному — последовательное подчинение)
~~~

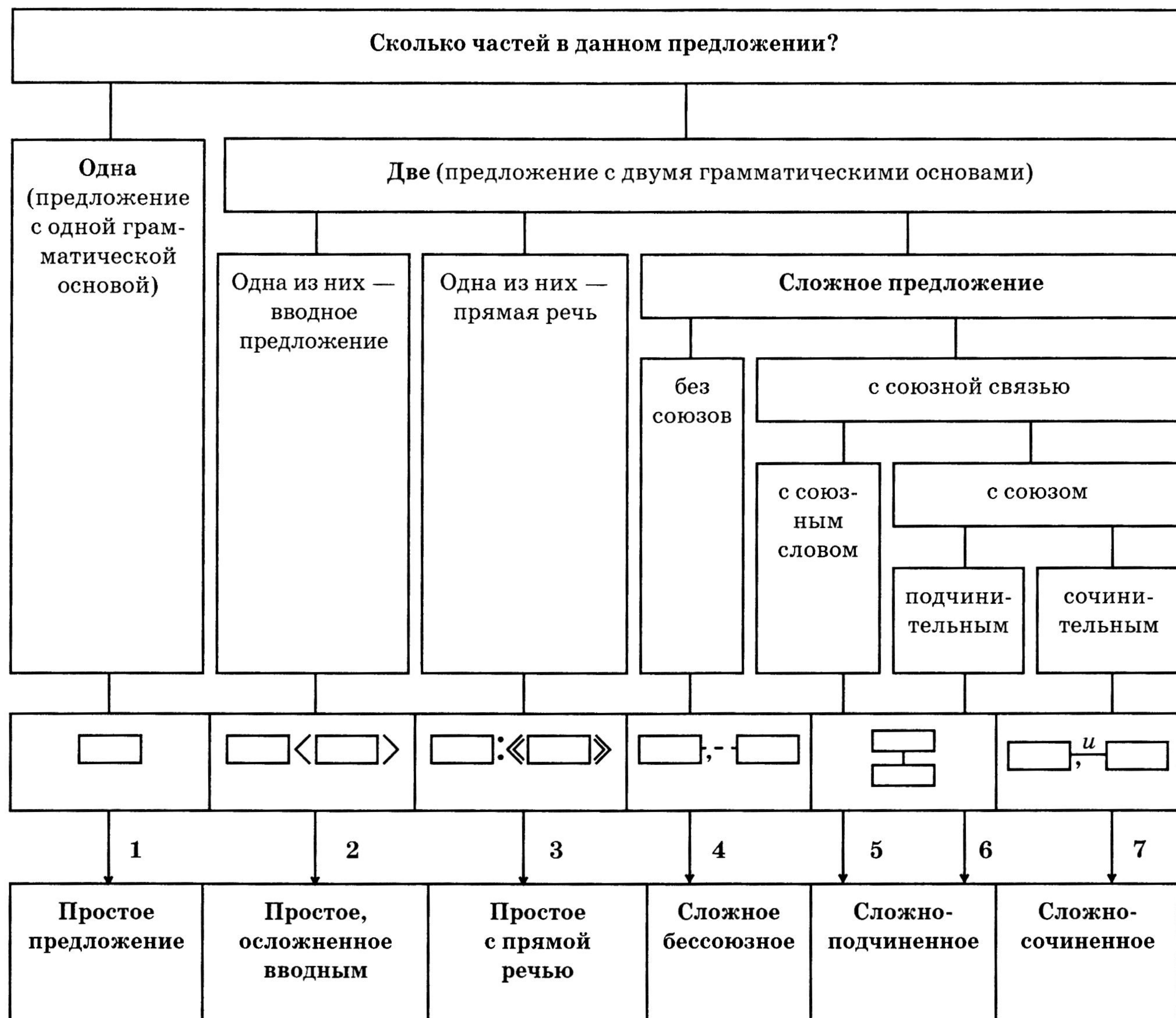
96. Типы и средства связи между частями сложного предложения



Примеры.

- *Принесли к врачу солдата только что из боя,* ***но*** *уже в груди не бьется сердце молодое.* (С. Кирсанов.) **(А)**
  Он [Пушкин] *для русского искусства то же,* ***что*** *Ломоносов для русского просвещения вообще.* (И. Гончаров.) **(з)**
  Ты потише провожай, парень сероглазый, ***потому что*** *очень жаль расставаться сразу...* (М. Исаковский.) **(1)**
  Он не смотрел на часы и не знал, ***сколько*** *ждал.* (А. Ананьев.) **(2)**
  Хочу оттолкнуть ее от себя — она, как кошка, вцепилась в мою одежду... (М. Лермонтов.) **(3)**

97. Разбор предложения, состоящего из одной или двух частей



Примеры.

- *И вся эта налаженная им* ***жизнь была нарушена*** *самым неожиданным образом.* (А. Ананьев.) **(1)**
  Он меня, ***вы знаете****, очень уважает.* (И. Тургенев.) **(2)**
  *Курьер сказал: «****Он левша и все левой рукой делает****».* (Н. Лесков.) **(3)**
  Оглядываюсь — никого нет кругом. (М. Лермонтов.) **(4)**
  Каков *привет, таков и ответ.* (Пословица.) **(5)**
  А я хотел бы, ***чтоб*** *они из рук, с моей ладони, этот хлеб клевали.* (Вс. Рождественский.) **(6)**
  Вздыхают, жалуясь, басы, ***и****, словно в забытьи, сидят и слушают бойцы — товарищи мои.* (М. Исаковский.) **(7)**

98. Предложение: сложносочиненное или сложноподчиненное?



Примеры.

- *Пахнет полынью и мятой,* ***и*** *от соседних болот легкий туман сизоватый низко над степью плывет.* (П. Комаров.) (1)
  Не прошло и получаса, ***как*** *сердце его начало ныть...* (А. Пушкин.) (2)
  Ему рассказали, ***в чем*** *дело.* (А. Куприн.) (3)

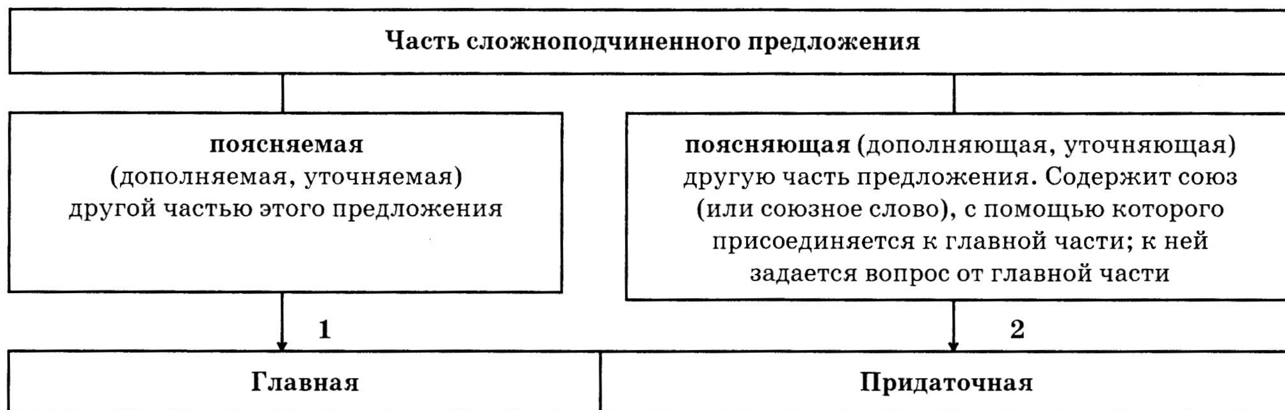
99. Сочинительные союзы — показатели смысловых отношений между частями сложносочиненного предложения



Примеры.

- *Дождик лил сквозь солнце,* ***и*** *под елью мшистой мы стояли точно в клетке золотистой.* (А. Майков.) (1)
  В саду горит костер рябины красной, ***но*** *никого не может он согреть.* (С. Есенин.) (2)
  То *солнце покажется,* ***то*** *снова дождь польет.* (3)

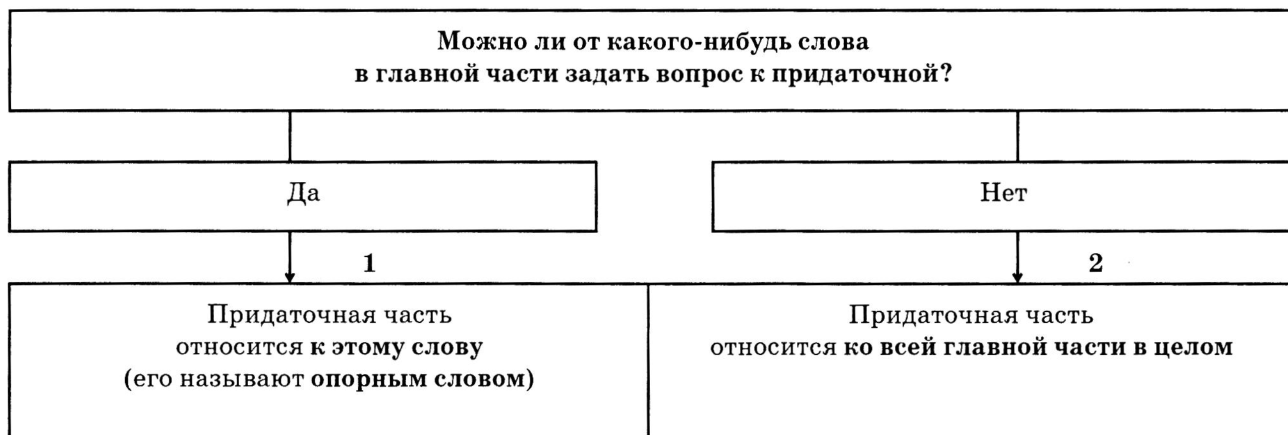
100. Как различить главную и придаточную часть сложноподчиненного предложения?



Примеры.

- ***На другой день Алексей... рано утром поехал к Муромскому***, *дабы откровенно объясниться с ним.* (А. Пушкин.) **(1)**
В доме у доктора все светилось такой удивительной чистотой, ***какая бывает в домах северян.*** (К. Паустовский.) **(2)**

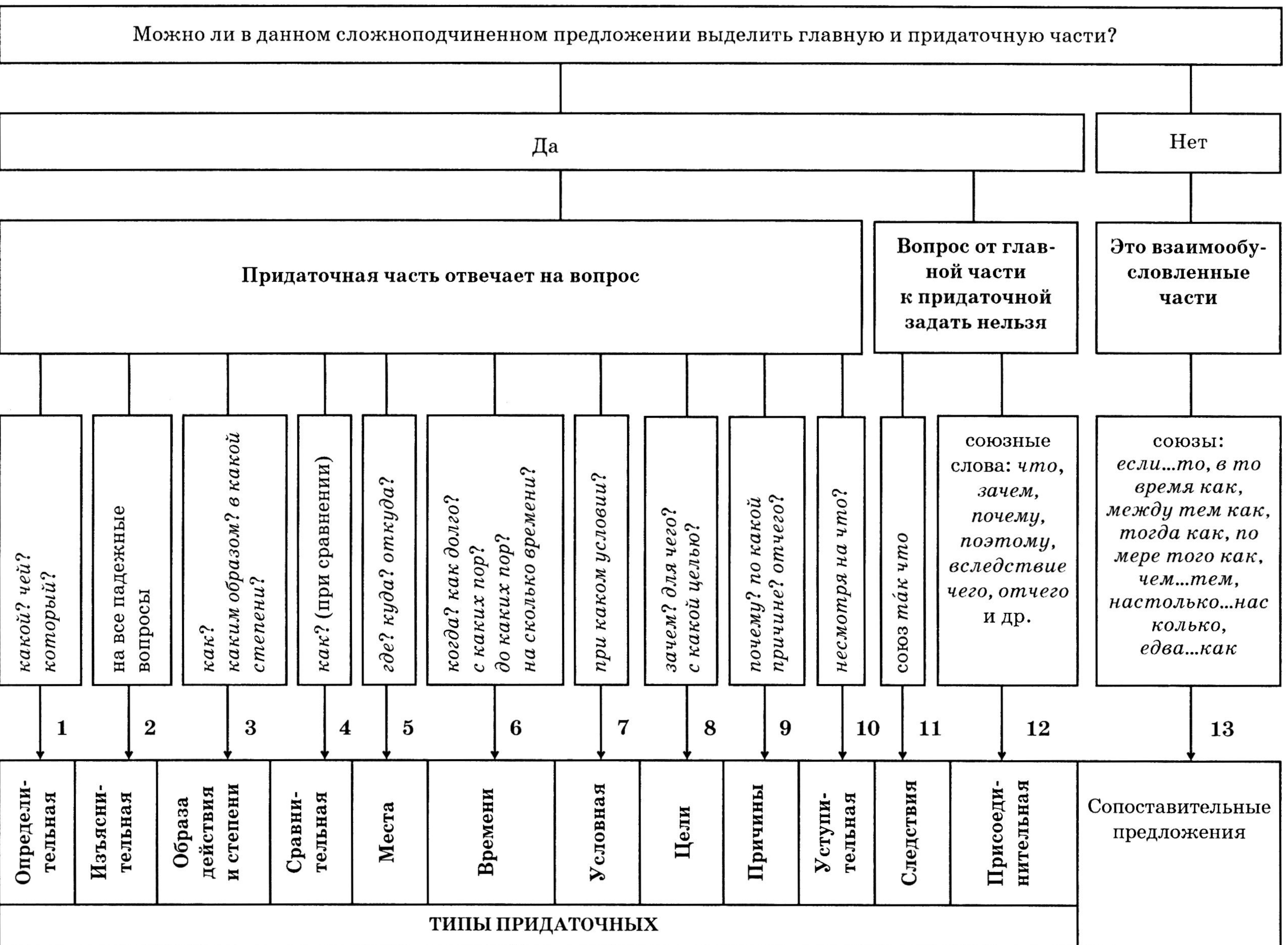
101. Как относится придаточная часть к главной в сложноподчиненном предложении?



Примеры.

- *Он стоял среди* ***метели****, которая кружилась вокруг него, лепя мокрым снегом в лицо и застилая окрестности льющейся мутью поземки.* (В. Катаев.) (1)
Чтобы никого не беспокоить, ***он играл очень тихо.*** (Б. Каверин.); *Лишь только бой угас,* ***звучит другой приказ.*** (Б. Окуджава.) (2)

102. Как определить тип придаточной части?



Примеры.

- *Люблю людей,* ***кому жизнь в радость.*** (Ф. Абрамов.) **(1)**
Я хочу, ***чтоб к штыку приравняли перо.*** (В. Маяковский.) **(2)**
Книги он расставил так, ***что самые нужные были под рукой.*** **(3)**
...Встретить я хочу мой смертный час так, ***как встретил смерть товарищ Нетте.*** (В. Маяковский.) **(4)**
Откуда ветер, *оттуда и дождь.* (Пословица.) **(5)**
По синим волнам океана, ***лишь звезды блеснут в небесах,*** *корабль одинокий несется, несется на всех парусах.* (М. Лермонтов.) **(6)**
Если я заболею, *к врачам обращаться не стану.* (Я. Смеляков.) **(7)**
Я встал, ***чтобы лучше видеть.*** **(8)**
Я очень полюбил эту книжку-тетрадку, ***потому что в ней удивительно гармонично сочеталось изобразительное с повествовательным.*** (В. Катаев.) **(9)**
Сколько я ни напрягал зрение, *я не мог увидеть конца этой низины.* (В. Арсеньев.) **(10)**
«Бунт Стеньки Разина» я читал Коновалову часто, ***так что он уже свободно рассказывал книгу своими словами.*** (М. Горький.) **(11)**
Я остаюсь на даче на всю зиму, ***что оригинально и ново.*** (А. Чехов.) **(12)**
...Она Алексея еще не видала, ***между тем как все молодые соседки только об нем и говорили.*** (А. Пушкин.) **(13)**

103. Структурные особенности сложноподчиненного предложения с одной придаточной частью

1		1 2	
2		2 1	
3			
4			

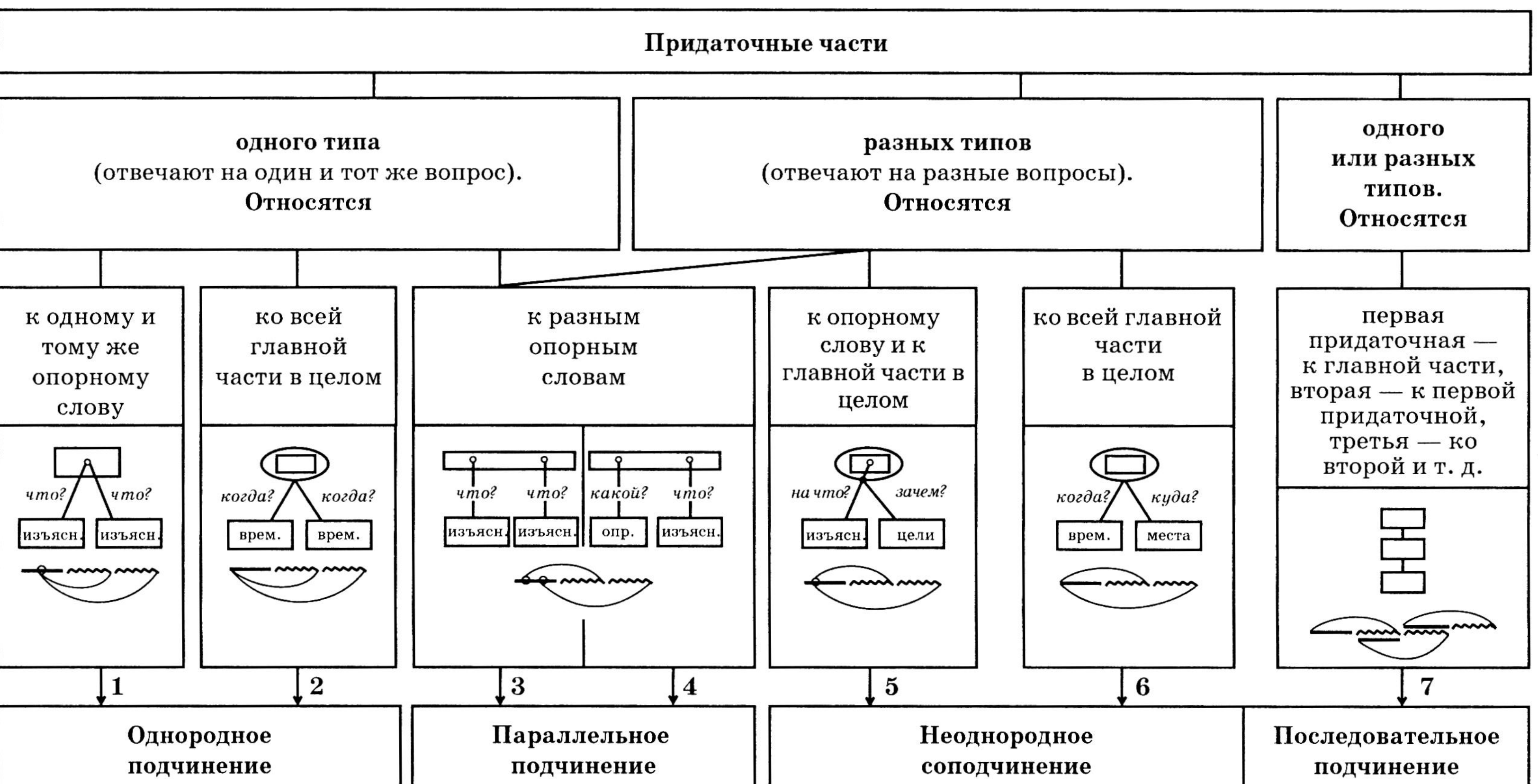
Примеры.

- *Мне приходилось ночевать в стогах в октябре,* ***когда трава на рассвете покрывается инеем, как солью.*** (К. Паустовский.) **(1)**
Как появилось зло, *так появилось желание бороться с ним.* (В. Шукшин.) **(2)**
С тех пор, ***как здесь живет профессор со своей супругой,*** *жизнь выбилась из колеи.* (А. Чехов.) **(3)**
И жизнь, ***как посмотришь с холодным вниманьем вокруг,*** *такая пустая и глупая шутка.* (М. Лермонтов.) **(4)**

104. Структурные особенности сложноподчиненного предложения с двумя придаточными частями

1		1 → 2, 3	однородное подчинение
2		2 → 1, 3	
3		3 → 1, 2	
4		1 → 2, 3	параллельное подчинение
5		2 → 1, 3	
6		3 → 1, 2	
7		1 – 2 – 3	последовательное подчинение
8		1 – 3 – 2	
9		2 – 1 – 3	
10		2 – 3 – 1	
11		3 – 1 – 2	
12		3 – 2 – 1	

105. Виды подчинения придаточных частей в сложноподчиненном предложении с двумя и более придаточными частями



Примеры.

- *И не видела Даша,* ***какое было лицо у сестры, что с ней происходило.*** (А. Н. Толстой.) (1)
  Где бы он ни находился, где бы он ни жил, *он занимался нашими делами, устраивал наши судьбы.* (К. Федин.) (2)
  Я думал, ***что дорога где-то рядом,*** *но вскоре понял,* ***что заблудился.*** (3)
  Самая тоскливость этих мест, ***куда я попал,*** *показалась мне доказательством,* ***что нефть здесь должна быть в большом количестве.*** (К. Паустовский.) (4)
  Несмотря на то, ***что князь Василий неохотно и почти неучтиво слушал пожилую даму,*** *она ласково и трогательно улыбалась ему и,* ***чтоб он не ушел,*** *взяла его за руку.* (Л. Толстой.) (5)
  Когда солнце уже начинало пригревать, *тополь протягивает ветви на восток,* ***чтобы встретить светило в самое первое мгновение его появления.*** (6)
  Я спросил его, ***может ли он сказать откровенно, что бы он сделал, если бы получил такое объявление Шамиля.*** (Л. Толстой.) (7)

106. Общая схема синтаксического разбора предложения

ПРЕДЛОЖЕНИЕ										
Простое	Сложное									
	Бессоюзное	Сложносочиненное	Сложноподчиненное				Сложная синтаксическая конструкция			
			с одним придаточным	с двумя и более придаточными			с бессоюзной связью			с сочинением и подчинением
				подчинение		неоднородное соподчинение	и сочинением	и подчинением	сочинением и подчинением	
				однородное	последовательное					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

Примеры.

- *Ничего не сказала рыбка, лишь хвостом по воде плеснула и ушла в глубокое море.* (А. Пушкин.) **(1)**

...Там на неведомых дорожках следы невиданных зверей; избушка там на курьих ножках стоит без окон, без дверей... (А. Пушкин.) **(2)**

И Пушкин ласково глядит, и ночь прошла, и гаснут свечи, и нежный вкус родимой речи так чисто губы холодит. (Б. Ахмадулина.) **(3)**

Если жизнь тебя обманет, не печалься, не сердись! (А. Пушкин.) **(4)**

Все бы слушал, как вершина ивы дремлющей шумит, как на темном дне оврага по камням родник журчит. (А. Плещеев.) **(5)**

Вот пес без хвоста, который за шиворот треплет кота, который пугает и ловит синицу, которая часто ворует пшеницу, которая в черном чулане хранится в доме, который построил Джек. (С. Маршак.) **(6)**

Дядька не расслышал, как его назвали, только понял, что по имени и отчеству. (Б. Шергин.) **(7)**

На болоте крячет цапля, четко хлюпает вода, а из туч глядит, как капля, одинокая звезда. (С. Есенин.) **(8)**

По лицу Анны Сергеевны трудно было догадаться, какие она испытывала впечатления: оно сохраняло одно и то же выражение, приветливое, тонкое... (И. Тургенев.) **(9)**

О Феничке, которой тогда минул уже семнадцатый год, никто не говорил, и редкий ее видел: она жила тихонько, скромненько... (И. Тургенев.) **(10)**

Всем известно, что письма бывают веселые или печальные, и поэтому, пока мать читала, Чук и Гек внимательно следили за ее лицом. (А. Гайдар.) **(11)**

107. Сложные синтаксические конструкции

Предложения с синтаксической связью						
однотипной			разнотипной			
1	2	3	4	5	6	7
Бессоюзное	Сложно-сочиненное	Сложнопод-чиненное	С бессоюзной связью и сочинением	С бессоюзной связью и подчинением	С бессоюзной связью, сочинением и подчинением	С сочинением и подчи-нением

Примеры.

- *Утро великолепное; в воздухе прохладно; солнце еще не высоко.* (И. Гончаров.) **(1)**
И ерзает руль, и обшивка трещит, и забраны в рифы полотна. (Э. Багрицкий.) (2)
Я хочу, чтобы слышала ты, как тоскует мой голос живой. (А. Сурков.) (3)
Дверь распахнулась, вошел метр, и перед ним склонилось семь париков. (А. Н. Толстой.) (4)
...Я еще не так сыграл бы, — жаль, что лучше не могу. (А. Твардовский.) (5)
Люблю ли тебя я — не знаю, но кажется мне, что люблю. (А. К. Толстой.) (6)
Жди меня, и я вернусь, не желай добра всем, кто знает наизусть, что забыть пора. (К. Симонов.) (7)

ЧУЖАЯ РЕЧЬ

108. Способы передачи чужой речи

Чужая речь, оформленная		
как самостоятельное предложение (или ряд предложений)		как придаточная часть в таком сложноподчиненном предложении, где главной частью являются слова автора
От чьего лица передается чужая речь?		
от лица того, кто ее произносит	от лица автора	от лица автора
1	2	3
Прямая речь	**Несобственно-прямая речь**	**Косвенная речь**

Примеры.

- ***«Уж очень мне хотелось пойти в этот поход!»** — сказал Толя.* (1)
*Толя заранее волновался. **Очень уж хотелось ему пойти в этот поход!*** (2)
*Толя сказал, **что ему очень хотелось пойти в этот поход.*** (3)

„Mokinio žinynas“ – universalus leidinys. Medžiaga kruopščiai atrinkta, turininga, pateikiama naujausia informacija. Žinynas pravers mokantis naujų dalykų, rengiantis kontroliniams darbams, įskaitoms ir egzaminams.

Knygoje esančios lentelės ir schemos ugdys loginį mąstymą, mokys iš pateiktų pavyzdžių formuluoti taisykles, padės jas ilgam įsiminti.
„Mokinio žinynas“ skiriamas bendrojo lavinimo mokyklų, gimnazijų, licėjų moksleiviams, abiturientams, aukštųjų mokyklų pirmakursiams, mokytojams.

ISBN 9955-08-200-3
